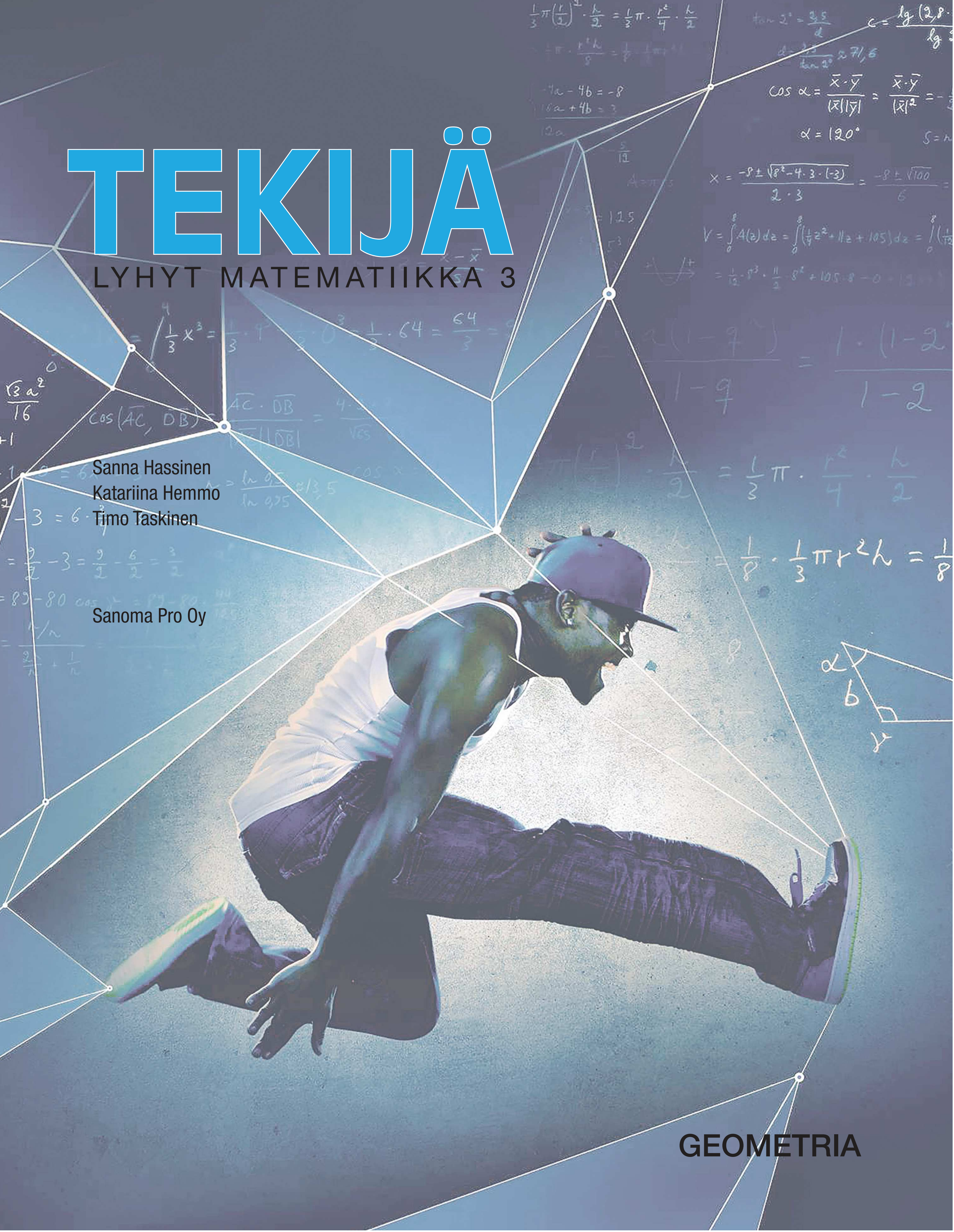
TEKIJÄ

LYHYT MATEMATIIKKA 3



Sanna Hassinen
Katariina Hemmo
Timo Taskinen

Sanoma Pro Oy

GEOMETRIA

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1.–2. painos, 2017

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
Tekijä Lyhyt matematiikka 3 Geometria ISBN 978-952-63-3898-9

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-3901-6
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-3902-3

Toimitus: Sanna Niemelä
Ulkoasu: Liisa Holm
Taitto: Juho Niemelä
Piirrokset: Juho Niemelä
Valokuvat: Fotolia: 20 alh. (Philophoto), 25, 28 (john(dot)amas{at}ntlworld[dot]com), 82 (Rolf Fischer Rinteln),
86, 87 ylh. (Oez), 96 (@nt), 117 (euboss33), 202 (CBH), 213 (mode_list), 214 (yurakp) *Mostphotos:* 71, 76, 196
Rodeo: 54 (Ron Chapple Stock)
Shutterstock: 15, 19, 26, 32, 34, 35, 48, 53, 59, 67, 74 (meunierd), 75, 105 (Sakala), 112, 116, 118 alh., 118 ylh. (Mikhail Varentsov), 137, 144, 146, 151, 157, 159, 174, 181, 184, 185, 208 (Dennis van de Water)
Vastavalo: 14 (Emmi Korhonen), 20 ylh., 62 (Jussi Murtosaari), 206 (Jussi Murtosaari)

Kansi: Vaidas Bagonas, Sari Jeskanen

© Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

1 Kertausta geometriasta **7**
1.1 Monikulmioita 8
1.2 Ympyrä 22
1.3 Avaruuskappaleita 36

2 Kuvioita ja kappaleita **56**
2.1 Suorakulmaisen kolmion geometriaa 57
2.2 Suorakulmainen kolmio ja monikulmiot 77
2.3 Ympyrän sekantti ja tangentti 90
2.4 Avaruusgeometriaa 107
2.5 Geometriaa koordinaatistossa 119

3 Yhdenmuotoisuus **135**
3.1 Kuvioiden yhdenmuotoisuus 136
3.2 Yhdenmuotoisuussuhde 149

4 Lisämateriaali **160**
4.1 Yksikkömuunnokset 160
4.2 Erilaisia kulmia 165
4.3 Säännölliset monikulmiot 171
4.4 Maapallo 175
4.5 Yhdenmuotoiset kappaleet 182

5 Kertaus: Geometria **186**
5.1 Kurssin keskeiset asiat 187
5.2 Matemaattisia malleja 197
5.3 Monivalintatehtävät 210

Vastaukset **215**

Hakemisto **221**

Kirjan käyttäjälle

Tavoitteet

Matematiikan opetuksen ja erityisesti oppikirjan tärkeä tehtävä on, että opiskelija saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään, oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa sekä rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen.

Lukion opetussuunnitelma asettaa lyhyen matematiikan opetukselle monia tavoitteita. Opiskelijan on esimerkiksi osattava käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä. Nopeasti muuttuvassa maailmassa täytyy pystyä vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota ja arvioimaan sen luotettavuutta.

Lukiolaisen on hankittava sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille. Matemaattisten tietojen ja taitojen lisäksi on opittava käyttämään tarkoituksenmukaisia teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Opetussuunnitelman mukaan kurssin ”Geometria” tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista
- vahvistaa tasokuvioiden ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvien piirtämisen taitojaan
- osaa ratkaista käytännön ongelmia geometriaa hyväksi käyttäen
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

Kirjan rakenne

Lyhyt Tekijä -sarjassa on monia ratkaisuja, jotka tukevat opiskelijaa opetussuunnitelman tavoitteiden saavuttamisessa.

- Jokaisen pääluvun alussa on kaavio, jossa esitellään keskeiset tavoitteet. Sen lisäksi kaaviossa kerrotaan, mitkä asiat opiskelijan tulisi hallita ilman apuvälinettä ja mitkä asiat on osattava apuvälineen kanssa.

Pohdinta

- Luvut alkavat pohdinnoilla. Niiden tarkoitus on johdatella tunnin aiheeseen.

E1

- Kirjan jokaiseen esimerkkiin liittyy tehtäväosiossa vastaavantyyppinen tehtävä. Nämä tehtävät on selkeästi merkitty symbolilla. Tämä helpottaa esimerkiksi itsenäistä opiskelua.

123.

- Vaativammat tehtävät on merkitty väripohjalla. Ne voivat olla joko laskintehtäviä tai ilman laskinta laskettavia tehtäviä.

Lisämateriaali: Maapallo s. 175

- Kurssiin liittyvä lisämateriaali on koottu omaksi pääluvuksi. Teoriaosassa on viittauksia tähän lukuun.

  Matematiikan ylioppilaskokeessa osa tehtävistä ratkaistaan ilman teknistä apuvälinettä, osa teknisen apuvälineen kanssa. Apuvälineellä tarkoitetaan tietokonetta tai laskinta. Tämä jaottelu on otettu huomioon myös oppikirjassa.

- Osa esimerkeistä on ratkaistu ilman laskinta. Vastaavasti osa tehtävistä on tarkoitus ratkaista ilman mitään apuvälinettä.

- Esimerkit ja tehtävät, joiden ratkaisussa on tarkoitus käyttää laskinta tai tietokonetta, on merkitty omalla symbolilla.

Kun kirjan esimerkeissä ja tehtävissä viitataan laskimeen, tällä tarkoitetaan minkä tahansa tehtävän ratkaisemiseen sopivan teknisen apuvälineen käyttöä.

◗ Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Luvuissa on huomioitu teknisen apuvälineen tarjoamat mahdollisuudet ohjelaatikoiden avulla. Niissä kerrotaan, millaisia toimintoja tehtävän ratkaisemisen avuksi esimerkiksi laskimista voi löytyä.

1 Kertausta geometriasta

Tavoitteena on

- kerrata tasokuvioiden ja avaruuskappaleiden ominaisuuksia
- kerrata tasokuvioiden piirien ja pinta-alojen laskeminen
- kerrata avaruuskappaleiden pinta-alan ja tilavuuden laskeminen
- oppia piirtämään kuvioista ja kappaleista mallikuvia.

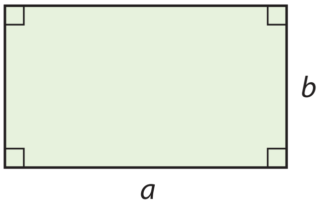
- Miten lasketaan tasokuvion piiri ja pinta-ala?
  - kolmio
  - nelikulmio
  - ympyrä
- Miten lasketaan avaruuskappaleen pinta-ala ja tilavuus?
  - lieriö
  - kartio
  - pallo
- Miten muodostetaan ja ratkaistaan geometrisiin kuvioihin ja kappaleisiin liittyviä yhtälöitä?

- Miten muodostetaan ja ratkaistaan geometrisiin kuvioihin ja kappaleisiin liittyviä yhtälöitä?
  - piiri
  - pinta-ala
  - tilavuus
- Miten piirretään mallikuvia kuvioista ja kappaleista?
  - kulmien piirtäminen
  - tasokuvioiden piirtäminen
  - avaruuskappaleiden piirtäminen
  - korkeusjanan piirtäminen
  - lähtötietojen merkitseminen kuvaan

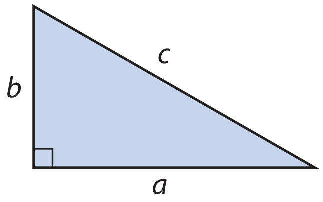
1.1 Monikulmioita

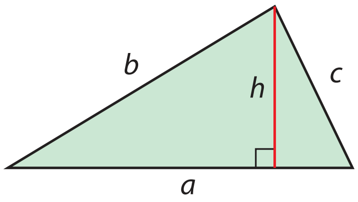
Pohdinta

a) Muodosta lauseke suorakulmion piirille ja pinta-alalle.

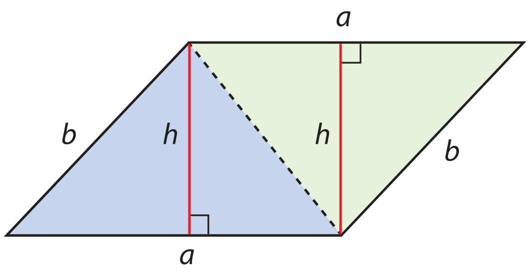


b) Muodosta lauseke kolmioiden piirille ja pinta-alalle.

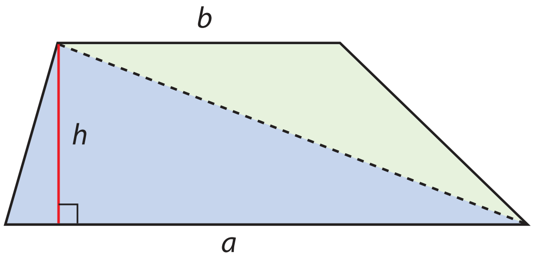




c) Suunnikas voidaan jakaa kahdeksi kolmioksi. Johda kuvion avulla lauseke suunnikkaan pinta-alalle.



d) Johda kuvion avulla lauseke puolisuunnikkaan pinta-alalle.



Harjoittele piirtämään erilaisia mallikuvia sitä mukaa kuin kurssilla tulee uusia kuvioita tai kappaleita.

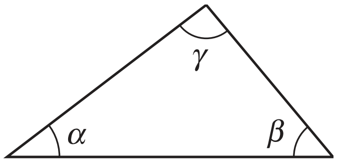
Tasogeometriassa tarkastellaan erilaisia kuvioita, niihin liittyviä pituuksia, pinta-aloja sekä kulmia. Geometrisiin kuvioihin liittyy usein ominaisuuksia, jotka pitää tuntea ennen kuin tehtävän pystyy ratkaisemaan. Kuvioihin liittyviä ominaisuuksia tarvitaan laskutehtävien lisäksi mallikuvioiden piirtämisessä. Mallikuviot on osattava piirtää myös teknisen apuvälineen avulla.

Kerrataan lyhyesti erilaisiin monikulmioihin liittyviä ominaisuuksia ja laskukaavoja.

Kolmio on yksinkertaisin monikulmio.

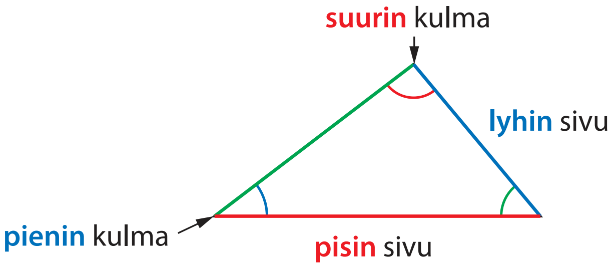
- Kolmion **kulmien summa** on 180°.

Lisämateriaali: Erilaisia kulmia s. 165

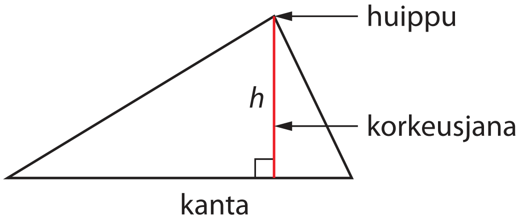


$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

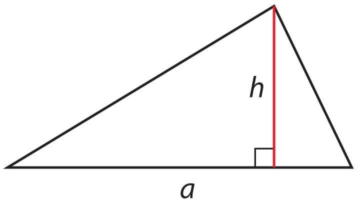
- Kolmion kulmat ja sivut sijaitsevat toisiinsa nähden tietyssä järjestyksessä. Pienimmän kulman vastainen sivu on lyhin ja suurimman kulman vastainen sivu on pisin.



- Kolmion **korkeusjana** *h* on kolmion **huipusta kantaa** vastaan piirretty kohtisuora jana.



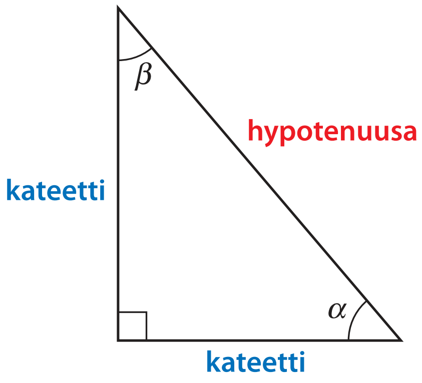
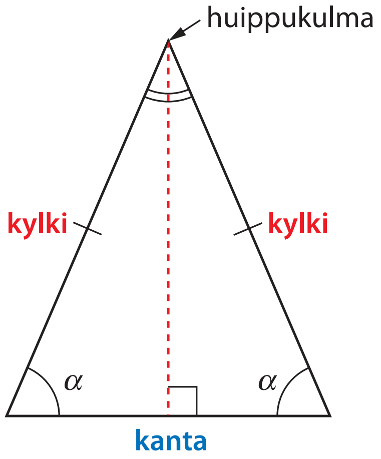
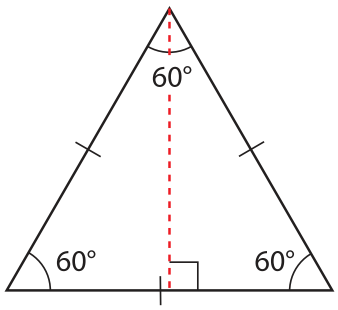
- Kolmion **pinta-ala** saadaan kannan ja korkeuden tulon avulla.



Kolmion pinta-ala

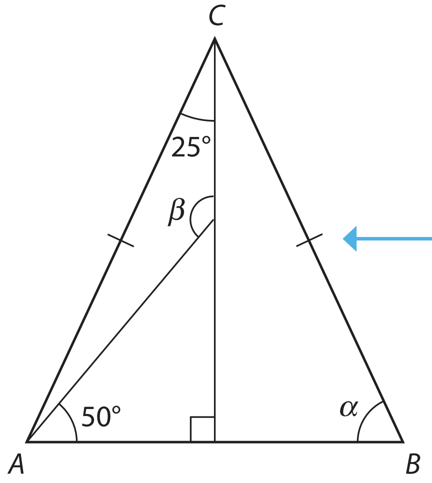
$A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ah$

Seuraavaan taulukkoon on koottu muutamia tärkeitä kolmioita sekä niihin liittyviä ominaisuuksia.

Kolmio	Ominaisuuksia
Suorakulmainen kolmio  β hypotenuusa kateetti α kateetti	• Kolmiossa on yksi 90 asteen kulma. • Kolmion kaksi muuta kulmaa (α ja β) ovat **teräviä**. • Pisintä sivua kutsutaan **hypotenuusaksi**. • Kaksi muuta sivua ovat **kateetteja**. • Kateetit ovat suoran kulman **kylkiä**.
Tasakylkinen kolmio  huippukulma kylki kylki α α kanta	• Kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua. • Yhtä pitkiä sivuja kutsutaan **kyljiksi**, kolmas sivu on kolmion **kanta**. • **Kantakulmat** (α) ovat yhtä suuret. • **Huipusta** piirretty korkeusjana puolittaa sekä **huippukulman** että kannan.
Tasasivuinen kolmio 	• Kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. • Kolmion kaikki kulmat ovat 60°. • Korkeusjana puolittaa sekä huippukulman että kannan.

ESIMERKKI 1

Ratkaise kulmat α ja β, kun kolmio ABC on tasakylkinen.



Keskenään yhtä pitkät sivut voidaan merkitä kuvaan pienillä poikkiviivoilla.

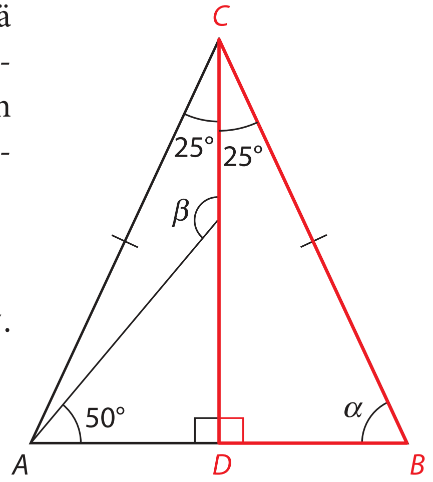
RATKAISU

Tarkasteltavaan kolmioon on helpompi viitata, kun nimeää kuvion kärkipisteet.

Tarkastellaan tasakylkisen kolmion sisällä olevaa suorakulmaista kolmiota *DBC*. Korkeusjana *CD* puolittaa tasakylkisen kolmion huippukulman, joten kolmion *DBC* huippukulma on 25°.
Kolmion kulmien summa on 180°.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä α.

$$\begin{aligned} \alpha + 25° + 90° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 25° - 90° \\ \alpha &= 65° \end{aligned}$$



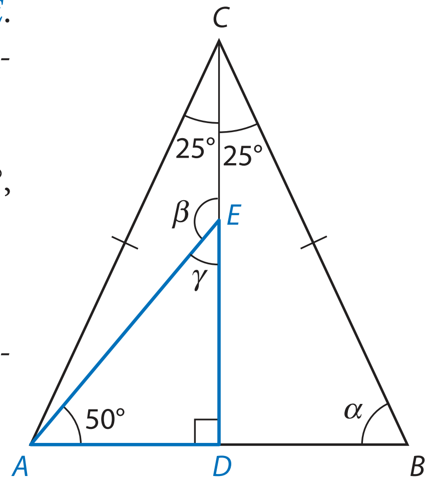
Tarkastellaan seuraavaksi kolmiota *ADE*. Merkitään kolmion huippukulmaa kirjaimella γ.

Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin

$$\gamma = 180° - 50° - 90° = 40°.$$

Kulmat β ja γ muodostavat yhdessä oikokulman.

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= 180° \\ \beta + 40° &= 180° \\ \beta &= 180° - 40° \\ \beta &= 140° \end{aligned}$$



Lisämateriaali: Erilaisia kulmia s. 165

VASTAUS $\alpha = 65°,\ \beta = 140°$

ESIMERKKI 2

Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 2 cm pidempi kuin toinen. Laske kateettien pituudet, kun kolmion

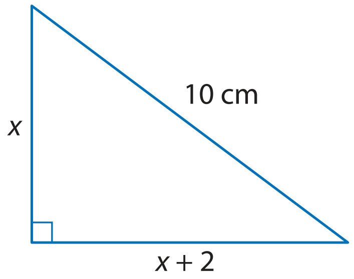
a) hypotenuusan pituus on 10 cm ja kolmion piiri on 24 cm

b) pinta-ala on 12 cm^2.

RATKAISU

Tehtävän voi ratkaista ilman mallikuvaa. Tällöin on muistettava selittää kateeteille käytetyt merkinnät.

a) Merkitään lyhyemmän kateetin pituutta kirjaimella x. Tällöin pidemmän kateetin pituutta kuvaa lauseke $x + 2$.



Kolmion piiri on 24 cm. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

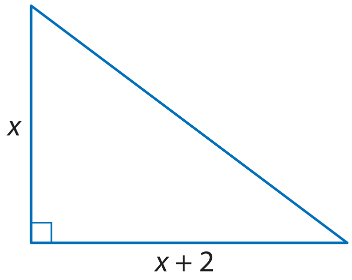
$$x + x + 2 + 10 = 24$$

$$2x = 12 \quad \Big| :2$$

$$x = 6$$

Kateettien pituudet ovat 6 cm ja 6 cm + 2 cm = 8 cm.

b) Kolmion pinta-ala on 12 cm^2. Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan se.



Kolmion pinta-ala

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$\frac{x \cdot (x + 2)}{2} = 12 \qquad \Big| \cdot 2$$

$$x(x + 2) = 24$$

$$x^2 + 2x = 24$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1}$$

Ratkaisukaava

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 1,\ b = 2,\ c = -24$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 10}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 10}{2} = -6$$

Koska kolmion sivun pituus on aina positiivinen, $x = 4$ (cm).

Kateettien pituudet ovat 4 cm ja 4 cm + 2 cm = 6 cm.

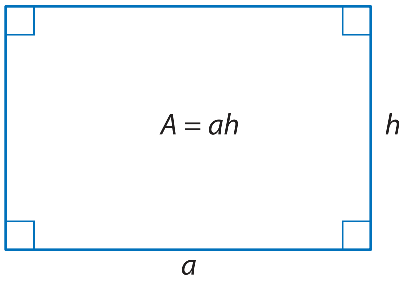
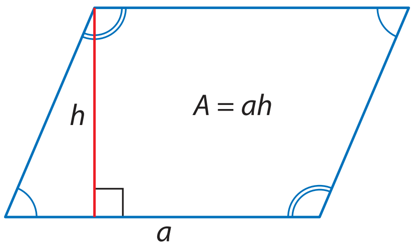
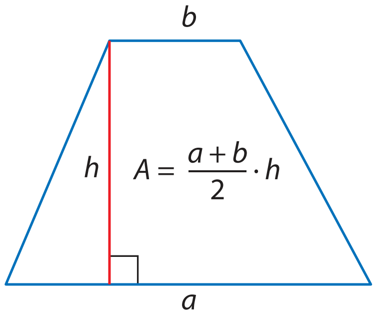
VASTAUS

a) Kateettien pituudet ovat 6 cm ja 8 cm.

b) Kateettien pituudet ovat 4 cm ja 6 cm.

Lisämateriaali: Säännölliset monikulmiot s. 171

Kaikki nelikulmiot voidaan jakaa lävistäjällä kahdeksi kolmioksi. Tästä syystä nelikulmion kulmien summa on 2 · 180° = 360°.

Nelikulmio	Ominaisuuksia
Suorakulmio 	• Kaikki kulmat ovat 90 asteen kulmia. • Vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä. • **Neliö** on suorakulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.
Suunnikas 	• Vastakkaiset sivut yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia. • Vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria. • Suunnikkaan korkeus on yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys. • **Neljäkäs** on suunnikas, jossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.
Puolisuunnikas 	• Kaksi sivuista yhdensuuntaisia. • Kaikki sivut voivat olla eri pituisia ja kulmat eri suuruisia. • Puolisuunnikkaan korkeus on yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys. • **Tasakylkisen puolisuunnikkaan** erisuuntaiset sivut ovat yhtä pitkiä. Kantakulmat ovat keskenään yhtä suuria, samoin kannan vastaiset kulmat.

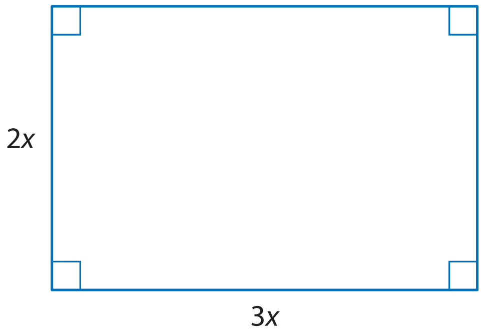
ESIMERKKI 3

Suorakulmion erisuuntaisten sivujen suhde on 2 : 3. Laske suorakulmion pinta-ala, kun suorakulmion piiri on 300 m. Anna vastaus aareina.

RATKAISU

Käytetään erisuuntaisille sivuille merkintöjä $2x$ ja $3x$.

Sivujen suhde
$\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{2}{3} = 2:3$



Muodostetaan piirin avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3x &= 300 \\ 4x + 6x &= 300 \\ 10x &= 300 \quad \Big| :10 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Suorakulmion erisuuntaiset sivut ovat:
- 2 · 30 m = 60 m
- 3 · 30 m = 90 m.

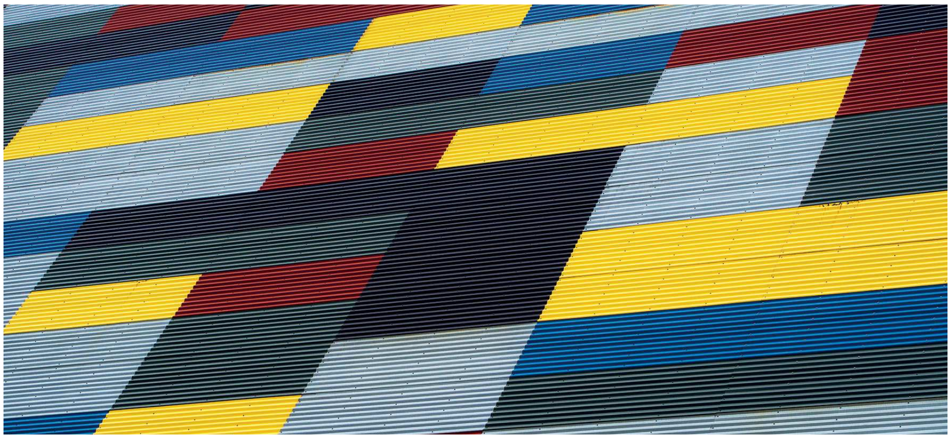
Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

Lisämateriaali: Yksikkömuunnokset s. 160

$$60 \text{ m} \cdot 90 \text{ m} = 5400 \text{ m}^2 = 54 \text{ a}$$

VASTAUS

Suorakulmion pinta-ala on 54 a.

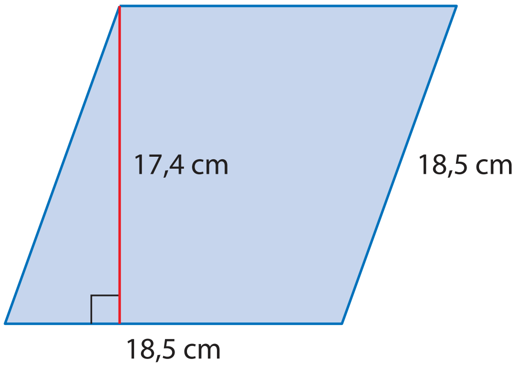


ESIMERKKI 4

Tommi tarvitsee origamin taitteluun tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoisen paperin. Hänellä on neljäkkään muotoinen paperi, jonka sivun pituus on 18,5 cm ja korkeus 17,4 cm. Tommi leikkaa neljäkkään toisesta reunasta pois kolmion muotoisen palan, jolloin hän saa tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoisen paperin. Tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisista sivuista lyhyemmän pituus on 5,9 cm. Kuinka monta prosenttia paperin pinta-ala pienenee?

RATKAISU

Lasketaan ensin alkuperäisen neljäkkään muotoisen paperin pinta-ala.

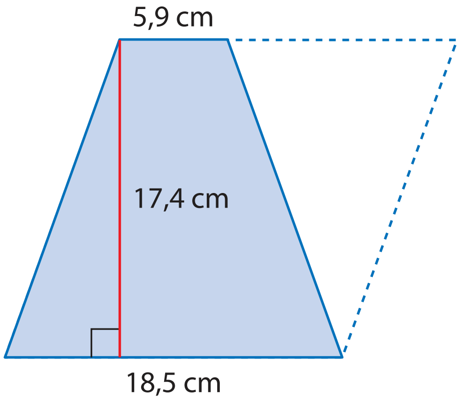


Suunnikkaan pinta-ala
$A = ah$

$$A_{\text{neljäkäs}} = 18{,}5\text{ cm} \cdot 17{,}4\text{ cm} = 321{,}9\text{ cm}^2$$

Lasketaan tasakylkisen puolisuunnikkaan pinta-ala.

- Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus on sama kuin neljäkkään korkeus eli 17,4 cm.
- Tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 18,5 cm ja 5,9 cm.



Puolisuunnikkaan pinta-ala
$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$

$$A_{\text{puolisuunnikas}} = \frac{18{,}5\text{ cm} + 5{,}9\text{ cm}}{2} \cdot 17{,}4\text{ cm} = 212{,}28\text{ cm}^2$$

Verrataan tasakylkisen puolisuunnikkaan pinta-alaa alkuperäisen neljäkkään pinta-alaan.

$$\frac{212{,}28\text{ cm}^2}{321{,}9\text{ cm}^2} = 0{,}65945\ldots = 65{,}945\ldots\ \%$$

Pinta-ala pienenee

$$100\ \% - 65{,}945\ldots\ \% = 34{,}054\ldots \approx 34\ \%.$$

VASTAUS Pinta-ala pienenee 34 %.

Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Mallikuvan piirtäminen

Mallikuvia varten tulee osata piirtää erilaisia kolmioita, nelikulmioita sekä säännöllisiä monikulmioita. Opettele piirtämään

- kolmioita: suorakulmainen kolmio, tasakylkinen kolmio, tasasivuinen kolmio
- nelikulmioita: suorakulmio, neliö, suunnikas, puolisuunnikas, tasakylkinen puolisuunnikas
- joku säännöllinen monikulmio, esimerkiksi säännöllinen kuusikulmio.

Kulman piirtäminen

Piirto-ohjelmissa voi piirtää ja mitata erisuuruisia kulmia. Opettele piirtämään kulmia annetun asteluvun mukaan, esim. 40 asteen kulma.

Opettele lisäksi, miten saat piirrettyä kolmion, jonka kulmien suuruudet tunnetaan.

Koordinaatistoa apuna käyttämällä on helppo piirtää esimerkiksi suorakulmaisia kolmioita, jonka kateettien pituudet tunnetaan.

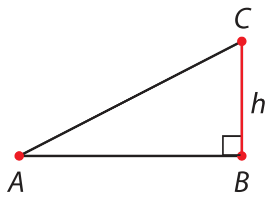
- Aseta suorakulmaisen kolmion suora kulma origoon ja piirrä koordinaattiakselien mukaan oikean pituiset kateetit.

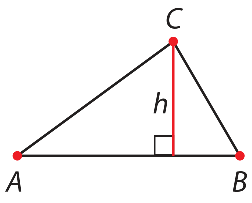
Korkeusjana

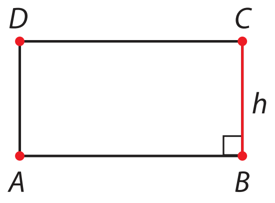
Kuvioihin tulee usein piirtää näkyviin korkeusjana. Korkeusjana saadaan, kun piirretään esimerkiksi kuvion kantasivulle normaali eli kohtisuora jana/suora.

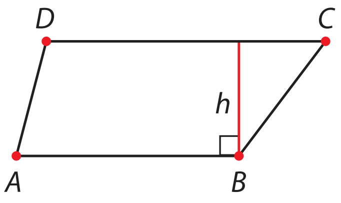
Tietojen merkitseminen mallikuvaan

Tehtävän ratkaisussa on usein tarpeellista viitata mallikuvaan. Nimeä kuvan kärkipisteet ja/tai sivut, jolloin kuvaan viittaaminen on helpompaa.





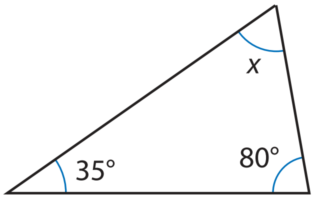




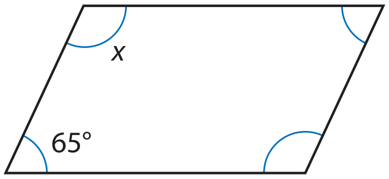
Tehtävät

1. Ratkaise kulma x, kun kuvio on

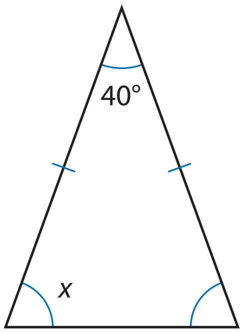
a) kolmio



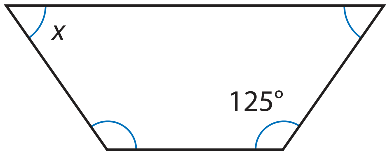
b) suunnikas



c) tasakylkinen kolmio

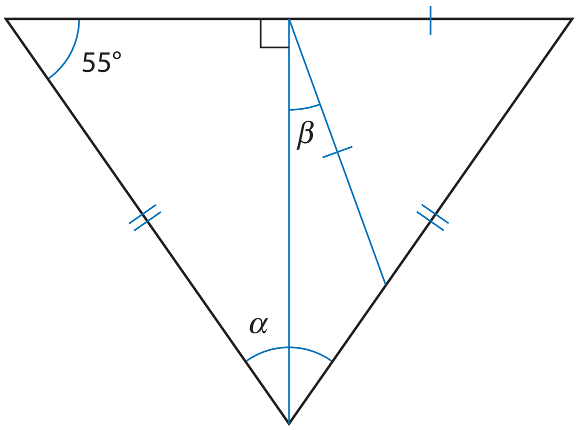


d) tasakylkinen puolisuunnikas.



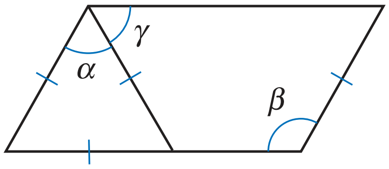
E1

2. Ratkaise kulmat α ja β.

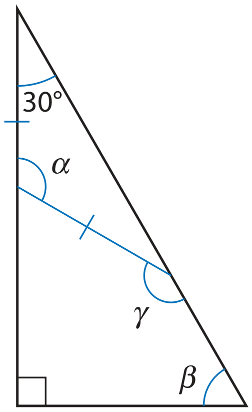


3. Ratkaise α, β ja γ.

a)



b)



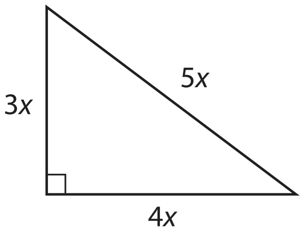
4. **a)** Tasakylkisen kolmion huippukulma on 30° suurempi kuin kantakulma. Laske kolmion kulmien suuruudet.

b) Suorakulmaisen kolmion terävien kulmien suhde on 2 : 7. Laske terävien kulmien suuruudet.

5. Suorakulmaisen kolmion piiri on 48 cm.

a) Laske sivujen pituudet.

b) Laske kolmion pinta-ala.



E2 **6.** Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 7 cm lyhyempi kuin toinen. Laske kateettien pituudet, kun kolmion

a) hypotenuusan pituus on 13 cm ja kolmion piiri on 30 cm

b) pinta-ala on 4,0 cm^2.

7. Kolmio *ABC* on tasakylkinen kolmio.

a) Kolmion *ABC* kanta on 3 cm pidempi kuin kolmion kylki. Laske kolmion sivujen pituudet, kun kolmion piiri on 18 cm.

b) Kolmion *ABC* pinta-ala on 12 cm^2. Kolmion kannan ja korkeuden pituuksien suhde on 1 : 6. Laske kolmion korkeus.

E3 **8.** Suorakulmion erisuuntaisten sivujen pituuksien suhde on 3 : 4. Laske suorakulmion pinta-ala, kun sen piiri on 42 cm.

9. Suorakulmion erisuuntaisista sivuista toinen on 2 cm pidempi kuin toinen. Suorakulmion pinta-ala on 35 cm^2. Laske suorakulmion piiri.

10. **a)** Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat 20° pienempiä kuin kannan vastaiset kulmat. Laske tasakylkisen puolisuunnikkaan kulmien suuruudet.

b) Suunnikkaan kantakulmien suhde on 4 : 5. Laske suunnikkaan erisuuruisten kulmien suuruudet.

11. Tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut ovat 4 cm ja 8 cm. Laske tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus, kun sen pinta-ala on 30 cm^2.

12. Tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen suhde on 1 : 3. Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus on 3 cm ja pinta-ala 12 cm^2. Laske yhdensuuntaisten sivujen pituudet.

13. Piirrä kulma α.

a) $\alpha = 45°$ **b)** $\alpha = 90°$ **c)** $\alpha = 130°$

14. **a)** Piirrä suorakulmainen kolmio *ABC*.

b) Merkitse kolmion kateetteja kirjaimilla *a* ja *b* sekä hypotenuusaa kirjaimella *c*.

15. Piirrä kolmio *ABC*, kun kolmio on

a) tasasivuinen
b) tasakylkinen
c) teräväkulmainen
d) tylppäkulmainen.

Teräväkulmaisessa kolmiossa kaikki kulmat ovat teräviä eli alle 90 asteen kulmia.

Tylppäkulmaisessa kolmiossa on yksi tylppä kulma eli yli 90 asteen kulma.

16. Piirrä edellisen tehtävän kuvioille korkeusjanat. Merkitse korkeusjanoja kirjaimella *h*.

17. Piirrä seuraavat nelikulmiot. Piirrä kuvaan näkyviin korkeusjanat ja merkitse korkeusjanoja kirjaimella *h*.

a) suunnikas
b) puolisuunnikas, jossa on yksi 90 asteen kulma
c) tasakylkinen puolisuunnikas.

E4 **18.** Kaksi puutarhakalusteita myyvää liikettä myy kolmion muotoisia aurinkosuojia terassille. Liikkeen A aurinkosuoja on tasasivuisen kolmion muotoinen, jonka sivun pituus on 3,6 m ja korkeus 3,1 m. Liikkeen B aurinkosuoja on suorakulmaisen kolmion muotoinen. Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 2,8 m.

a) Kuinka monta prosenttia suuremman pinta-alan liikkeen B aurinkosuoja varjostaa liikkeen A aurinkosuojaan verrattuna, jos suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 4,2 m?

b) Kuinka pitkä tulisi liikkeen B aurinkosuojan toisen kateetin olla, jotta molemmat aurinkosuojat varjostaisivat yhtä suuren alueen?

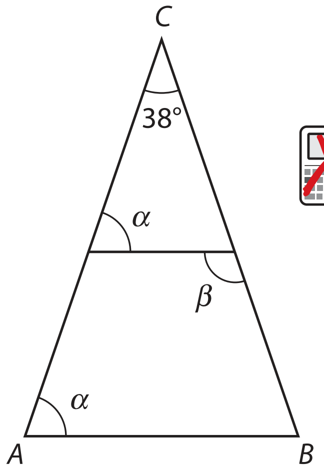
19. Talon katto muodostuu kahdesta tasakylkisestä puolisuunnikkaasta ja kahdesta tasakylkisestä kolmiosta. Puolisuunnikkaan ja kolmion korkeus on 6,0 m. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 15,0 m ja 7,0 m. Kolmion kannan pituus on 8,0 m. Talon katto päällystetään kattotiilillä, joiden hinta on 9,20 €/m^2. Tiiliä tilataan 5 % katon pinta-alaa suuremmalle määrälle. Kuinka paljon katon päällystämiseksi tilattavat tiilet maksavat? Anna vastaus euron tarkkuudella.

20. Versailles'n palatsin puutarhassa on suuri suorakulmion muotoinen nurmialue ”Tapis vert”. Alueen mitat ovat 335 m × 40 m.

a) Kuinka monta kertaa nurmialue tulee vähintään kiertää reunoja pitkin ympäri, jotta kävelymatkan pituus olisi yli 2,5 km?

b) Alueelle kylvetään uusi nurmikko siemenistä. Puutarhuri arvioi, että siemeniä tarvitaan 1,8 kg/a. Kuinka paljon siemeniä tarvitaan alueen nurmikon kylvämiseen?

Sekalaisia



21. Kuvan mukaisessa kolmiossa ABC sivut AC ja BC ovat yhtä pitkät. Määritä kulmat α ja β.

22. Tasakylkisen kolmion kanta on 4 cm pidempi kuin kolmion kylki. Kolmion piiri on 64 cm.

a) Laske kolmion sivujen pituudet.

b) Laske kolmion korkeus, kun sen pinta-ala on 192 cm^2.

23. Tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen suhde on 1 : 5. Puolisuunnikkaan korkeus on yhtä pitkä kuin lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista. Laske puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet, kun sen pinta-ala on 12 cm^2.

24. Piirrä seuraavat tasokuviot. Merkitse kuvion kärkipisteitä sopivilla kirjaimilla ja piirrä kuvioihin näkyviin korkeusjanat. Merkitse korkeusjanaa kirjaimella h.

a) suorakulmainen kolmio

b) tasakylkinen kolmio

c) neljäkäs

d) puolisuunnikas, jossa yksi 60 asteen kulma

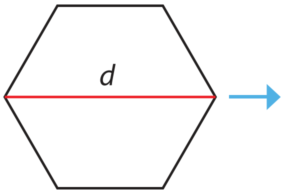
25. Eteisen seinälle tehdään magneettitaulu maalaamalla seinältä suorakulmion muotoinen osa kolmeen kertaan magneettimaalilla. Magneettitaulun leveys on 180 cm ja korkeus 110 cm. Magneettimaalia myydään 0,5 litran purkissa, jonka hinta on 52,90 €. Kuinka paljon maalaamista varten ostettava magneettimaali maksaa, kun yksi litra magneettimaalia riittää 1,4 neliömetrin maalaamiseen?

Tikkurila Oyj

1.2 Ympyrä

Pohdinta

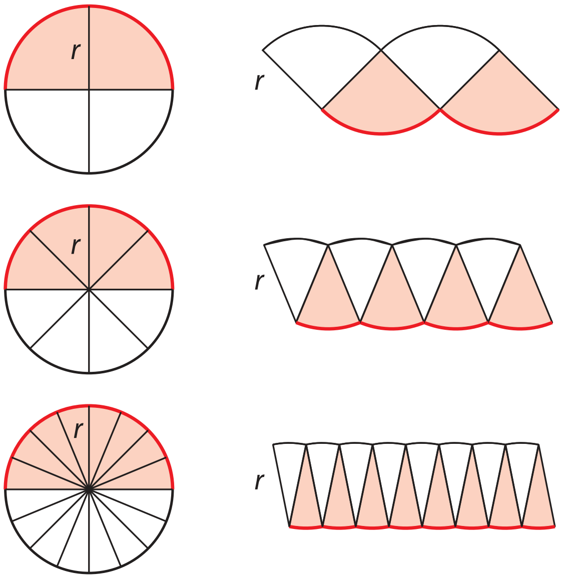
a) Piirrä seuraavat säännölliset monikulmiot teknisen apuvälineen avulla. Mittaa kuvista tarvittavat tiedot ja täydennä taulukko.



Monikulmio	Piiri	Pisimmän lävistäjän pituus *d*	Piirin ja lävistäjän suhde
6-kulmio			
8-kulmio			
10-kulmio			
16-kulmio			

- Mitä havaintoja voit tehdä piirien ja lävistäjien suhteista?

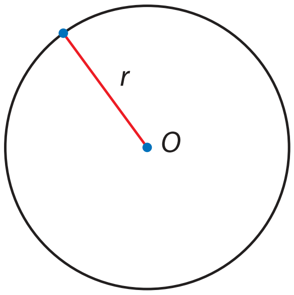
b) Kaikkien alla olevien ympyröiden säde on *r*. Ympyrät on jaettu sektoreihin ja levitetty kuvien mukaisesti.

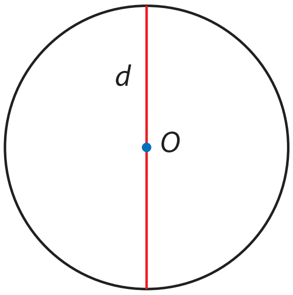


- Mikä on kaikissa ympyröissä punaisella merkityn osan pituus?
- Kun sektoreiden määrä kasvaa, mitä kuviota sektoreiden muodostama kuvio alkaa muistuttaa?
- Mitä arvoa edellä mainitun kuvion korkeus lähestyy?
- Mitä arvoa kuvion pinta-ala lähestyy?

Ympyrän kehän pituus ja ympyrän pinta-ala

Ympyrä on niiden tason pisteiden joukko, joiden etäisyys annetusta pisteestä O on vakio. Tämä pistejoukko muodostaa ympyrän piirin eli **kehän**. Kehän pituutta merkitään kirjaimella p. Piste O on **ympyrän keskipiste**. Sen etäisyys ympyrän kehästä on ympyrän **säde** r.





Ympyrän halkaisija on jana, joka yhdistää kaksi kehän pistettä ja kulkee ympyrän keskipisteen kautta. Halkaisijan pituutta merkitään usein kirjaimella d. Halkaisijan pituus on kaksi kertaa säteen pituus.

$$d = 2 \cdot r$$

Ympyrän kehän pituuden ja halkaisijan pituuden suhde on vakio. Tämä vakio on irrationaaliluku π. Piin likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella on 3,14. Laskuissa käytetään kuitenkin tarkkaa arvoa π.

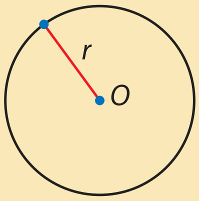
$$\frac{p}{d} = \pi \approx 3{,}14$$

Ympyrän kehän pituus ja ympyrän pinta-ala riippuvat ainoastaan säteen pituudesta r.

Ympyrän kehän pituus *p* ja ympyrän pinta-ala

$p = 2\pi r = \pi d$ $A = \pi r^2$

- r on ympyrän säde.



ESIMERKKI 1

Määritä tarkka arvo

a) ympyrän kehän pituudelle ja pinta-alalle, kun ympyrän halkaisija on 6

b) ympyrän säteelle, kun ympyrän pinta-ala on 25.

RATKAISU

a) Kehän pituus on halkaisijan ja piin tulo:

$$p = d \cdot \pi = 6 \cdot \pi = 6\pi$$

Irrationaaliluvulle π ei voida esittää tarkkaa arvoa numeerisessa muodossa.

Pinta-alan laskemiseen tarvitaan ympyrän säde. Lasketaan säde halkaisijan avulla.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

b) Muodostetaan ympyrän pinta-alan kaavaa käyttäen yhtälö, josta säde voidaan ratkaista.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 25 \qquad \qquad \Big| : \pi \\ r^2 &= \frac{25}{\pi} \\ r &= \pm\sqrt{\frac{25}{\pi}} \\ r &= \pm\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{\pi}} \\ r &= \pm\frac{5}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Neliöjuuri voidaan laskea erikseen osoittajasta ja nimittäjästä.

Säteen pituus ei voi olla negatiivinen luku, joten $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

VASTAUS **a)** $p = 6\pi$, $A = 9\pi$ **b)** $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$

ESIMERKKI 2

Mars-planeetan kaksi kuuta, Phobos ja Deimos, kiertävät planeettaa likimain ympyrän muotoisilla radoilla. Phoboksen kiertoradan pituus on 58 900 km ja Deimoksen 147 400 km.

a) Laske kuiden kiertoratojen välinen etäisyys.

b) Määritä kahden kuun välinen etäisyys suurimmillaan.

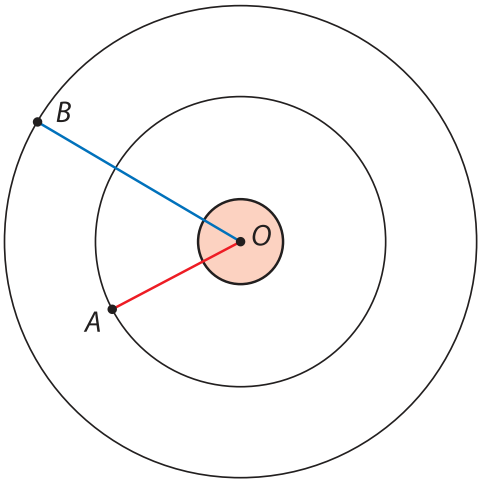
RATKAISU

a) Lasketaan kuiden kiertoratojen säteet. Phoboksen kiertoradan sädettä esittää jana *OA*. Merkitään sen pituutta kirjaimella *x*. Deimoksen kiertoradan säde on jana *OB*. Merkitään sen pituutta kirjaimella *y*.

Käytä laskimesta π:n tarkkaa arvoa.

$$2\pi x = 58\,900$$
$$x = 9374{,}2\ldots$$

$$2\pi y = 147\,400$$
$$y = 23\,459{,}4\ldots$$



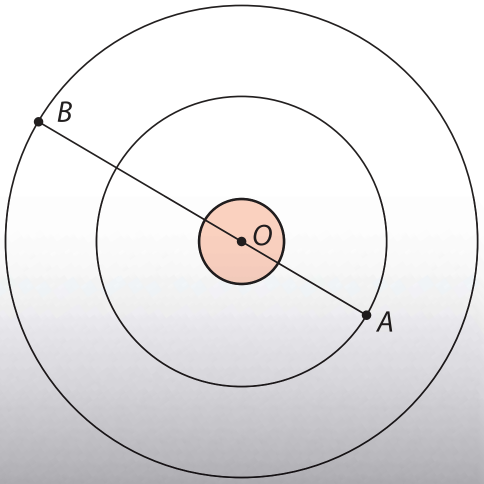
Kiertoratojen välinen etäisyys lasketaan vähentämällä janan *OB* pituudesta janan *OA* pituus.

Käytä laskuissa tarkkoja arvoja. Kopioi aikaisemmin saatu tulos tai käytä ans-toimintoa.

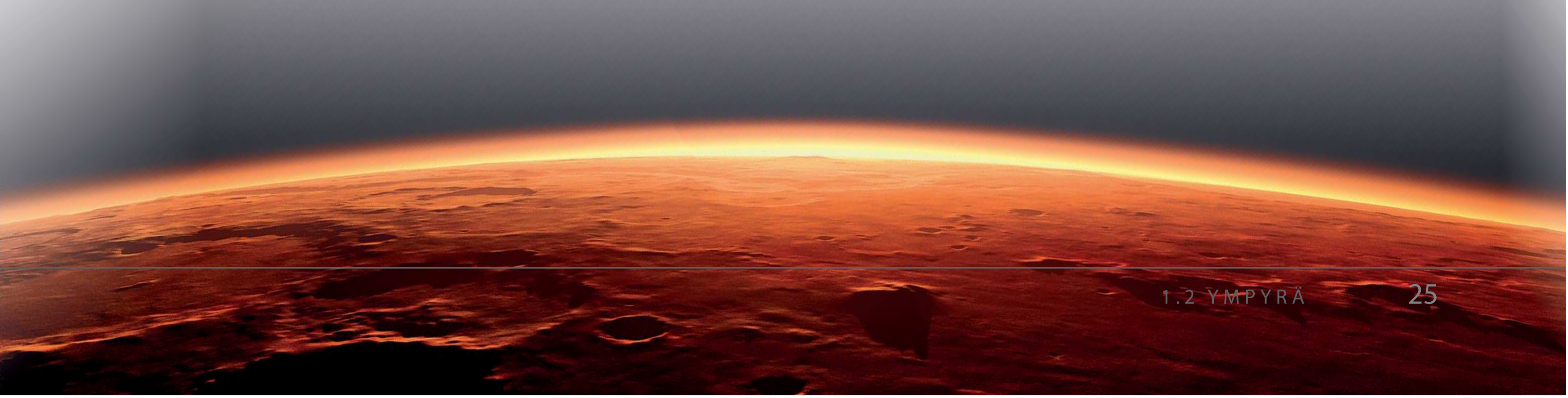
$$23\,459{,}4\ldots\text{ km} - 9374{,}2\ldots\text{ km} \approx 14\,100\text{ km}$$

b) Kuiden välinen etäisyys on suurimmillaan silloin, kun ne ovat planeetan vastakkaisilla puolilla. Etäisyys on tällöin janojen *OA* ja *OB* pituuksien summa.

$$23\,459{,}4\ldots\text{ km} + 9374{,}2\ldots\text{ km}$$
$$\approx 32\,800\text{ km}$$



VASTAUS **a)** 14 100 km **b)** 32 800 km



ESIMERKKI 3

Käsinkudotun villamaton laatu riippuu villan ja värien laadusta ja maton solmutiheydestä. Pyöreässä villamatossa oli 3 400 000 solmua. Maton solmutiheys oli 480 000 solmua neliömetrin alueella. Laske maton halkaisijan pituus. Anna vastaus desimetreinä.

RATKAISU

Määritetään maton pinta-ala solmujen määrän avulla.

$$\frac{3\,400\,000 \text{ solmua}}{480\,000 \ \frac{\text{solmua}}{\text{m}^2}} = 7{,}083\ldots \text{ m}^2$$

Muunnetaan maton pinta-ala neliödesimetreiksi.

$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$

$$7{,}083\ldots \text{ m}^2 = 7{,}083\ldots \cdot 100 \text{ dm}^2 = 708{,}3\ldots \text{ dm}^2$$

Merkitään maton säteen pituutta kirjaimella r. Muodostetaan yhtälö, josta säde voidaan ratkaista.

$$\pi r^2 = 708{,}3\ldots$$
$$r = \pm 15{,}01\ldots$$

Säde ei voi olla negatiivinen luku, joten $r = 15{,}01\ldots$ (dm).

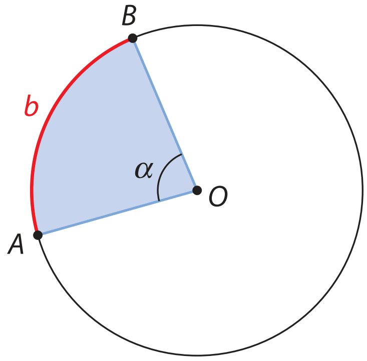
Maton halkaisija on tällöin $2 \cdot 15{,}01\ldots \text{ dm} \approx 30 \text{ dm}$.

VASTAUS

Maton halkaisija on 30 dm.

Ympyrän sektori

Säteet *OA* ja *OB* erottavat ympyrästä osan, jota kutsutaan **sektoriksi**. Sektorin kulmaa α sanotaan **keskuskulmaksi**. Pisteet *A* ja *B* erottavat kehältä osan, jota sanotaan **kaareksi**. Sektorin kaaren pituutta merkitään usein kirjaimella *b*.



Kaaren pituus ja sektorin pinta-ala riippuvat keskuskulmasta ja ympyrän säteestä. Kun keskuskulmaa suurennetaan, sektorin kaaren pituus sekä sektorin pinta-ala kasvavat samassa suhteessa. Keskuskulma ja kaaren pituus sekä pinta-ala ovat siis suoraan verrannollisia.

Jos ympyrän sädettä merkitään kirjaimella *r* ja keskuskulmaa kirjaimella α, voidaan kaaren pituudelle *b* ja keskuskulmalle muodostaa verranto.

Pituus	Keskuskulma
ympyrän kehän pituus $2\pi r$	ympyrän asteluku $360°$
sektorin kaaren pituus b	sektorin keskuskulma α

$$\frac{2\pi r}{b} = \frac{360°}{\alpha}$$

$$360°\, b = \alpha \cdot 2\pi r \qquad \Big| :360°$$

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

Vastaavalla tavalla voidaan määrittää kaava sektorin pinta-alalle.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Sektorin kaaren pituus *b* ja sektorin pinta-ala A_{sektori}

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \qquad A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

- α on sektorin keskuskulma.
- r on ympyrän säde.

ESIMERKKI 4

Trivial Pursuit -pelissä kerätään ympyräsektorin muotoisia pelimerkkejä, joita pelaaja saa vastattuaan kysymykseen oikean. Sektorin keskuskulma on 60°. Pelaaja on saanut kasaan neljä pelimerkkiä. Ympyrän säteen pituus on 1,1 cm. Laske pelimerkeistä muodostuneen sektorin

a) kaaren pituus

b) pinta-ala.

RATKAISU

a) Neljä pelimerkkiä muodostaa sektorin, jonka keskuskulma on $4 \cdot 60° = 240°$.

Merkeistä muodostuneen sektorin kaaren pituus on siis

$$b = \frac{240°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1{,}1 \text{ cm} = 4{,}607\ldots \text{ cm} \approx 4{,}6 \text{ cm}$$

b) Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{240°}{360°} \cdot \pi \cdot (1{,}1 \text{ cm})^2 = 2{,}534\ldots \text{ cm}^2 \approx 2{,}5 \text{ cm}^2$$

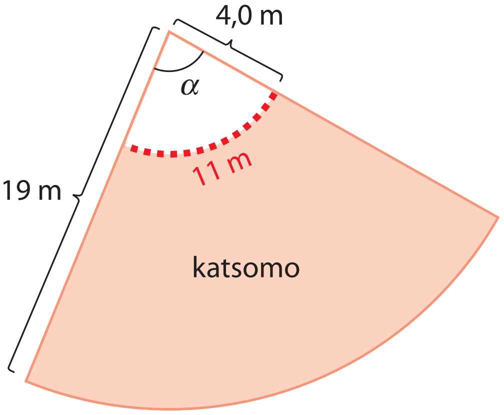
VASTAUS

a) 4,6 cm **b)** $2{,}5 \text{ cm}^2$

ESIMERKKI 5

Teatterin katsomon penkit on sijoitettu tilaan siten, että katsomon muoto on osa ympyräsektoria, kun ympyrän keskipiste on näyttämön reunassa. Ensimmäinen penkkirivi sijaitsee 4,0 metrin päässä näyttämöstä ja penkkirivin pituus on 11 m. Viimeinen rivi sijaitsee 19 metrin päässä näyttämöstä. Laske katsomon pinta-ala.

RATKAISU Pinta-alan laskemiseen tarvitaan sektorin keskuskulma. Merkitään sitä kirjaimella α.



Koska pienemmän sektorin kaaren pituus ja säteen pituus tunnetaan, α voidaan ratkaista yhtälön avulla.

$$11 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4{,}0 \longleftarrow \boxed{b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r}$$

$$\alpha = 157{,}56\ldots°$$

Suuremman sektorin ala on

$$\boxed{A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2} \longrightarrow A_1 = \frac{157{,}56\ldots°}{360°} \cdot \pi \cdot (19\text{ m})^2 = 496{,}37\ldots\text{ m}^2$$

Pienemmän sektorin ala on

$$A_2 = \frac{157{,}56\ldots°}{360°} \cdot \pi \cdot (4{,}0\text{ m})^2 = 21{,}99\ldots\text{ m}^2$$

Katsomon pinta-ala on tällöin

$$A_1 - A_2 = (496{,}37\ldots - 21{,}99\ldots)\text{ m}^2 \approx 470\text{ m}^2.$$

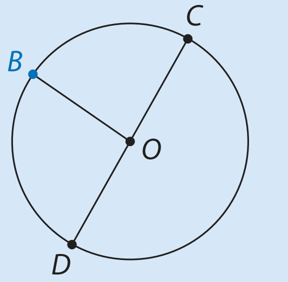
VASTAUS 470 m^2

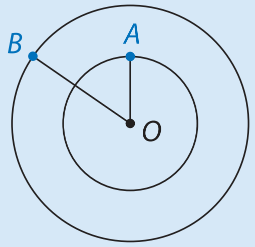
Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Mallikuvan piirtäminen

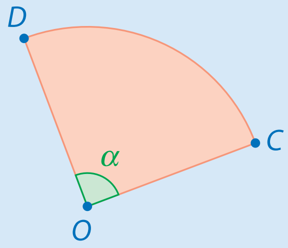
Mallikuvia varten tulee osata piirtää erilaisia ympyröitä ja sektoreita. Opettele piirtämään

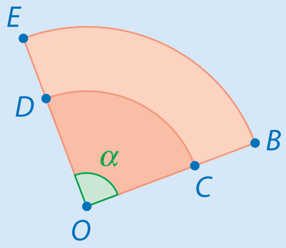
- ympyrä keskipisteen ja kehäpisteen avulla
- kaksi erikokoista ympyrää, joilla on sama keskipiste
- ympyrän säde ja ympyrän halkaisija





- sektori kolmen pisteen avulla
- kaksi sisäkkäistä sektoria, joilla sama keskuskulma
- sektorin kaari kolmen pisteen avulla.





Tietojen merkitseminen mallikuvaan

Tehtävän ratkaisussa on usein tarpeellista viitata mallikuvaan. Nimeä kuvaan ympyrän keskipiste ja tarvittavat kehäpisteet, kuten esimerkiksi säteen tai halkaisijan päätepisteet kehällä. Nimeä myös sektorin kaaren päätepisteet, jolloin kaareen voi viitata päätepisteiden avulla.

Tehtävät

Ympyrän kehän pituus ja ympyrän pinta-ala

26. Laske ympyrän kehän pituuden tarkka arvo, kun säteen pituus on

a) 4 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** π.

27. Laske ympyrän pinta-alan tarkka arvo, kun halkaisijan pituus on

a) 14 **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{\pi}{2}$.

E1

28. Määritä tarkka arvo

a) ympyrän kehän pituudelle ja pinta-alalle, kun säteen pituus on 10

b) ympyrän halkaisijan pituudelle, kun ympyrän pinta-ala on 36.

---

29. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on O.

a) Piirrä ympyrälle säde OA.

b) Piirrä ympyrälle halkaisija AB.

30. Piirrä ympyrä.

a) Piirrä ympyrälle säde ja määritä kuvan avulla säteen pituus.

b) Laske ympyrän halkaisija.

c) Laske kehän pituus.

d) Laske ympyrän pinta-ala.

Tarkista kuvan avulla kohtien b–d vastaukset.

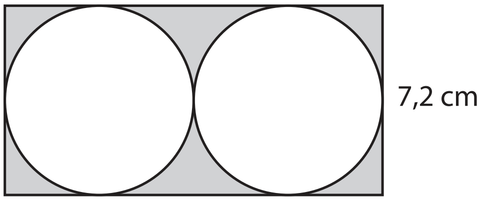
31. Piirrä kaksi erikokoista ympyrää, joilla on sama keskipiste. Merkitse isomman ympyrän sädettä kirjaimella R ja pienemmän ympyrän sädettä kirjaimella r.

32. Ympyrän säde on 13,2 cm. Laske ympyrän

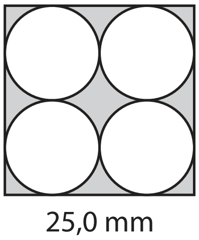
a) kehän pituus **b)** pinta-ala.

33. Laske väritetyn alueen pinta-ala.

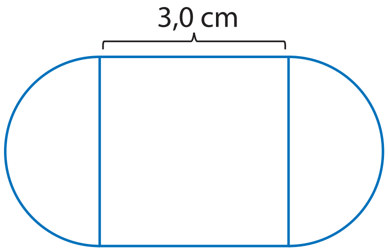
a)



b)



34. Kuvio muodostuu neliöstä ja kahdesta puoliympyrästä. Määritä kuvion piiri ja pinta-ala.



35. Sandro Botticellin maalaus ”The adoration of the kings” on esillä Lontoossa Kansallisgalleriassa. Maalaus on ympyrän muotoinen ja sen halkaisija on 130,8 cm. Laske maalauksen

a) ympärysmitta **b)** pinta-ala.

36. Ympyrän kehän pituus on 75 cm. Määritä

a) halkaisijan pituus **b)** ympyrän pinta-ala.

37. Alvar Aalto suunnitteli vuonna 1935 pyöreän, koivusta valmistetun pöydän. Pöydän ympärysmitta on 314 cm. Laske pöydän pinta-ala.

E2 **38.** Myllynkivikaulus on pyöreä, poimutettu röyhelökaulus, jota käytettiin Euroopassa 1500-luvulla. Englannin kuningattaren Elisabeth I:n puvuissa oli massiivisia myllynkivikauluksia. Erään puvun kauluksen kaula-aukon ympärysmitta oli 35 cm. Kauluksen ulkoympärysmitta oli 85 cm. Kuinka leveä kaulus oli?

39. Määritä ympyrän halkaisijan pituus, kun ympyrän pinta-ala on

a) 230 cm^2 **b)** 12,6 m^2.

E3 **40.** Pantheon on antiikinaikainen rakennus Roomassa. Pantheonissa on maailman suurin raudoittamattomasta betonista valmistettu kupoli. Kupolin huipussa on avoin, ympyrän muotoinen kattoikkuna ”oculus”, jonka pinta-ala on 63,6 m^2. Laske oculuksen ympärysmitta.

41. Hattulan kunnassa sijaitseva Lehijärvi on likimain ympyrän muotoinen. Sen pinta-ala on noin 700 hehtaaria. Laske järven halkaisija. Anna vastaus kilometreinä kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

42. Neliön piiri on yhtä pitkä kuin ympyrän kehä.

a) Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on pienempi kuin ympyrän pinta-ala?

b) Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on suurempi kuin neliön pinta-ala?

Anna vastaukset prosentin kymmenesosan tarkkuudella. [K2013, 9]

Ympyrän sektori

43. Piirrä sektori, jonka keskuskulma on

a) alle 90° **b)** 140° **c)** 230°.

44. Piirrä ympyräsektori ja määritä kuvan avulla

a) säde

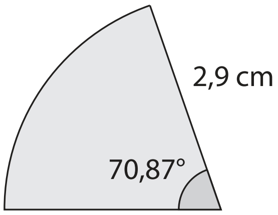
b) sektorin keskuskulma

c) sektorin kaarenpituus.

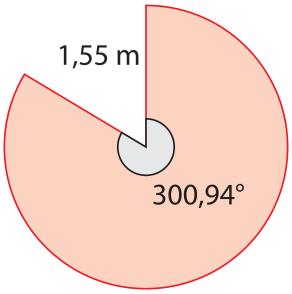
45. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste sijaitsee origossa ja jonka kehä kulkee pisteen (5, 0) kautta. Valitse kehältä kaksi pistettä. Piirrä se sektori, jonka rajaisivat mainittuihin pisteisiin piirretyt säteet. Määritä kuvan avulla tämän sektorin keskuskulma.

46. Laske sektorin kaaren pituus ja pinta-ala.

a)



b)



E4 **47.** Pyöreästä pitsasta leikataan sektorin muotoinen pala. Sektorin keskuskulma on 25°. Pitsan halkaisija on 34 cm.

a) Laske pitsapalan pinta-ala.

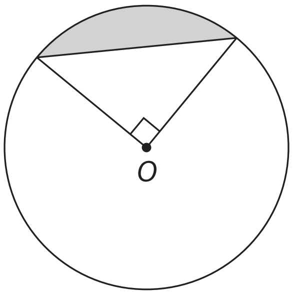
b) Kuinka monta senttimetriä täytteetöntä ulkoreunaa pitsapalaan tulee?

48. Avonaiseksi levitetty viuhka on muodoltaan ympyrän sektori. Säteen pituus on 24 cm ja sektorin keskuskulma on 75°.

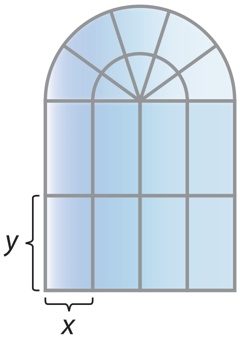
a) Laske viuhkan pinta-ala.

b) Viuhkan yläreunaan ommellaan silkistä valmistettu nauha. Kuinka monta senttimetriä nauhaa tarvitaan?

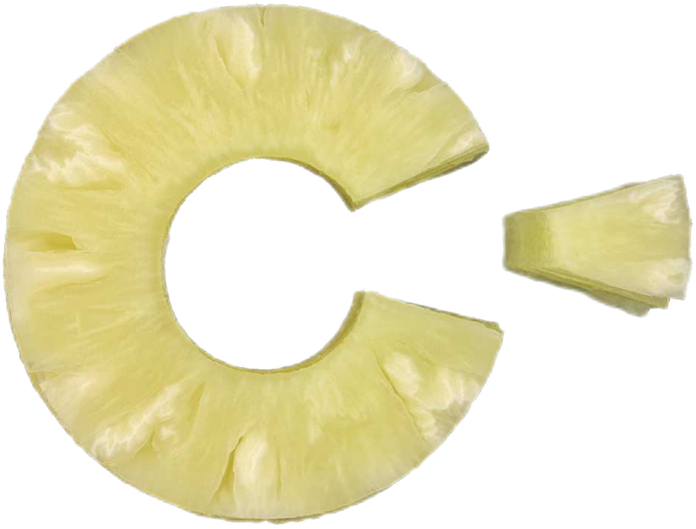
49. Kuvan ympyrän säde on 13 cm. Laske väritetyn alueen pinta-ala.

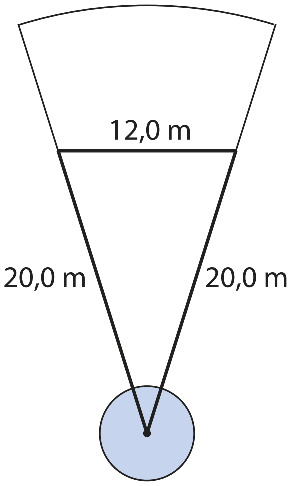


50. Kuvan kaari-ikkunassa on lasin tukena rimoja. Kuinka paljon rimaa tarvitaan kuvan mukaiseen kaari-ikkunaan, kun $x = 20$ cm ja $y = 40$ cm? Rimaa käytetään kaikkiin kuvion janoihin ja puoliympyröiden kaariin. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. [S2013, 4]



E5 **51.** Ananasrenkaasta on leikattu pala kuvan mukaisesti. Leikatun palan ulkoreunan pituus on 4,4 cm. Renkaan leveys on 3,2 cm ja renkaan sisällä olevan aukon halkaisija on 3,4 cm. Laske leikatun palan pinta-ala.





52. Kuulan, kiekon ja moukarin putoamisalue on muodoltaan osa ympyräsektoria. Sektorin keskuskulma on 34,9°. 20,0 metrin päässä heittokehän keskipisteestä olevat sektoriviivojen pisteet ovat 12,0 metrin päässä toisistaan. Kuulantyönnössä heittokehän halkaisija on 2,1 metriä. Työnnön pituus mitataan heittoringin etuosasta kuulan laskeutumispaikkaan. Putoamisalueen takaraja on asetettu siten, että kaikki alle 25,0 metrin työnnöt mahtuvat kentälle. Kuinka suuri on putoamisalueen pinta-ala?

53. Ympyrästä erotetaan sektori, jonka kaaren pituus on 5,5 dm. Myös ympyrän säde on 5,5 dm. Laske sektorin pinta-ala.

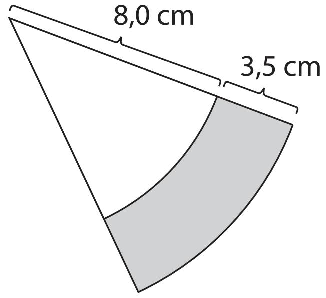
54. Sektorin muotoisen paperinpalan pinta-ala on 125 cm^2. Sektorin keskuskulma on 65°. Laske paperin piirin pituus.

Sekalaisia

55. Neliön sivun pituus on 2 ja ympyrän halkaisijan pituus on myös 2. Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on suurempi kuin ympyrän pinta-ala? [S2015, 1b]

56. Suositun Teema-sarjan suuremman ruokalautasen pinta-ala on 531 cm^2. Määritä lautasen halkaisija ja ympärysmitta.

57. Kuvan suuremman ympyräsektorin kaaren pituus on 5,62 cm. Laske väritetyn alueen pinta-ala.



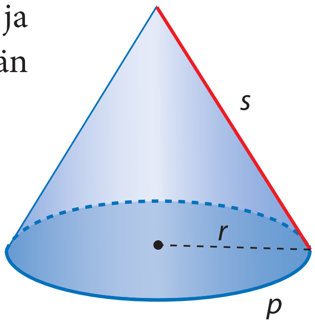
58. Kuinka suuri on sen ympyrän säde, jonka kehällä olevaa 5,1 metrin pituista kaarta vastaa 9 asteen keskuskulma? [S2005, 7]

59. CD-levyn keskellä on ympyrän muotoinen aukko, jonka halkaisija on 15 mm. Levyn pinta-ala on 11 130 mm^2, jos aukkoa ei lasketa mukaan alaan. Määritä CD-levyn halkaisija.

1.3 Avaruuskappaleita

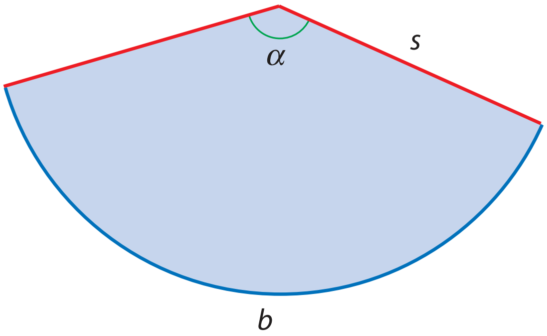
Pohdinta

Jana s yhdistää suoran ympyräkartion huipun ja pohjan reunaviivan. Merkitään pohjaympyrän sädettä kirjaimella r.



a) Muodosta lauseke pohjaympyrän kehän pituudelle p.

Ympyräkartion vaippa on sektorin muotoinen. Merkitään sektorin keskuskulmaa kirjaimella α.



b) Muodosta lauseke sektorin kaaren pituudelle b.

c) Pohjaympyrän kehän pituus on yhtä pitkä kuin sektorin kaaren pituus. Muodosta yhtälö ja ratkaise siitä suhde $\frac{\alpha}{360°}$.

d) Muodosta lauseke sektorin pinta-alalle.

$A_{\text{sektori}} =$

e) Sijoita pinta-alan lausekkeeseen kohdassa c ratkaistu suhteen $\frac{\alpha}{360°}$ arvo ja sievennä lauseke.

$A_{\text{sektori}} =$

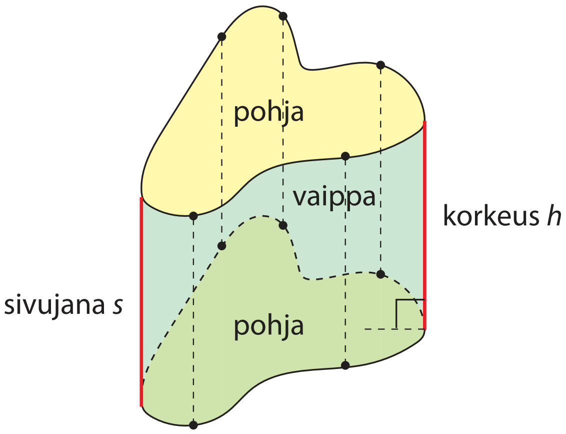
f) Mistä mitoista kartion vaipan pinta-ala siis riippuu?

Avaruusgeometriassa tarkastellaan kolmiulotteisia kappaleita ja niihin liittyviä pituuksia, pinta-aloja sekä tilavuuksia. Tärkeimmät avaruuskappaleet ovat lieriö, kartio ja pallo.

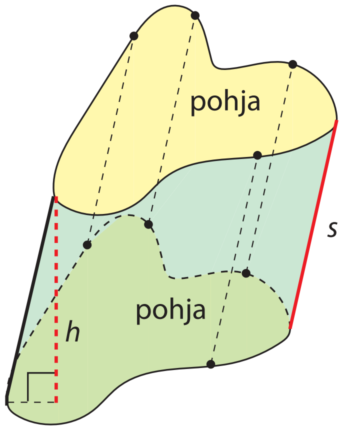
Lieriössä on kaksi pohjaa ja niiden väliin jäävä vaippa.

- **Pohjat** ovat samankokoiset, yhdenmuotoiset ja yhdensuuntaiset tasokuviot.
- **Vaippa** muodostuu, kun pohjien reunojen vastinpisteet yhdistetään janoilla. Näitä janoja kutsutaan **sivujanoiksi** *s*.
- Lieriön **korkeus** *h* on pohjien välinen kohtisuora etäisyys.
- **Suoran lieriön** korkeus on yhtä pitkä kuin sivujana. Muussa tapauksessa lieriö on **vino**.

Suora lieriö



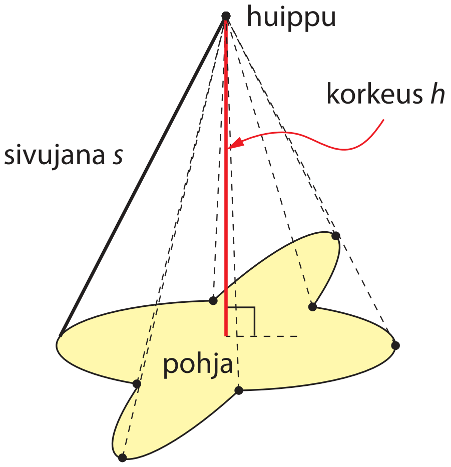
Vino lieriö



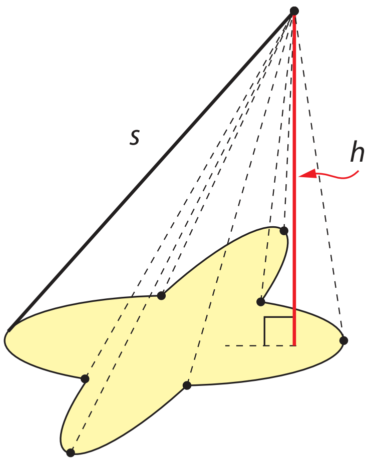
Kartiossa on yksi pohja ja vaippa.

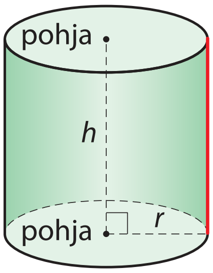
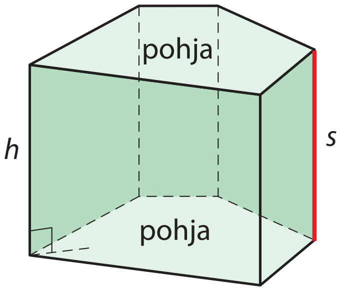
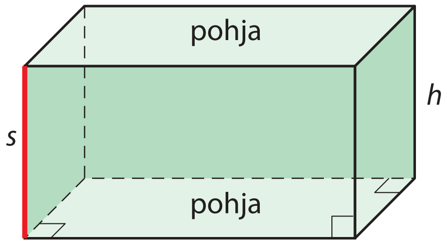
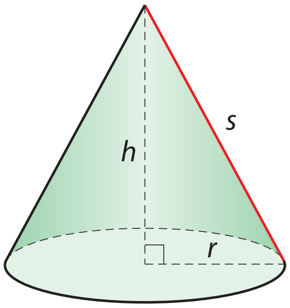
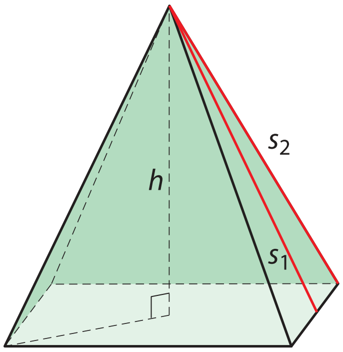
- **Vaippa** muodostuu, kun pohjan reunapisteet yhdistetään pohjan ulkopuolella olevaan pisteeseen, **huippuun**. Pohjan reunapisteen ja huipun yhdistävää janaa kutsutaan sivujanaksi *s*.
- Kartion **korkeus** *h* on pohjan ja huipun välinen kohtisuora etäisyys.
- **Suoran kartion** korkeusjanan toinen päätepiste on pohjan keskipiste. Muussa tapauksessa kartio on **vino**.

Suora kartio



Vino kartio

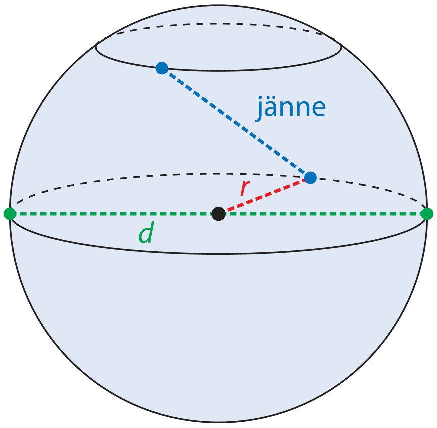


Avaruuskappale	Ominaisuuksia
Suora ympyrälieriö  	• Lieriön pohja on ympyrä, jonka säde on *r*. • Sivujanat *s* ovat keskenään yhtä pitkiä. • Sivujanan pituus on sama kuin lieriön korkeus *h*.
Suora särmiö  	• Särmiön pohja on monikulmio. • Sivujanan pituus on sama kuin lieriön korkeus *h*.
 	• **Suorakulmaisen särmiön** pohja on suorakulmio. • Suorakulmaisen särmiön vastakkaiset tahkot ovat keskenään samanlaisia.
Suora ympyräkartio  	• Kartion pohja on ympyrä. • Kartion korkeusjanan *h* toinen päätepiste on pohjaympyrän keskipiste. • Kartion sivujanat *s* ovat keskenään yhtä pitkiä.
Suora pyramidi  	• Kartion pohja on monikulmio. • Kartion korkeusjanan *h* toinen päätepiste on pohjan keskipiste. • Kartion sivujanat *s* ovat eri pituiset.

Lisämateriaali: Maapallo s. 175

Pallo on pinta, joka muodostuu niistä avaruuden pisteistä, jotka ovat yhtä etäällä kiinteästä pisteestä, pallon **keskipisteestä**.

- **Säde** r on pallopinnan pisteen ja keskipisteen yhdistävä jana.
- **Jänne** on jana, joka muodostuu, kun kaksi pallopinnan pistettä yhdistetään. Jänteen pituus on lyhin etäisyys kahden pallopinnalla sijaitsevan pisteen välillä.



- Jos jänne kulkee pallon keskipisteen kautta, sitä kutsutaan **halkaisijaksi** d.
- Halkaisija on kahden säteen mittainen, $d = 2r$.

Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Mallikuvan piirtäminen

Mallikuvaa varten voi ensin piirtää pohjien tasokuvat sopivalla geometrisella piirto-ohjelmalla, jonka jälkeen voi tarkastella tilannetta kolmiulotteisessa näkymässä ja jatkaa piirtämistä siinä.

Opettele piirtämään
- ympyrälieriö ja ympyräkartio
- särmiö ja pyramidi
- pallo

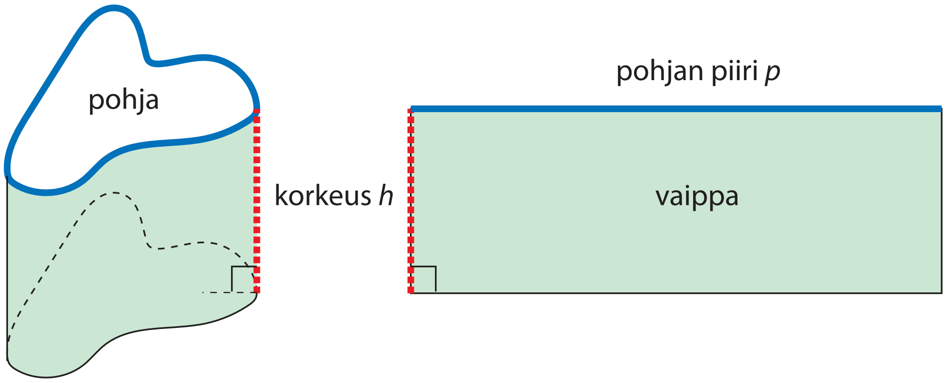
Tietojen merkitseminen mallikuvaan

Mallikuvaan kannattaa piirtää ja merkitä tilanteeseen sopivia pisteitä tai janoja, esimerkiksi huippu, sivujana, korkeusjana tai säde. Näiden geometristen kuvioiden ominaisuuksia, kuten pisteiden kokoa, janojen paksuutta ja värejä voi muuttaa tarkoituksenmukaiseksi. Kappaleen taakse näkymättömiin jäävät janat merkitään yleensä katkoviivalla.

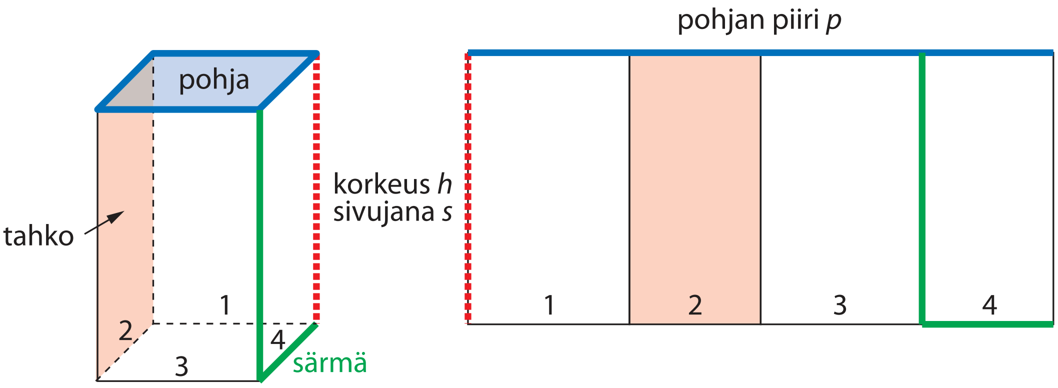
Pinta-aloja

Jos suoran lieriön vaippa leikataan auki sivujanaa pitkin ja levitetään se tasoon, saadaan suorakulmio.

- Suorakulmion korkeus on sama kuin lieriön korkeus *h*.
- Suorakulmion kannan pituus on sama kuin lieriön pohjan piiri.


pohja
korkeus *h*
pohjan piiri *p*
vaippa

Jos lieriö on särmiö, suorakulmion muotoinen vaippa muodostuu pienemmistä suorakulmioista, joita kutsutaan **tahkoiksi**. Kahden tahkon väliin muodostuu **särmä**. Särmiön pohjat ovat myös tahkoja. Esimerkiksi särmiöllä, jonka pohjana on nelikulmio, on kuusi tahkoa. Vaippa muodostuu neljästä tahkosta ja pohjina on kaksi tahkoa.


pohja
tahko
korkeus *h*
sivujana *s*
1
2
3
4
särmä
pohjan piiri *p*
1
2
3
4

Lieriön vaipan pinta-ala on muodostuneen suorakulmion pinta-ala.

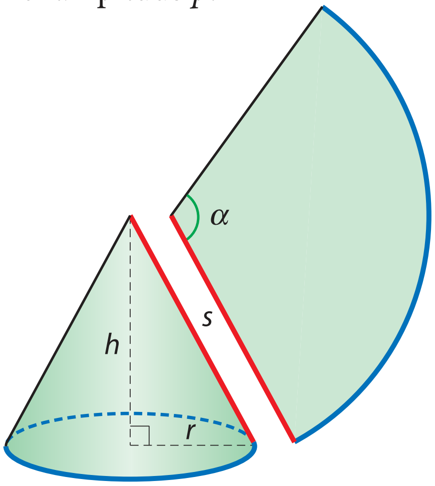
$$A_{\text{vaippa}} = ph$$

p = pohjan piiri
h = korkeus

Lieriön kokonaispinta-ala saadaan, kun vaipan alaan lisätään pohjien pinta-ala.

$$A_{\text{lieriö}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohjat}}$$

Myös kartion vaippa voidaan leikata auki sivujanaa pitkin ja levittää tasoon. Suoran ympyräkartion vaippa on sektori, joka säde on kartion sivujana *s*. Sektorin kaaren pituus *b* on yhtä suuri kuin pohjaympyrän kehän pituus *p*.



Sektorin kaaren pituus *b* on sama kuin pohjaympyrän kehän pituus *p* eli

$b = p = 2\pi r$

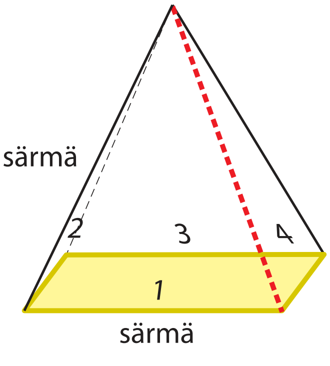
Kartion vaipan pinta-ala on siis yhtä suuri kuin sektorin pinta-ala. Jos sektorin keskuskulma on α ja säde on kartion sivujanan pituus *s*, niin vaipan pinta-ala on

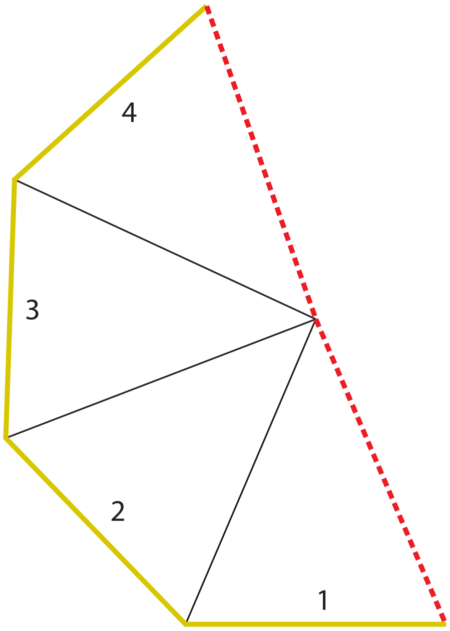
$$A_{\text{vaippa}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi s^2.$$

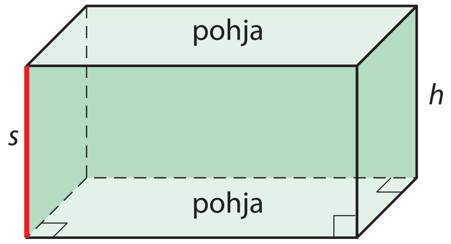
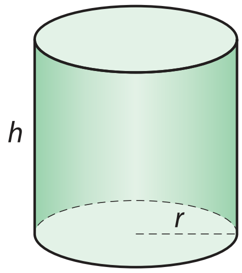
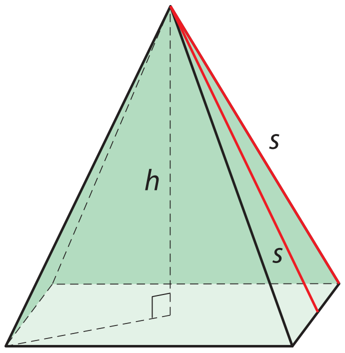
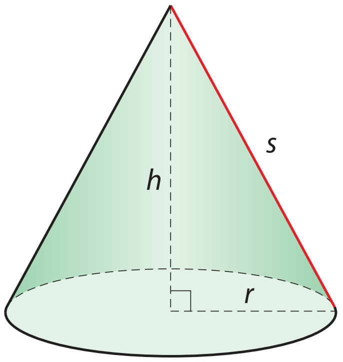
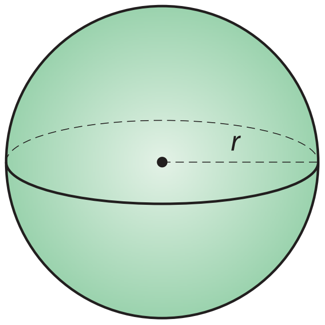
Kartion vaipan pinta-alalle voidaan johtaa myös toinen kaava pohjaympyrän säteen *r* ja sivujanan *s* avulla.

$$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$$

Pyramidin vaippa muodostuu särmien rajaamista kolmioista. Kolmioiden pinta-alojen summa on vaipan pinta-ala.





Avaruuskappale	Pinta-ala
Lieriö   	**Suora särmiö** - $A_{\text{vaippa}} = ph$ - $A_{\text{lieriö}} = A_{\text{vaippa}} + 2 \cdot A_{\text{pohja}}$ **Suora ympyrälieriö** - $A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh$ - $A_{\text{lieriö}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$
Kartio   	**Suora pyramidi** - $A_{\text{vaippa}} =$ sivutahkoina olevien kolmioiden pinta-alojen summa - $A_{\text{pyramidi}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohja}}$ **Suora ympyräkartio** - $A_{\text{vaippa}} = \pi rs$ - $A_{\text{kartio}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohja}}$ $= \pi rs + \pi r^2$
Pallo  	- $A = 4\pi r^2$

ESIMERKKI 1

Laske lieriön kokonaispinta-ala, kun sen

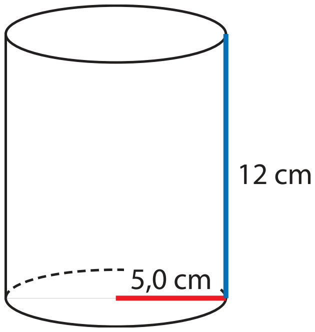
a) pohjaympyrän säde on 5,0 cm ja korkeus 12 cm

b) korkeus on 15 cm ja pohjana on suorakulmio, jonka mitat ovat 10 cm ja 12 cm.

RATKAISU

a) Pohjaympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (5{,}0\ \text{cm})^2 = 78{,}5398\ldots\ \text{cm}^2$$



Vaippa on suorakulmio. Lasketaan vaipan pinta-ala pohjaympyrän säteen r ja lieriön korkeuden h avulla.

$A_{\text{vaippa}} = ph$

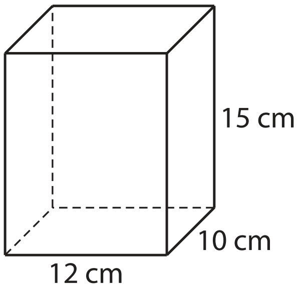
$$\begin{aligned}A_{\text{vaippa}} &= 2\pi r \cdot h\\ &= 2\pi \cdot 5{,}0\ \text{cm} \cdot 12\ \text{cm}\\ &= 376{,}991\ldots\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

Kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned}A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}}\\ &= 2 \cdot 78{,}5398\ldots\ \text{cm}^2 + 376{,}991\ldots\ \text{cm}^2\\ &= 534{,}07\ldots\ \text{cm}^2\\ &\approx 530\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

b) Pohja on suorakulmio.

$$A_{\text{pohja}} = 10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 120\,\text{cm}^2$$



Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri p.

$$p = 2 \cdot 10\ \text{cm} + 2 \cdot 12\ \text{cm} = 44\ \text{cm}$$

Vaippa on suorakulmio, jonka kannan pituus on pohjan piiri $p = 44$ cm ja korkeus $h = 15$ cm.

$$A_{\text{vaippa}} = ph = 44\ \text{cm} \cdot 15\ \text{cm} = 660\ \text{cm}^2$$

Kokonaispinta-ala on

$A_{\text{lieriö}} = 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}}$

$$A_{\text{lieriö}} = 2 \cdot 120\ \text{cm}^2 + 660\ \text{cm}^2 = 900\ \text{cm}^2$$

VASTAUS **a)** 530 cm^2 **b)** 900 cm^2

ESIMERKKI 2

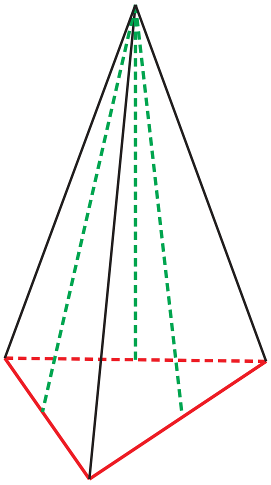
Suoran pyramidin pohja on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 14,0 cm. Pyramidin sivutahkot ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden korkeus on 25,0 cm.

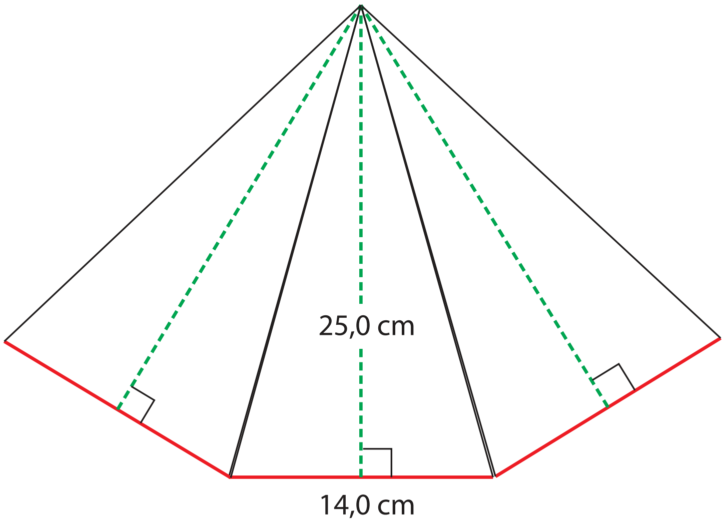
a) Laske pyramidin vaipan pinta-ala.

b) Suoran särmiön pohja on neliö, jonka sivun pituus on 14,0 cm. Kuinka korkea tulisi särmiön olla, jotta sen vaipan pinta-ala olisi sama kuin pyramidin vaipan pinta-ala?

RATKAISU

a) Koska pyramidin pohjana on tasasivuinen kolmio, vaipan muodostaa kolme yhtä suurta, tasakylkistä kolmiota.



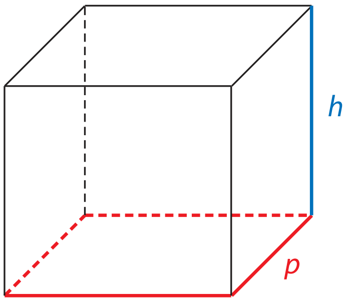


$A_{\text{vaippa}} = 3 \cdot A_{\text{kolmio}}$

$$A_{\text{vaippa}} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14{,}0\text{ cm} \cdot 25{,}0\text{ cm} = 525\text{ cm}^2$$

b) Särmiön pohja on neliö, joten särmiön pohjan piiri on

$$p = 4 \cdot 14{,}0\text{ cm} = 56{,}0\text{ cm}.$$



Särmiön vaipan pinta-ala saadaan pohjan piirin ja korkeuden tulona. Merkitään särmiön korkeutta kirjaimella *h* ja muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö.

$A_{\text{vaippa}} = ph$

$$\begin{aligned} 56{,}0 \cdot h &= 525 \\ h &= 9{,}375 \\ h &\approx 9{,}38 \quad \text{(cm)} \end{aligned}$$

VASTAUS

a) Pyramidin vaipan pinta-ala on 525 cm^2.

b) Särmiön korkeuden pitäisi olla 9,38 cm.

ESIMERKKI 3

Laske

a) suoran ympyräkartion sivujanan pituus, kun pohjan säde on 54 cm ja vaipan pinta-ala 2,4 m^2.

b) suorakulmaisen särmiön sivujen pituudet, kun sen kokonaispinta-ala on 992 cm^2 ja mittojen suhteet ovat 2 : 3 : 5.

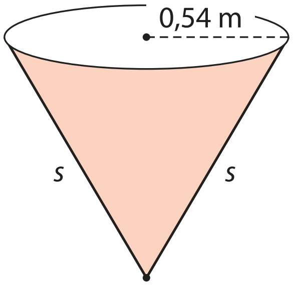
RATKAISU

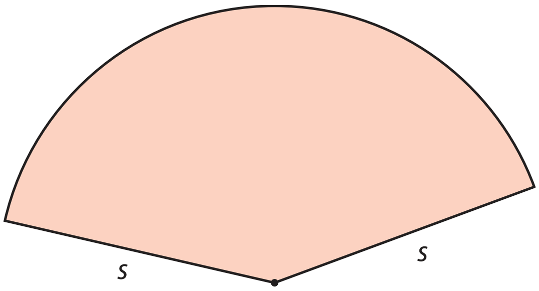
a) Suoran ympyräkartion vaippa on sektori, jonka pinta-ala on

$$A_{\text{vaippa}} = \pi rs = \pi \cdot 0{,}54 \cdot s$$

Vaipan pinta-ala on annettu neliömetreinä, joten muutetaan säteen pituus metreiksi.

$r = 54 \text{ cm} = 0{,}54 \text{ m}$



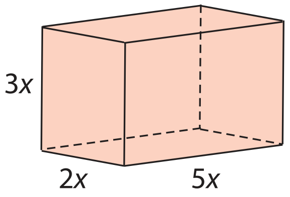


Koska vaipan pinta-ala on 2,4 m^2, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \pi \cdot 0{,}54s &= 2{,}4 \\ s &= 1{,}4147\ldots \\ s &\approx 1{,}4 \quad (\text{m}) \end{aligned}$$

b) Merkitään särmiön sivujen pituuksia $2x$, $3x$ ja $5x$ ja lasketaan kaikkien tahkojen yhteispinta-ala.

$$A = 2 \cdot 3x \cdot 2x + 2 \cdot 2x \cdot 5x + 2 \cdot 3x \cdot 5x = 62x^2$$



Pinta-ala on 992 cm^2. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 62x^2 &= 992 \\ x = 4 \quad &\text{tai} \quad x = -4 \end{aligned}$$

Sivun pituus on aina positiivinen, joten $x = 4$ (cm).

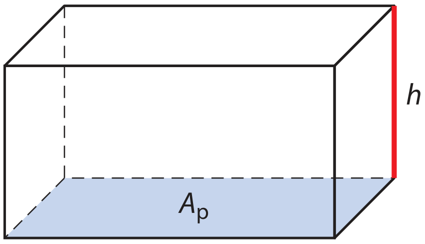
Särmiön sivujen pituudet ovat:

- $2 \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$
- $3 \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$
- $5 \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$.

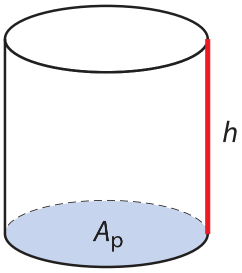
VASTAUS **a)** 1,4 m **b)** 8 cm, 12 cm ja 20 cm

Tilavuuksia

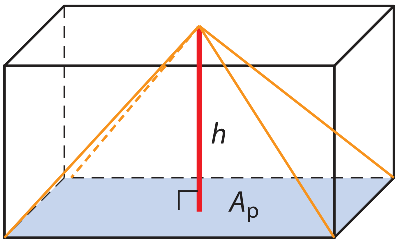
Lieriön tilavuus saadaan pohjan pinta-alan A_p ja korkeuden h tulona.



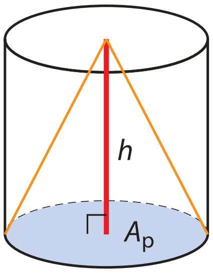
$V = A_p \cdot h$



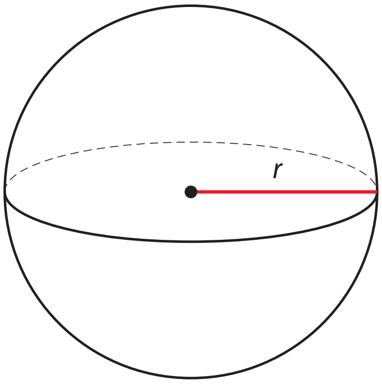
Jos kartion pohja ja korkeus ovat samat kuin lieriöllä, kartion tilavuus on kolmasosa lieriön tilavuudesta.



$V = \frac{A_p \cdot h}{3}$



Pallon tilavuus riippuu ainoastaan säteen pituudesta.



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Avaruuskappale	**Tilavuus**
lieriö	$V = A_p \cdot h$
kartio	$V = \frac{1}{3} \cdot A_p \cdot h = \frac{A_p \cdot h}{3}$
pallo	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ESIMERKKI 4

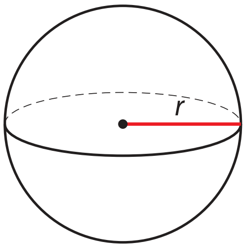
Hakaniemen Ympyrätalon pääoven edessä on taiteilija Hannu Sirenin suunnittelema pallonmuotoinen taideteos Symboli. Se on valmistettu haponkestävästä ruostumattomasta teräksestä. Pallon ympärysmitta on 942 cm.

a) Laske Symbolin tilavuus litroina.
b) Kuinka paljon Symboli painaa, kun teräksen tiheys on 7,9 kg/dm^3?

RATKAISU

a) Pallon säde voidaan ratkaista pallon ympärysmitan avulla.

Merkitään pallon sädettä kirjaimella *r*.



$$\begin{aligned} 2\pi r &= 942 \\ r &= 149{,}92\ldots \quad \text{(cm)} \end{aligned}$$

Lisämateriaali: Yksikkömuunnokset s. 160

Lasketaan pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(149{,}92\ldots\ \text{cm})^3 \\ &= 1{,}4115\ldots\cdot 10^7\ \text{cm}^3 \\ &= 14115{,}67\ldots\ \text{dm}^3 \\ &\approx 14\,000\ \text{l} \end{aligned}$$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

1 dm^3 = 1 litra

b) Pallon tiheys ρ lasketaan massan *m* ja tilavuuden *V* avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

Voit myös sijoittaa massan ja tiheyden kaavaan $\rho = \frac{m}{V}$ ja ratkaista siitä massan *m*.

$$m = \rho \cdot V$$

Lasketaan Symbolin massa.

$$m = 7{,}9\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\cdot 14\,115{,}67\ldots\ \text{dm}^3 \approx 112\,000\ \text{kg}$$

Muista käyttää laskuissa pyöristämättömiä arvoja. Kopioi aikaisemmin saatu vastaus laskulausekkeeseen.

VASTAUS

a) Symbolin tilavuus on 14 000 litraa.
b) Symbolin massa on 112 000 kg.

ESIMERKKI 5

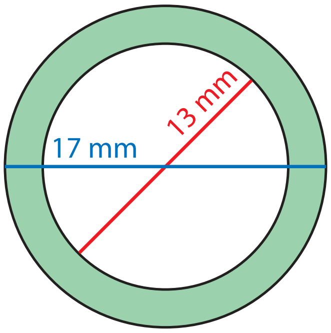
Kasteluletkun poikkileikkaus on ympyrän muotoinen. Letkun ulkohalkaisija on 17 mm ja sisähalkaisija 13 mm. Letku on valmistettu PVC-muovista. Kuinka monta kuutiodesimetriä muovia letkun valmistamiseen on käytetty, kun letkun pituus 8,0 m?

RATKAISU Letkun poikkileikkaus muodostuu kahdesta sisäkkäisestä ympyrästä.

Suuremman ympyrän säde on 17 mm : 2 = 8,5 mm.
Pienemmän ympyrän säde on 13 mm : 2 = 6,5 mm.

Letku on muodoltaan suora ympyrälieriö.

Lieriön korkeus on sama kuin letkun pituus eli 8,0 m = 8000 mm.



$$\begin{aligned} V_{\text{letku}} &= \pi \cdot (8{,}5\ \text{mm})^2 \cdot 8000\ \text{mm} \\ &= 1{,}8458\ldots \cdot 10^6\ \text{mm}^3 \\ &= 1{,}8458\ldots\ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

Lisämateriaali: Yksikkömuunnokset s. 160

Myös letkun ontto sisäosa on suora ympyrälieriö, jonka korkeus on 8000 mm.

$$\begin{aligned} V_{\text{sisäosa}} &= \pi \cdot (6{,}5\ \text{mm})^2 \cdot 8000\ \text{mm} \\ &= 1{,}0618\ldots \cdot 10^6\ \text{mm}^3 \\ &= 1{,}0618\ldots\ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

Letkuun käytetyn muovin tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{letku}} - V_{\text{sisäosa}} &= 1{,}8458\ldots\ \text{dm}^3 - 1{,}0618\ldots\ \text{dm}^3 \\ &= 0{,}7539\ldots\ \text{dm}^3 \approx 0{,}75\ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

VASTAUS Letkun valmistamiseen on käytetty 0,75 dm^3 muovia.

ESIMERKKI 6

Grillikodan katto on suoran ympyräkartion muotoinen. Katon korkeus on puolet pohjaympyrän säteen pituudesta. Kodan seinän muodostaa suoran, ympyräpohjaisen lieriön vaippa, jonka korkeus on 190 cm. Lieriön pohjan säde on yhtä suuri kuin katon pohjaympyrän säde. Laske kodan pohjan halkaisijan pituus, kun kodan tilavuus on 16 m^3.

RATKAISU

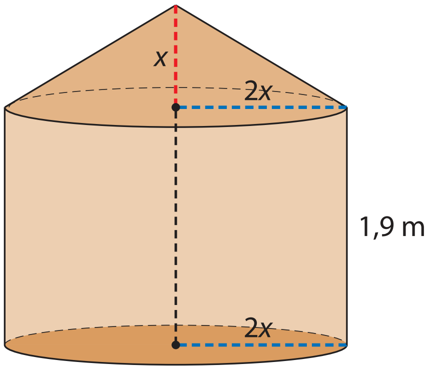
Koska tilavuus on annettu kuutiometreinä (m^3), muunnetaan vaipan korkeus 190 cm ensin metreiksi.

Yksikkömuunnokset on helpompi tehdä pituusyksiköillä kuin tilavuusyksiköillä.

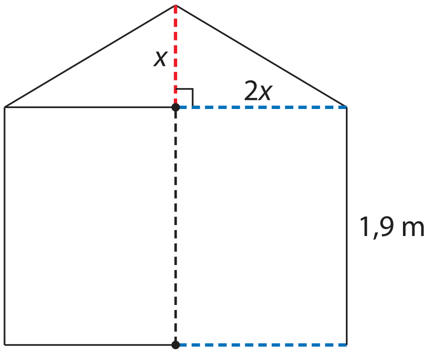
$$190 \text{ cm} = 1{,}90 \text{ m}$$

Hahmotellaan mallikuva.

- Grillikodan yläosa on kartio.
- Merkitään kartion korkeutta kirjaimella x, jolloin pohjaympyrän säde on $2x$.
- Alaosa on suora lieriö, jonka pohjaympyrän säde on myös $2x$ ja korkeus 1,9 m.



Poikkileikkauskuva:



Kodan tilavuus saadaan kartion ja lieriön tilavuuksien summana. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 h$$

$$V_{\text{kartio}} + V_{\text{lieriö}} = 16$$

Muista laittaa potenssin kantaluku sulkuihin!

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2x)^2 \cdot x + \pi \cdot (2x)^2 \cdot 1{,}9 = 16$$

$$x = -5{,}5719\ldots \text{ tai } x = -0{,}89125\ldots \text{ tai } x = 0{,}7684\ldots$$

Korkeus on aina positiivinen luku, joten $x = 0{,}7684\ldots$ (m).

- Kodan pohjan säde on $2 \cdot 0{,}7684\ldots \text{ m} = 1{,}5368\ldots \text{ m}$.
- Pohjan halkaisija on $2 \cdot 1{,}5368\ldots \text{ m} = 3{,}073799\ldots \text{ m} \approx 3{,}1 \text{ m}$.

VASTAUS Kodan pohjan halkaisija on 3,1 m.

Tehtävät

Pinta-aloja

60. Suorakulmaisen särmiön pohjan mitat ovat 5,0 cm × 6,0 cm. Laske särmiön korkeus, kun särmiön kokonaispinta-ala on 104 cm^2.

61. Neliöpohjaisen suoran särmiön korkeus on 1,0 cm suurempi kuin pohjan sivun pituus. Laske särmiön mitat, kun särmiön kokonaispinta-ala on 10 cm^2.

---

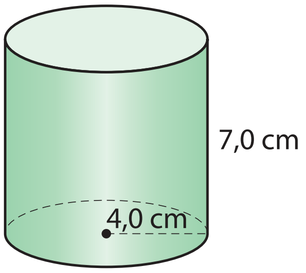
62. Piirrä suora lieriö, jonka pohja on
a) ympyrä **b)** suorakulmio **c)** kolmio.

63. Piirrä suora kartio, jonka pohja on
a) ympyrä **b)** suorakulmio **c)** kolmio.
Piirrä kartioihin näkyviin korkeusjanat.

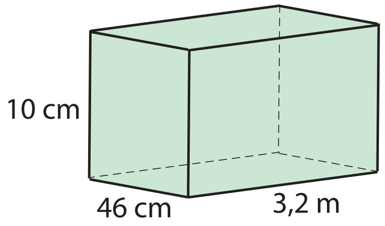
64. Piirrä mallikuva esimerkin 6 grillikodasta.

65. Laske kappaleen vaipan pinta-ala, kun kappale on

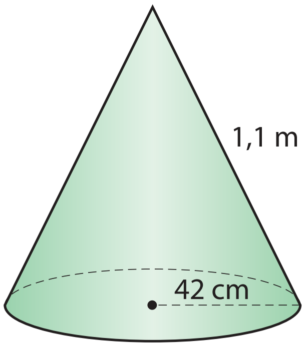
a) suora ympyrälieriö



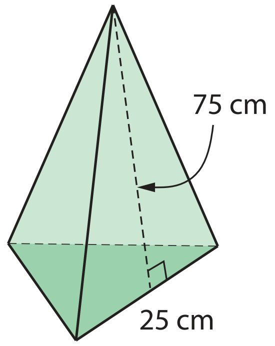
b) suora särmiö



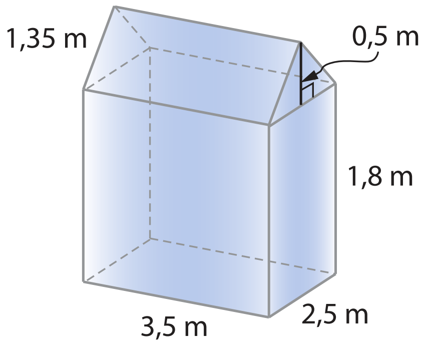
c) suora ympyrälieriö



d) suora kartio, jonka pohja on tasasivuinen kolmio.



66. Kuvan mukaisen kasvihuoneen seinät ja katto valmistetaan lasista. Laske lasiosan pinta-ala.



E1 **67.** Laske suoran lieriön kokonaispinta-ala, kun sen

a) pohjaympyrän säde on 5,2 cm ja korkeus 15 cm

b) pohja on neliö, jonka sivun pituus on 43 cm ja korkeus on 65 cm.

68. Suomalainen lasitaiteilija Tapio Wirkkala suunnitteli vuonna 1951 suoran ympyräkartion muotoisen riippuvalaisimen. Lampun alareunan ympärysmitta on 75,4 cm ja alareunan etäisyys lampun yläosasta on 32,3 cm. Lampun ulkopinta on etsattua opaalilasia. Laske etsatun alueen pinta-ala.

E2 **69.** Suoran pyramidin pohja on neliö, jonka sivun pituus on 16,0 cm. Pyramidin tahkot ovat tasasivuisia kolmioita, joiden korkeus on 32,0 cm.

a) Laske pyramidin vaipan pinta-ala.

b) Suoran särmiön pohja on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 16,0 cm. Laske särmiön korkeus, kun sen vaipan pinta-ala on sama kuin pyramidin vaipan pinta-ala.

E3 **70.** Laske

a) suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde, kun sivujanan pituus on 4,8 dm ja vaipan pinta-ala 17 dm^2

b) suorakulmaisen särmiön muotoisen muropaketin mitat, kun paketin valmistamiseen tarvitaan pahvia 16 dm^2 ja paketin mittojen suhteet ovat 2 : 10 : 15.

71. Jäätelötuutin vohveliosa on suoran ympyräkartion muotoinen. Vohvelin yläosan (kartion pohjan) halkaisija on 6,0 cm. Laske kartion sivujanan pituus, kun tuuttiin tarvitaan vohvelia 1,5 dm^2.

72. Kannettoman, neliöpohjaisen leivoslaatikon valmistamiseen käytetään pahvia 2,6 dm^2. Laske laatikon leveys, kun sen korkeus on 60 % pienempi kuin leveys.

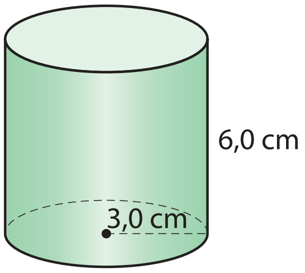
73. Suoran, neliöpohjaisen pyramidin pohjasärmän ja sivutahkon korkeuden pituuksien suhde on 4 : 7. Laske sivutahkon korkeus, kun pyramidin kokonaispinta-ala on 2592 cm^2.

74. Puoliympyrän muotoinen paperiarkki, jonka pinta-ala on 6,90 dm^2 kierretään kartion vaipaksi. Laske kartion sivujanan pituus ja pohjan säde.

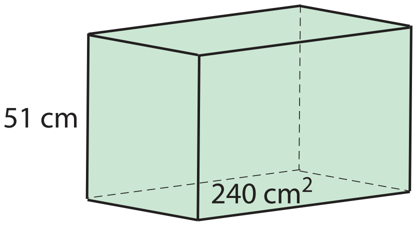
Tilavuuksia

75. Laske kappaleen tilavuus, kun kappale on

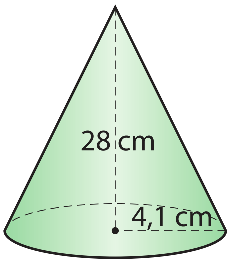
a) suora lieriö



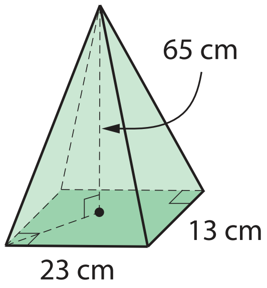
b) suora särmiö



c) suora kartio

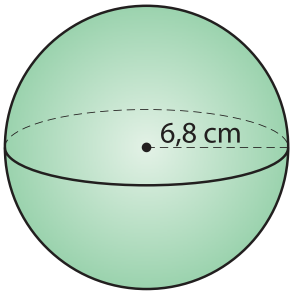


d) suora pyramidi.

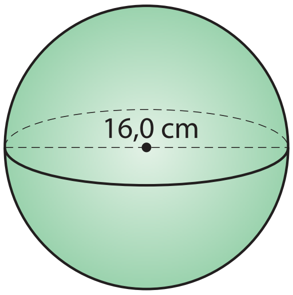


76. Laske pallon tilavuus litroina.

a)



b)



E4 **77.** Helminauha muodostuu 34 viljellystä samankokoisesta helmestä. Yhden helmen ympärysmitta on 2,4 cm. Kuinka monta grammaa helminauha painaa? Helmi koostuu lähinnä kalsiumkarbonaatista, jonka tiheys on 2,8 g/cm^3.

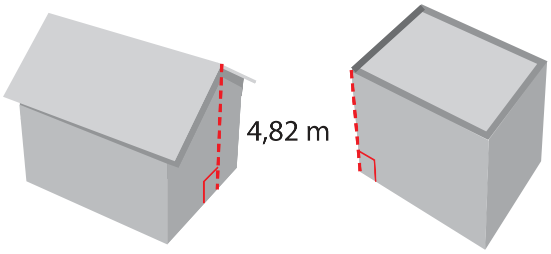
78. Kuun halkaisija on 3474 km ja Maan halkaisija 12 756 km. Kuinka monta prosenttia Kuun tilavuus on Maan tilavuudesta? Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

79. Jäätelöpallon tilavuus on 1,20 dl. Laske pallon pinta-ala.

80. Sadekuuron aikana sataa 7,0 mm vettä. Kuinka monta litraa vettä tulee suorakulmion muotoiselle kasvimaalle, jonka mitat ovat 4,5 m ja 3,7 m? Anna vastaus litran tarkkuudella.

81. Suorakulmion muotoisen uima-altaan pituus on 25 m ja leveys 12 m. Altaan syvyys toisesta päästä on 1,0 m ja toisesta 3,0 m. Laske altaan tilavuus litroina.

82. Harjakatto on yleisin taloissa käytettävä kattomuoto. Kuvan talon pohjasuorakulmion mitat ovat 22,0 m × 14,0 m. Talon korkeus katon huipulle asti on 4,82 m. Kattokerroksen alapuolella olevan suoran särmiön korkeus on 3,20 m. Tasakattoinen talo on pohjamitoiltaan sama kuin harjakattoinen talo. Talon korkeus on myös 4,82 m. Kuinka monta prosenttia suurempi on tasakattoisen talon tilavuus harjakattoisen talon tilavuuteen verrattuna?



E5 **83.** Paperirullan ulkohalkaisija on 12,0 cm ja sisähalkaisija 4,5 cm. Rullan leveys on 23,0 cm. Laske paperiosan tilavuus.

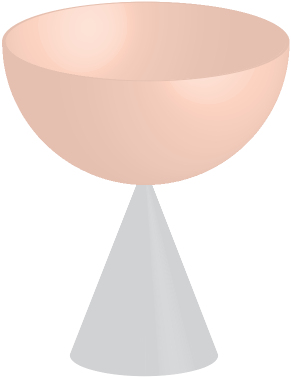
84. Hopeisen lautasliinarenkaan korkeus on 1,5 cm ja paksuus 2,0 mm. Renkaan sisähalkaisija on 3,2 cm. Laske renkaan massa, kun hopean tiheys on 10,5 g/cm^3.

85. Sormus, jossa on pieni pallo koristeena, valmistetaan titaanista. Sormuksen ulkohalkaisija on 2,2 cm ja sisähalkaisija 2,0 cm. Koristeena olevan pallon säde on 3,0 mm, ja sormuksen leveys on 5,0 mm. Laske sormuksen massa, kun titaanin tiheys on 4,54 g/cm^3.

E6 **86.** Suorakulmaisen särmiön pohjan toinen särmä on 3,0 cm lyhempi kuin toinen särmä. Särmiön korkeus on 12,0 cm. Laske särmiön pohjan mitat, kun särmiön tilavuus on 254 cm^3.

87. Jalallisen cocktail-lasin sisätila on kärjellään seisova ympyräkartio. Lasin suuaukon sisähalkaisija on 1,5-kertainen sisätilan korkeuteen verrattuna. Laske lasin korkeus, kun sen tilavuus on 1,8 dl.

88. Tapio Wirkkalan suunnitteleman Briljant-lasin yläosa on likimain puolipallon muotoinen ja alaosa suora ympyräkartio. Yläosan ulkohalkaisija on kaksi kertaa niin suuri kuin lasin jalkana olevan kartion pohjaympyrän ulkohalkaisija. Jalan korkeus on 5,0 cm. Kartiolla ei ole pohjaa, ja sen sivujanan pituus on 5,40 cm. Laske lasin yläosan halkaisija, kun yhden Briljant-lasin ulkopinta-ala on 143 cm^2.



89. Täysinäisessä, tiiviisti pakatussa, ympyrälieriön muotoisessa rasiassa on kaksi pallon muotoista kylpykuulaa. Kuinka monta prosenttia kuulien tilavuus on koko rasian tilavuudesta?

90. Katon reunalla olevan vesikourun poikkileikkaus on puoliympyrä, jonka halkaisija on 12,5 cm. Ukkoskuuron aikana kouru täyttyy vedestä. Kuinka monta litraa kouru kuljettaa vettä 5 min aikana, kun veden virtausnopeus on 0,09 m/s? Anna vastaus litran tarkkuudella.

Sekalaisia

91. Hannu Sirenin suunnittelema teos Stoa perustuu Helsingin kaupungin vuonna 1981 järjestämään yleisen kilpailun voittaneeseen ehdotukseen. Teos koostuu neljästä suorakulmaisesta särmiöstä ja neliön muotoisesta alustasta. Särmiöiden pohja on neliö, jonka sivun pituus on 1,0 m ja särmiöiden korkeus on 6,3 m. Alustan sivun pituus on 12 m. Laske teoksen kokonaispinta-ala neliömetrin tarkkuudella.

92. Rakentaja valaa terassin pohjaksi 2,40 m leveän ja 6,50 m pitkän suorakulmion muotoisen betonilaatan, jonka paksuus on 10,0 cm. Laske laatan massa, kun betonin tiheys on 1,50 kg/dm^3.

93. Jalkapallon sääntöjen mukaan pallon ympärysmitta on 68 cm – 70 cm.

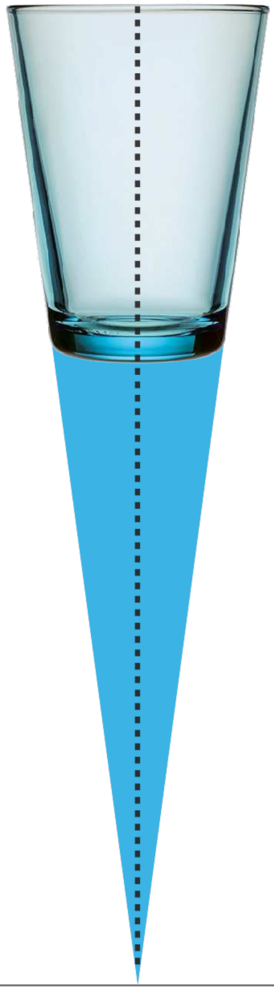
a) Millä välillä pallon pinta-ala ja tilavuus vaihtelevat? Anna tulokset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Kuinka monta prosenttia suurempi on suurimman sääntöjen mukaisen pallon tilavuus pienimpään sääntöjen mukaiseen palloon verrattuna? Anna tulos kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

94. Sademittari on suoran ympyräpohjaisen lieriön muotoinen. Mittarin pohjan halkaisija on 4,5 cm. Sadekuuron jälkeen mittariin on satanut 0,50 dl vettä. Kuinka paljon sademäärä oli millimetreinä?

95. Suoran ympyräkartion tilavuus on 35 cm^3. Kartion korkeus on 2,0 cm suurempi kuin pohjaympyrän säde. Laske kartion korkeus.

Fiskars Finland Oy Ab



96. Kaj Franckin Kartio-juomalasi on muodoltaan katkaistu ympyräkartio, jonka suun halkaisija 8,0 cm. Lasin pohjan halkaisija on 4,5 cm. Juomalasin korkeus on 6,5 cm ja koko kartion korkeus on 15 cm. Laske juomalasin tilavuus desilitroina.

2 Kuvioita ja kappaleita

Tavoitteena on

- kerrata Pythagoraan lause ja trigonometriset funktiot
- oppia käyttämään Pythagoraan lausetta ja trigonometrisia funktioita erilaisissa tilanteissa
- oppia tarkastelemaan ympyrän tangenttiin liittyviä tilanteita
- oppia hahmottamaan geometrisia kuvioita koordinaatistossa.

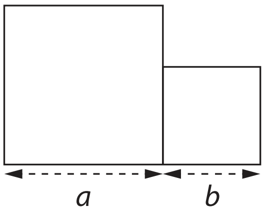
- Miten tutkitaan, onko kolmio suorakulmainen?
- Miten lasketaan Pythagoraan lauseen avulla kolmion sivujen pituuksia?
- Miten ratkaistaan Pythagoraan lauseen avulla korkeusjanojen pituuksia?
  - tasakylkinen kolmio
  - tasasivuinen kolmio
  - suunnikas
  - tasakylkinen puolisuunnikas
  - kartio
- Miten koordinaatistossa lasketaan
  - janojen keskipisteitä ja pituuksia
  - kuvioiden pinta-aloja
  - kappaleiden tilavuuksia?

- Miten ratkaistaan kolmion sivujen pituuksia ja kulmien suuruuksia
  - Pythagoraan lauseen ja trigonometristen funktioiden avulla?
- Miten suorakulmaisen kolmion ominaisuuksia käytetään erilaisissa tilanteissa?
  - erilaiset kolmiot ja nelikulmiot
  - ympyrän tangentti
  - avaruuskappaleet ja -lävistäjät
- Miten lasketaan ympyrän
  - jänteen ja kaaren pituus
  - segmentin pinta-ala
  - tangenttien välisen kulman suuruus
  - ulkopuolisen pisteen etäisyys ympyrän kehästä?
- Miten lasketaan koordinaatistoon piirrettyjen kuvioiden
  - sivujen pituuksia
  - kulmien suuruuksia?

2.1 Suorakulmaisen kolmion geometriaa

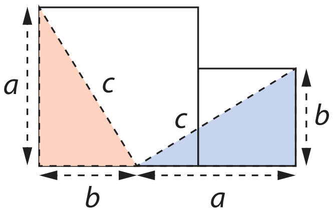
Pohdinta

a) Kuvassa on kaksi neliötä kiinni toisissaan. Neliöiden sivujen pituudet ovat *a* ja *b*.

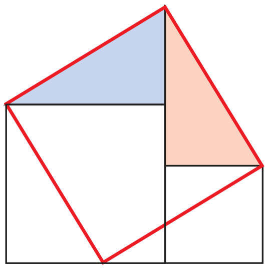


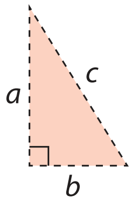
- Mikä on neliöiden yhteenlaskettu pinta-ala?

Neliöistä erotetaan kaksi keskenään samanlaista suorakulmaista kolmiota, joiden lyhyimmät sivut ovat pituudeltaan *a* ja *b* ja pisin sivu *c*.

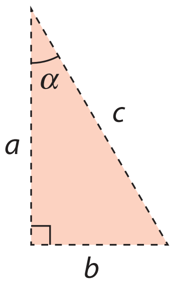
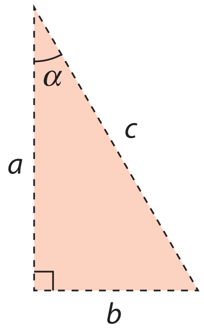


- Kolmiot leikataan irti ja siirretään kuvan osoittamiin paikkoihin. Miksi muodostuva punaisella rajattu alue on neliö?
- Millä kahdella eri tavalla muodostuvan neliön pinta-ala voidaan esittää?
- Millainen riippuvuus edellisen perusteella saadaan suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksille *a*, *b* ja *c*?



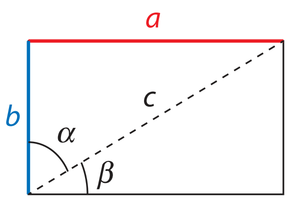


b) Mittaa taulukon suorakulmaisista kolmioista tarvittavat pituudet ja kulmat mahdollisimman tarkasti ja täydennä taulukko. Mitä huomaat?

Kolmio		
a		
c		
α		
$\frac{a}{c}$		

Pythagoraan lause

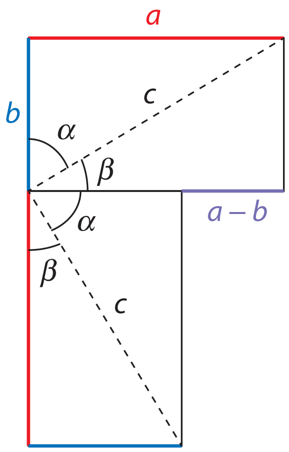
Tarkastellaan suorakulmiota, jonka sivujen pituudet ovat a ja b. Merkitään suorakulmion lävistäjää kirjaimella c. Lävistäjä jakaa suoran kulman kahteen terävään kulmaan α ja β eli $\alpha + \beta = 90°$.

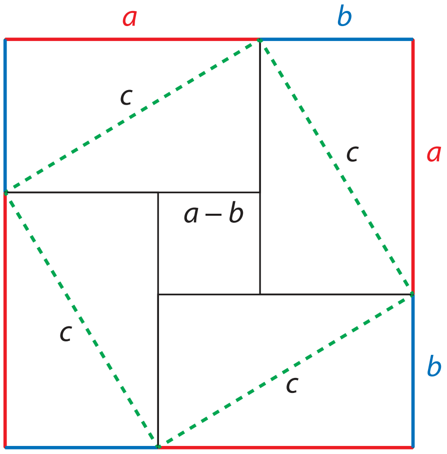


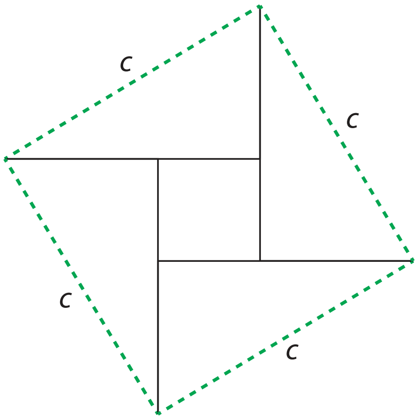
Liitetään kaksi tällaista suorakulmiota yhteen kuvan esittämällä tavalla. Tällöin lävistäjien väliin jäävä kulma on

$$\alpha + \beta = 90°.$$

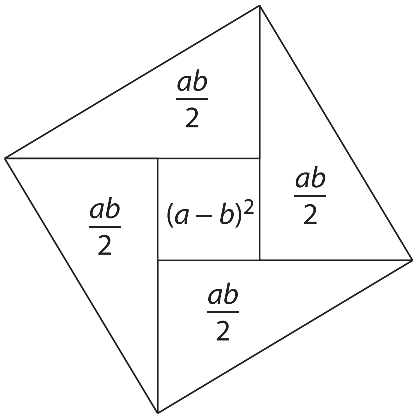
Jos suorakulmioita liitetään yhteen neljä kappaletta, muodostuu neliö, jonka sivun pituus on $a + b$. Lävistäjät muodostavat myös neliön, jonka sivun pituus on siis c.







Määritetään c-sivuisen neliön pinta-ala. Neliö muodostuu neljästä suorakulmaisesta kolmiosta ja pienestä keskellä olevasta neliöstä. Keskelle syntyvän neliön sivun pituus on $a - b$.



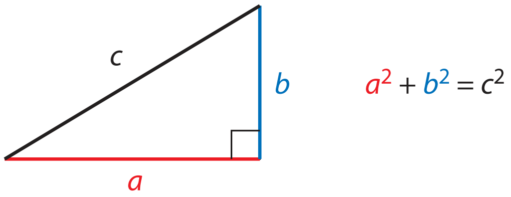
$$A_{\text{kolmio}} = \frac{ab}{2}$$

$$A_{\text{pikkuneliö}} = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$A_{\text{iso neliö}} = 4 \cdot \frac{ab}{2} + \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{A_{\text{pikkuneliö}}} = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

Koska ison neliön ala on toisaalta c^2, saadaan $a^2 + b^2 = c^2$.

Saatu tulos tunnetaan **Pythagoraan lauseen** nimellä. Sen mukaan suorakulmaisessa kolmiossa kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö.



Jos kolmion sivujen pituuksille a, b ja c on voimassa ehto $a^2 + b^2 = c^2$, kolmio on suorakulmainen. Tämä tunnetaan **Pythagoraan lauseen käänteislauseen** nimellä.

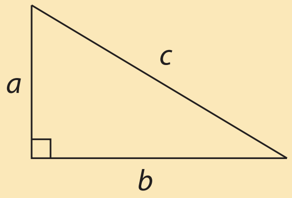
Pythagoras oli kreikkalainen matemaatikko ja filosofi. Vaikka lause on nimetty Pythagoraan mukaan, se tunnettiin jo 1500 vuotta aikaisemmin Mesopotamiassa. Lause esiintyy myös egyptiläisessä Rhindin papyruksessa 1000 vuotta ennen Pythagorasta. Pythagoraan lauseelle on olemassa satoja todistuksia. Todistus, joka edellisellä sivulla esitettiin, tunnetaan ”kiinalaisena todistuksena”.

Pythagoraan lauseen avulla voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta yhden sivun pituus, jos kahden muun sivun pituudet tunnetaan.

Pythagoraan lause

Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

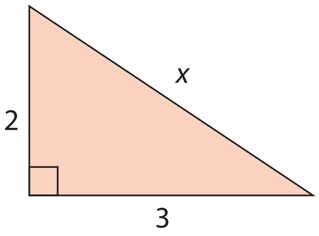


- a ja b ovat kateettien pituudet ja c hypotenuusan pituus.

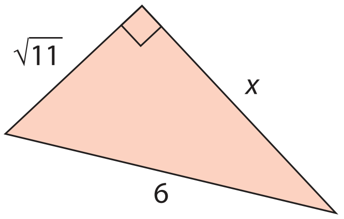
ESIMERKKI 1

Laske sivun pituuden x tarkka arvo.

a)



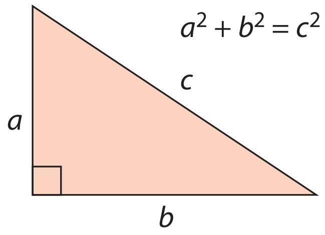
b)



RATKAISU

a) Kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 3. Hypotenuusan pituutta on merkitty kirjaimella x. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$$\begin{aligned} 2^2+3^2&=x^2\\ 4+9&=x^2\\ x^2&=13\\ x&=\pm\sqrt{13} \end{aligned}$$

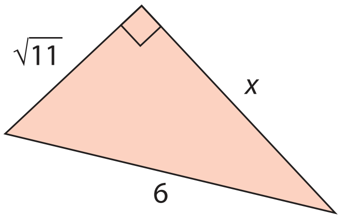


Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x=\sqrt{13}$.

b) Kolmion toisen kateetin pituus on $\sqrt{11}$ ja hypotenuusan pituus on 6. Toisen kateetin pituutta on merkitty kirjaimella x. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$(\sqrt{a})^2=a$

$$\begin{aligned} (\sqrt{11})^2+x^2&=6^2\\ 11+x^2&=36\\ x^2&=36-11\\ x^2&=25\\ x&=\pm\sqrt{25}\\ x&=\pm5 \end{aligned}$$



Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x=5$.

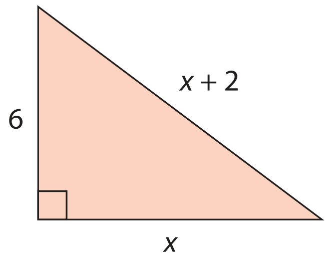
VASTAUS **a)** $x=\sqrt{13}$ **b)** $x=5$

ESIMERKKI 2

Suorakulmaisen kolmion lyhemmän kateetin pituus on 6 cm. Hypotenuusa on 2 cm pidempi kuin seuraavaksi pisin sivu. Määritä kolmion sivujen pituudet.

RATKAISU

Merkitään kolmion pidemmän kateetin pituutta kirjaimella x. Hypotenuusan pituus on tällöin $x + 2$.



Sijoitetaan pituudet 6, x ja $x + 2$ Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$\begin{aligned}
6^2 + x^2 &= (x+2)^2 \\
36 + x^2 &= (x+2)(x+2) \\
36 + x^2 &= x^2 + 2x + 2x + 4 \\
x^2 - x^2 - 2x - 2x &= 4 - 36 \\
-4x &= -32 \qquad \big| : (-4) \\
x &= 8
\end{aligned}$$

Kirjoitetaan potenssilauseke tulona.

Sivujen pituudet ovat 6 cm, 8 cm ja (8 + 2) cm = 10 cm.

VASTAUS

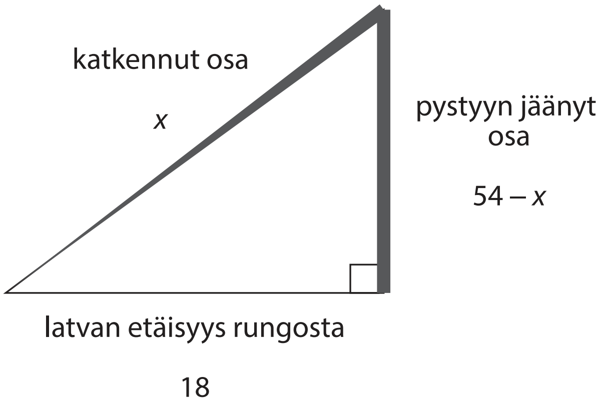
Kolmion sivujen pituudet ovat 6 cm, 8 cm ja 10 cm.

ESIMERKKI 3

Mänty katkeaa voimakkaalla tuulella siten, että latvaosa jää kiinni pystyyn jääneeseen runkoon. Männyn latvus osuu maahan 18 metrin päähän männyn juurelta. Mikä on pystyyn jääneen osan pituus, kun männyn pituus oli ennen katkeamista 54 m?

RATKAISU Piirretään mallikuva ja merkitään kuvaan tunnetut arvot.

- Merkitään puun katkenneen osan pituutta kirjaimella x.
- Koska puun pituus on 54 m, pystyyn jääneen osan pituus on $54 - x$.



Sijoitetaan pituudet x, 18 ja $54 - x$ Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$x^2 + 18^2 = (54 - x)^2 \longleftarrow \boxed{\text{Lauseke } 54 - x \text{ on laitettava sulkuihin.}}$$

$$x = 24$$

Pystyyn jääneen osan pituus on 54 m – 24 m = 30 m.

VASTAUS Pystyyn jääneen osan pituus on 30 m.

Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

$1^2+3^2=(\sqrt{10})^2$

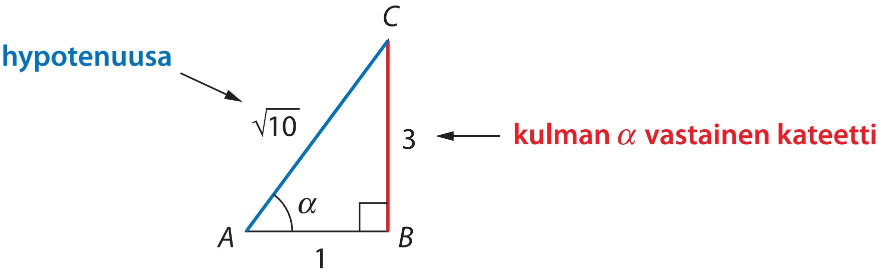
$1+9=10$

$10=10$

tosi

Jos kolmion sivujen pituudet ovat 1, 3 ja $\sqrt{10}$, kolmio on Pythagoraan lauseen käänteislauseen mukaan suorakulmainen.

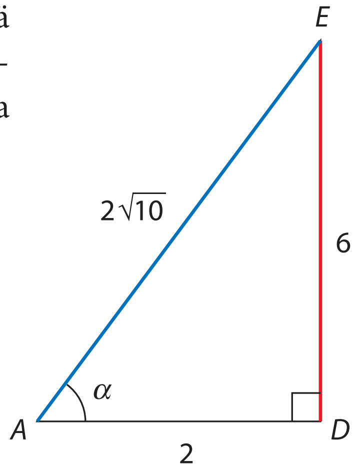
Tarkastellaan suorakulmaisen kolmion *ABC* sivujen välisiä suhteita. Merkitään kirjaimella α sitä kolmion terävää kulmaa, jonka **vastaisen kateetin** pituus on 3. Kulman α **viereisen kateetin** pituus on silloin 1.



Määritetään kolmiolle *ABC* kulman α vastaisen kateetin pituuden ja hypotenuusan pituuden suhde.

$$\frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Suurennetaan kolmiota *ABC* siten, että kaikkien sivujen pituudet kaksinkertaistuvat. Kulman α suuruus ei suurennuksessa muutu.



$$\frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$$

$$=\frac{6}{2\sqrt{10}}^{(2}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Koska kaikkien sivujen pituus on kaksinkertaistunut, sivujen suhde ei muutu.

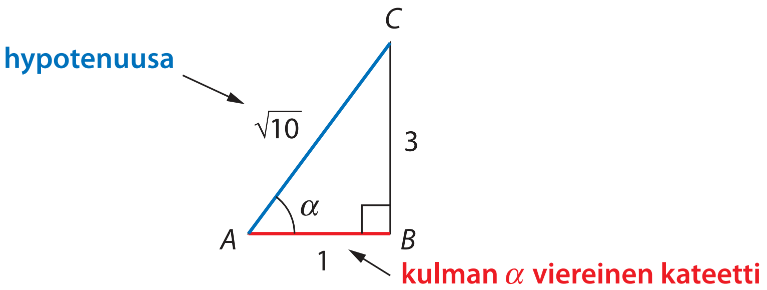
Tarkasteltujen sivujen pituuksien suhde pysyy samana niin kauan, kun suorakulmaisen kolmion kulman α suuruutta ei muuteta.

Näin määriteltyä sivujen suhdetta sanotaan kulman α **siniksi**.

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}}$$

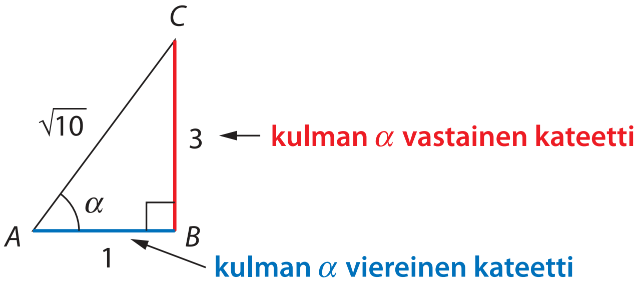
Suorakulmaiselle kolmiolle voidaan määritellä muitakin sivujen suhteita.

- Kulman α viereisen kateetin pituuden ja hypotenuusan pituuden suhdetta sanotaan kulman α **kosiniksi**.


C
hypotenuusa
$\sqrt{10}$
3
α
A
B
1
kulman α viereinen kateetti

$$\cos\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

- Kulman α **tangentti** on kulman vastaisen kateetin pituuden ja kulman viereisen kateetin pituuden suhde.


C
$\sqrt{10}$
3
kulman α vastainen kateetti
α
A
B
1
kulman α viereinen kateetti

$$\tan\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}} = \frac{3}{1} = 3$$

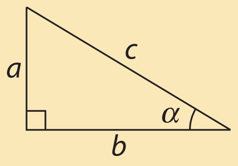
Suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteet riippuvat vain terävän kulman α suuruudesta. Näiden suhteiden arvoja kuvataan **trigonometristen funktioiden** avulla. Tärkeimpiä trigonometrisia funktioita ovat sini, kosini ja tangentti.

Trigonometristen funktioiden avulla ratkaistaan suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia ja kulmien suuruuksia.

- Jos suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan yksi sivu ja yksi terävä kulma, muut sivut voidaan ratkaista.
- Jos suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan kaksi sivua, kolmas sivu ja terävät kulmat voidaan ratkaista.

Sini, kosini ja tangentti

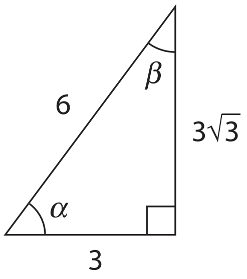
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\tan\alpha = \frac{a}{b}$



- a on kulman α vastaisen kateetin pituus.
- b on kulman α viereisen kateetin pituus.
- c on hypotenuusan pituus.

ESIMERKKI 4

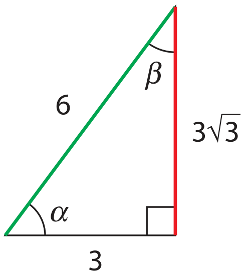
Määritä
a) kulman α sini ja tangentti
b) kulman β kosini ja tangentti.



RATKAISU

a) Sini on vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.

- Kulman α **vastaisen kateetin** pituus on $3\sqrt{3}$.
- Kolmion **hypotenuusan** pituus on 6.

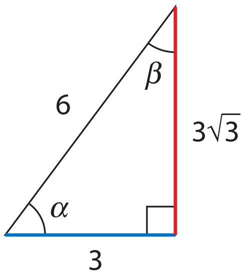


Muista supistaa, jos se on mahdollista.

$$\sin\alpha = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tangentti on vastaisen kateetin ja viereisen kateetin pituuksien suhde.

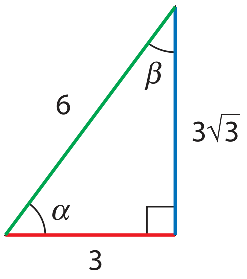
- Kulman α **vastaisen kateetin** pituus on $3\sqrt{3}$.
- Kulman α **viereisen kateetin** pituus on 3.



$$\tan\alpha = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$$

b) Vastainen ja viereinen kateetti määräytyy tarkasteltavan kulman mukaan.

- Kulman β **vastaisen kateetin** pituus on 3.
- Kulman β **viereisen kateetin** pituus on $3\sqrt{3}$.
- Kolmion **hypotenuusan** pituus on 6.



$$\cos\beta = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\beta = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

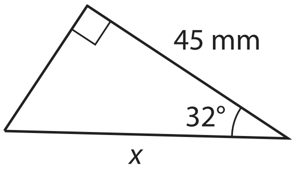
VASTAUS

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\tan\alpha = \sqrt{3}$ $\qquad$ **b)** $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

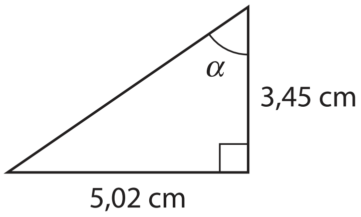
ESIMERKKI 5

Laske

a) sivun pituus x



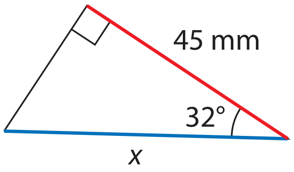
b) kulman α suuruus.



RATKAISU

a) Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 32°.

- Tämän kulman **viereisen kateetin** pituus on 45 mm.
- **Hypotenuusan** pituus on x.



$$\cos\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$$

Sivun pituus x voidaan ratkaista kosinin avulla.

$$\cos 32° = \frac{45}{x}$$

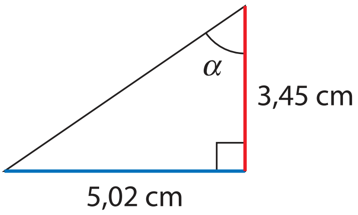
$$x = 53{,}063...$$

$$x \approx 53$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella. Tarkista laskimestasi, että kulman yksikkönä on **aste**.

Sivun pituus x on 53 mm.

b) Kulman α **vastaisen kateetin** pituus on 5,02 cm ja **viereisen kateetin** pituus on 3,45 cm.



$$\tan\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}$$

Kulma α voidaan ratkaista tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{5{,}02}{3{,}45}$$

$$\alpha = 55{,}501...°$$

$$\alpha \approx 55{,}5°$$

Kulman arvo saadaan laskimen toiminnolla $\tan^{-1}\left(\frac{5{,}02}{3{,}45}\right)$.

Kulma α on 55,5°.

VASTAUS **a)** Sivun pituus on 53 mm. **b)** Kulman suuruus on 55,5°.

ESIMERKKI 6

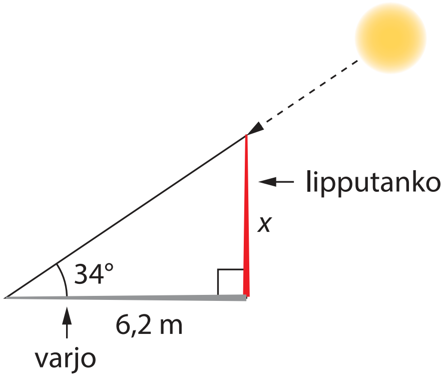
Lipputangon pituuden määrää pystytyspaikka ja ympäristö. Nyrkkisääntönä on, että pituus on n. 1,5-kertainen talonharjan korkeuteen nähden. Tasaisella maalla sijaitsevan talon pihalla on lipputanko.

a) Aamuauringossa lipputangon varjon pituus on 6,2 m, kun auringonsäteet muodostavat 34°:n kulman maanpinnan kanssa. Laske lipputangon korkeus.

b) Henkilö seisoo 140 metrin päässä lipputangosta, jonka korkeus on 8,8 m. Missä kulmassa hän näkee lipputangon? Henkilön pituutta ei tarvitse ottaa huomioon.

RATKAISU

a) Lipputanko, varjo ja auringonsäteet muodostavat suorakulmaisen kolmion.



Merkitään lipputangon korkeutta eli kolmion pystykateetin pituutta kirjaimella x.

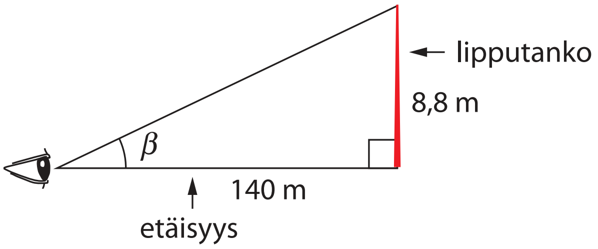
Kolmion sivut x ja 6,2 m ovat kateetteja, joten lipputangon pituus saadaan ratkaistua tangentin avulla.

$$\tan 34° = \frac{x}{6{,}2}$$
$$x = 4{,}181...$$
$$x \approx 4{,}2$$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}$

Lipputangon korkeus on 4,2 m.

b) Henkilön etäisyys ja lipputangon korkeus muodostavat suorakulmaisen kolmion kateetit.



Merkitään kulmaa, jossa lipputanko nähdään, kirjaimella β. Kulma voidaan ratkaista tangentin avulla.

$$\tan\beta = \frac{8{,}8}{140}$$
$$\beta = 3{,}596...° \approx 3{,}6°$$

Kulman arvo saadaan laskimen toiminnolla $\tan^{-1}\left(\frac{8{,}8}{140}\right)$.

Henkilö näkee lipputangon 3,6°:n kulmassa.

VASTAUS

a) Lipputangon korkeus on 4,2 metriä.

b) Henkilö näkee lipputangon 3,6°:n kulmassa.

Trigonometristen funktioiden arvoja on esitetty esimerkiksi erilaisissa taulukoissa. Niiden arvojen etsimiseksi on kehitetty lukuisia menetelmiä. Eräille erikoiskulmille löytyy tarkkoja arvoja MAOL-taulukkokirjasta. Esimerkiksi 30°:n, 45°:n ja 60°:n kulmien sinille, kosinille ja tangentille on taulukossa esitetty tarkat arvot. Näitä käytetään, mikäli apuvälineen käyttö ei ole sallittua.

Kulma	Sini	Kosini	Tangentti
30°	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan 45^\circ = 1$
60°	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

Yleensä trigonometristen funktioiden arvot saadaan laskimen avulla.

Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Kulmanyksikön valinta

Kun ratkaiset trigonometrian tehtäviä, tarkista laskimesi asetuksista, mitä kulmanyksikköä laskin käyttää. Useimmissa laskimissa oletuskulmanyksikkönä on radiaani. Kulmanyksikkö on vaihdettava asteiksi, ennen kuin määritetään kulmia tai sivuja.

Trigonometrisen funktion arvo

Kaikkien kulmien sinin, kosinin ja tangentin arvot saadaan laskimen toiminnolla **sin**, **cos** ja **tan**.

Sivun pituuden ratkaiseminen

Jos määritetään suorakulmaisen kolmion sivun pituutta trigonometrisen funktion avulla, on kolmiosta tunnettava yksi terävä kulma. Tällöin muodostetaan yhtälö sopivan trigonometrisen funktion avulla. Yhtälö ratkaistaan laskimella kuten kaikki muutkin yhtälöt.

Kulman ratkaiseminen

Jos suorakulmaisen kolmion kaksi sivua tunnetaan, voidaan laskimen avulla ratkaista kolmion kulmien suuruudet. Suorakulmaisen kolmion terävän kulman ratkaisemisessa ei yleensä kannata käyttää yhtälönratkaisutoimintoa, koska ratkaisujen tulkitseminen voi olla hankalaa. Laskimista löytyy erilliset näppäimet $\mathbf{sin}^{-1}$, $\mathbf{cos}^{-1}$ ja $\mathbf{tan}^{-1}$ kulman määrittämiseen.

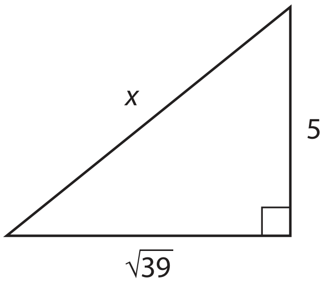
Tehtävät

Pythagoraan lause

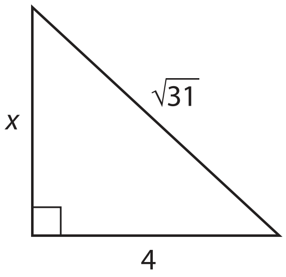
E1

97. Laske sivun pituuden *x* tarkka arvo.

a)

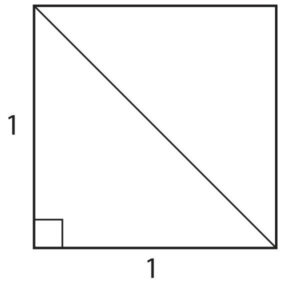


b)

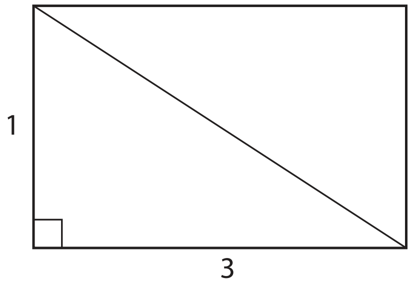


98. Laske nelikulmion lävistäjän pituuden tarkka arvo.

a)

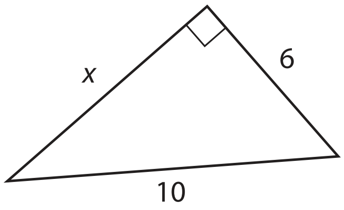


b)

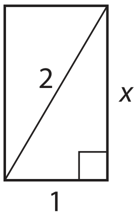


99. Ratkaise sivun pituus *x*.

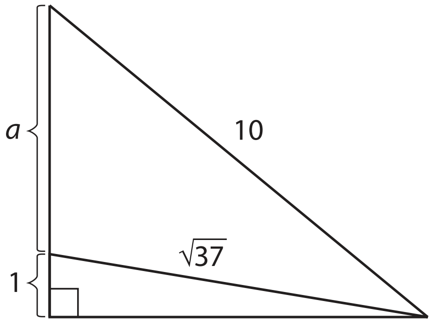
a)



b)



100. Laske pituuden *a* tarkka arvo.



101. Kolmion kateettien pituudet ovat 3 ja 4. Laske hypotenuusan pituus.

102. Neliön lävistäjän pituus on 4. Mikä on neliön sivun pituus?

103. Kolmion sivujen pituudet ovat $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ ja 3. Osoita, että kolmio on suorakulmainen.

104. Tutki, onko kolmio suorakulmainen, kun kolmion sivujen pituuden ovat

a) 6 cm, 8 cm ja 10 cm **b)** 5 cm, 2 cm ja 1 cm.

E2 **105.** Suorakulmion kanta on 3 pituusyksikköä suurempi kuin korkeus. Laske sivujen pituuksien tarkat arvot, kun lävistäjän pituus on $\sqrt{17}$.

106. Suorakulmaisen kolmion kateettien suhde on 3 : 4. Mitkä ovat kateettien pituudet, kun hypotenuusan pituus on 10?

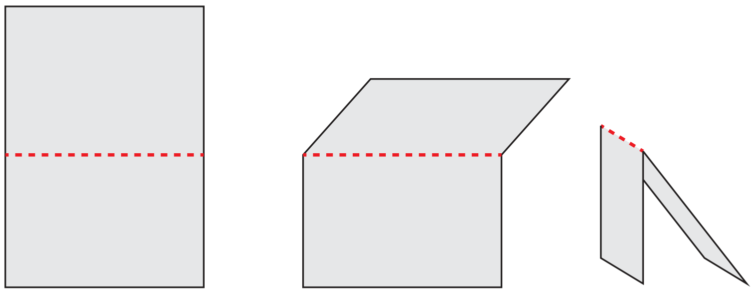
---

107. **a)** Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 124 mm ja 235 mm. Laske hypotenuusan pituus.

b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 5,2 m ja kateetin pituus 2,7 m. Laske toisen kateetin pituus 0,1 metrin tarkkuudella.

108. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 3,5 m ja toisen kateetin pituus on 2,2 m. Määritä kolmion piiri ja pinta-ala.

E3 **109.** A4-kokoinen kartonki taitetaan kahtia lyhyemmän sivun suuntaisesti. Kun kartongin alaosa on pystyssä kohtisuorassa pöytää vastaan, sen yläosan reuna osuu juuri pöytään. Tällöin yläreunan ja alareunan etäisyys toisistaan on 72 mm. Kuinka monen millimetrin päästä yläreunasta kartonki on taitettu, kun kartongin mitat ovat 210 mm × 297 mm?



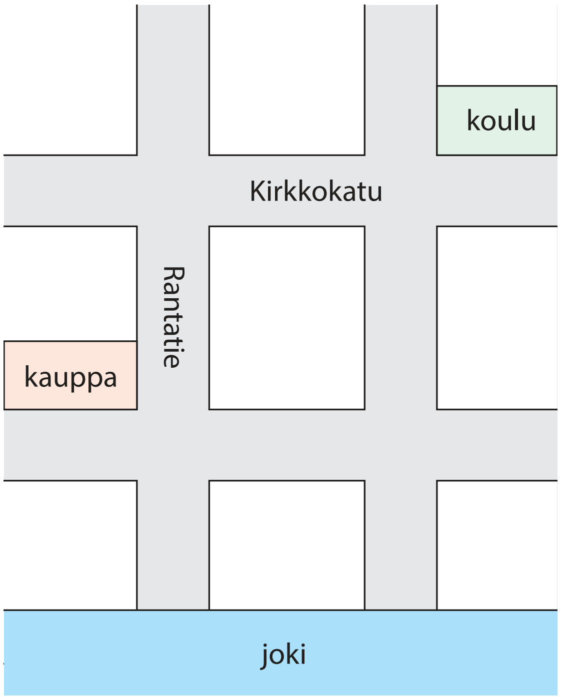
110. Puutarhuri haluaa aidata puutarhaan suorakulmaisen kolmion muotoisen istutusalueen. Alueen pisimmän sivun pituus on 4,5 m. Kuinka pitkiä ovat alueen muut sivut, kun aidattavan alueen piiri on 10,5 m?

111. Kaksi lentokonetta lähtee yhtä aikaa liikkeelle kaupungista *A*. Toinen koneista lentää ensin 455 km pohjoiseen kaupunkiin *B*, josta jatkaa sitten 248 km itään kaupunkiin *C*. Koneen keskinopeus matkalla on 760 km/h. Toinen lentokone lentää suoraan kaupungista *A* kaupunkiin *C*. Koneen keskinopeus lennolla on 650 km/h. Kumpi koneista saapuu aikaisemmin kaupunkiin *C*? Kuinka monta minuuttia aikaisemmin nopeampi kone saapuu kaupunkiin *C*?

112. Kaupungin keskustan asemakaava muodostuu toisiaan vastaan kohtisuorassa olevista kaduista. Nea lähtee koulusta kauppaan kulkemalla 830 m ensin suoraan länteen pitkin Kirkkokatua. Kirkkokadulta hän kääntyy Rantatielle, jota pitkin hän kävelee 670 m suoraan etelään, kunnes saapuu perille.

a) Kuinka kaukana linnuntietä pitkin mitattuna Nea on tällöin koulusta?

b) Nea jatkaa Rantatietä suoraan etelään ja päätyy joen rantaan. Kuinka pitkä matka on kaupasta joelle, kun koulun etäisyys joen rannasta on linnuntietä pitkin mitattuna 1,3 km?



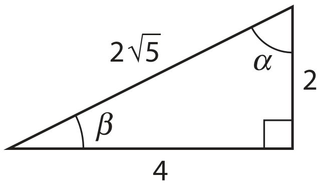
Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

E4

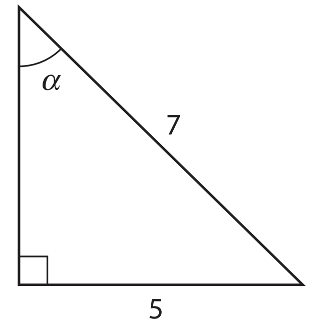
113. Määritä kulman

a) α kosini ja tangentti

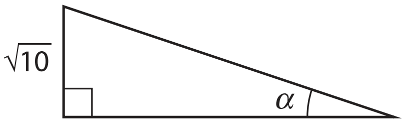
b) β sini ja kosini.


$2\sqrt{5}$
α
2
β
4

114. Määritä kulman α sini, kosini ja tangentti.



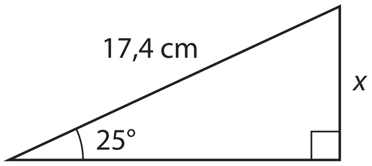
115. Suorakulmaisen kolmion lyhyemmän kateetin pituus on $\sqrt{10}$ ja $\tan\alpha = \frac{1}{3}$. Laske kolmion muiden sivujen pituudet.


$\sqrt{10}$
α

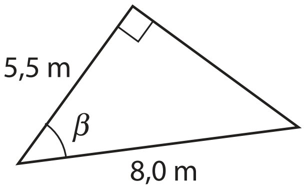
E5

116. Laske

a) sivun pituus x



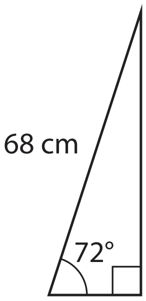
b) kulman β suuruus.


5,5 m
β
8,0 m

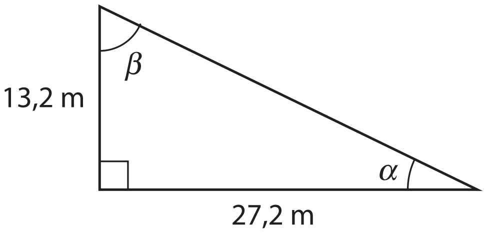
117. Laske kolmion

a) kateettien pituudet

b) pinta-ala.



118. Laske kolmion terävien kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.



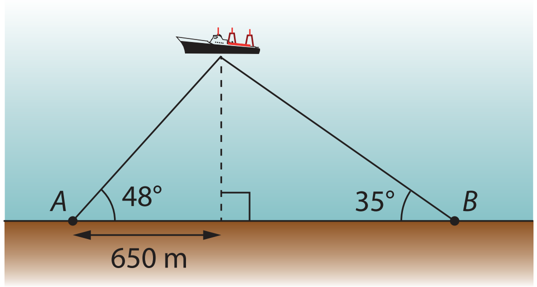
119. Suorakulmaisen kolmion terävän kulman suuruus on 18°. Tämän kulman vastaisen sivun pituus on 1,5 cm. Laske kolmion muiden sivujen pituudet.

120. Kolmiomittaus on tärkeä maanmittausmenetelmä, joka kehitettiin Hollannissa 1600-luvulla. Sitä voi käyttää, kun määritetään esimerkiksi laivan etäisyyttä rannasta. Kuvassa kaksi henkilöä seisoo rannalla pisteissä *A* ja *B*. Määritä

a) laivan etäisyys rannasta

b) pisteessä *A* seisovan henkilön etäisyys laivasta

c) kahden rannalla seisovan henkilön välinen etäisyys.



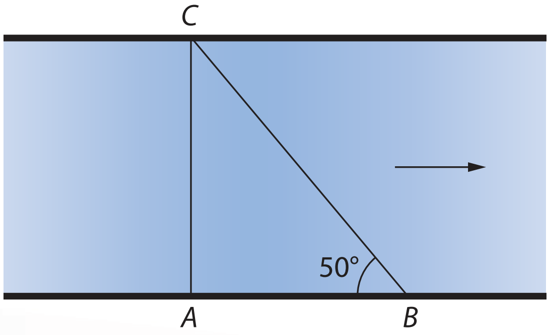
121. Tikapuut nojaavat seinää vasten siten, että tikapuiden ja maanpinnan väliin muodostuu 72 asteen kulma. Kuinka korkealla tikapuiden yläpää on, kun tikapuiden pituus on 3,9 m?

E6 **122.** Sauli seisoo Eiffel-tornin ensimmäisellä tasanteella. Alexander seisoo alhaalla 150 metrin päässä tornista ja katsoo Saulia. Hän näkee Saulin 20,8 asteen kulmassa.

a) Kuinka korkealla on ensimmäinen tasanne?

b) Petteri seisoo 346 metrin päässä tornista. Eiffel-tornin korkeus on 324 m antennin huippuun saakka mitattuna. Missä kulmassa Petteri näkee tornin?

123. Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä *A* kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä *C*. Pisteestä *A* hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen *B*, josta katsottuna vastarannan piste *C* näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys *AC* metrin tarkkuudella. [K2012, 6]

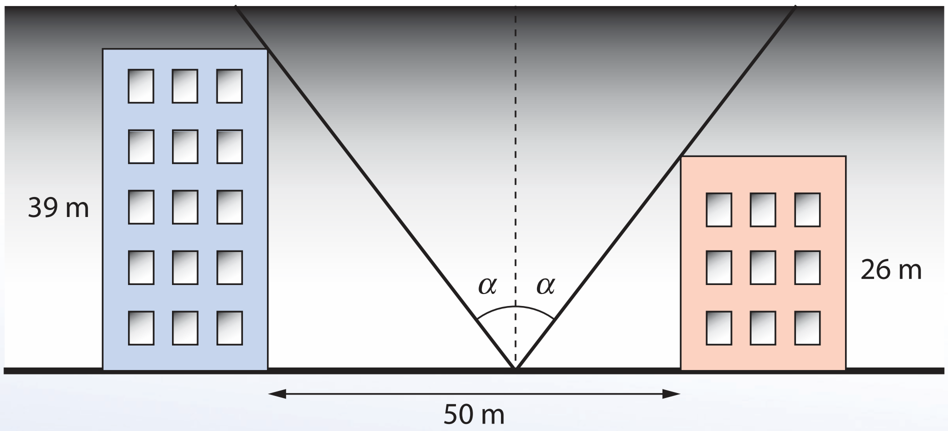


124. Laskeutuva lentokone lähestyy kiitorataa. Lentokone on 138 metrin korkeudella maan pinnasta, kun kiitoradalla olevan henkilön etäisyys koneesta on linnuntietä pitkin 1,80 km. Missä kulmassa henkilö näkee lentokoneen?

125. Kolin laskettelukeskuksessa on tuolihissikuljetus rinteen huipulle. Huippu sijaitsee 212 metrin korkeudessa ja rinteen kaltevuuskulma on 4,6°. Jos hissin nopeus olisi 18 km/h, kuinka kauan matka huipulle kestäisi? Anna vastaus minuutteina ja sekunteina.

126. Tuure käy syksyisin marjastamassa aina samassa paikassa. Hän pysäköi auton tien varteen ja kävelee pysäköintipaikasta ensin 1,2 km suoraan itään. Tämän jälkeen hän kääntyy kulkusuuntaan nähden 30 astetta kohti pohjoista. Kun Tuure jatkaa kulkua tähän suuntaan 750 m, hän saapuu marjapaikalle. Kuinka kaukana autosta linnuntietä pitkin mitattuna Tuuren marjapaikka sijaitsee?

127. Tähtiharrastaja katselee yöllisiä tähdenlentoja pihalla, joka sijaitsee kahden kerrostalon välissä kuvan mukaisesti. Talojen korkeudet ovat 39 m ja 26 m. Kuinka kaukana korkeammasta talosta molempiin suuntiin avautuu yhtä suuri kulma α maanpinnan tasosta katsottuna? [K2013, 5]



128. Olympiastadionin torni on yksi tunnetuimmista maamerkeistä Helsingissä. Henkilö näkee tornin edessään 6,3°:n kulmassa. Kun hän siirtyy suoraan 350 m lähemmäksi tornia, hän näkee sen 13,5°:n kulmassa.

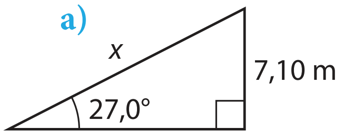
a) Kuinka kaukana henkilö on tornista siirtymisen jälkeen?

b) Laske tornin korkeus.

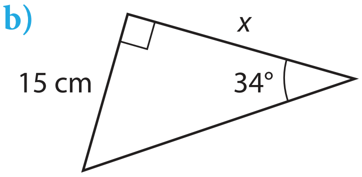
Sekalaisia

129. Määritä sivun pituus x.

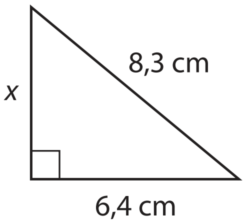
a)



b)



c)



130. Suorakulmaisen kolmion lyhyemmän kateetin pituus on 4,5 cm ja hypotenuusan pituus 8,7 cm. Laske

a) toisen kateetin pituus

b) kolmion terävien kulmien suuruudet

c) kolmion pinta-ala.

131. ”Verrückt” on Kansasissa sijaitseva maailman pisin ja korkein vesiliukumäki. Radan alkuosan pituus huipulta maanpintaan on 59 m ja alkuosan jyrkkyys on 60°. Laske liukumäen korkeus.

132. Suunnistaja juoksee ensimmäiseltä rastilta suoraan etelään 2,8 km. Tämän jälkeen hän kääntyy ja juoksee suoraan länteen, kunnes hän päätyy toiselle rastille. Ensimmäisen ja toisen rastin etäisyys linnuntietä mitattuna on 3,1 km.

a) Kuinka pitkän matkan suunnistaja juoksee kääntymisen jälkeen länteen ennen kuin hän saapuu toiselle rastille?

b) Jos suunnistaja haluaisi palata takaisin ensimmäiselle rastille suorinta mahdollista reittiä, niin kuinka suuren kulman juoksijan kulkusuunta muodostaisi pohjoisen kanssa?

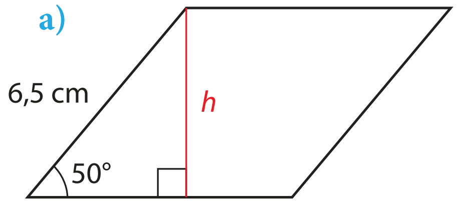
133. Suorakulmaisen kolmion piiri on 240 cm. Hypotenuusan pituus on 100 cm. Laske kolmion kateettien pituudet.

2.2 Suorakulmainen kolmio ja monikulmiot

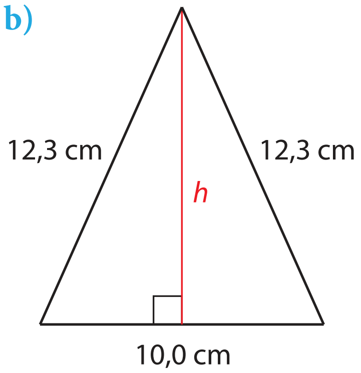
Pohdinta

Laske seuraavien kuvioiden korkeus.

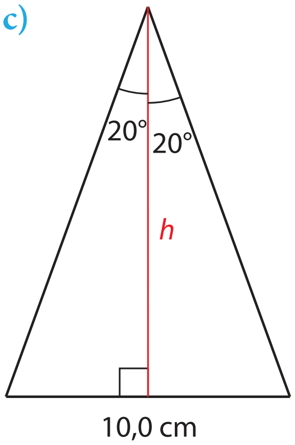
a)



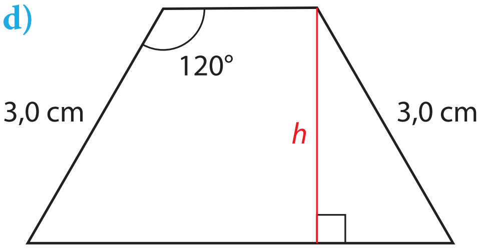
b)


12,3 cm
12,3 cm
h
10,0 cm

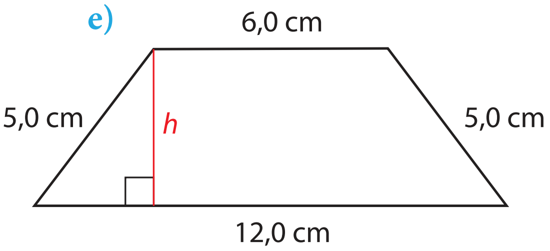
c)


20°
20°
h
10,0 cm

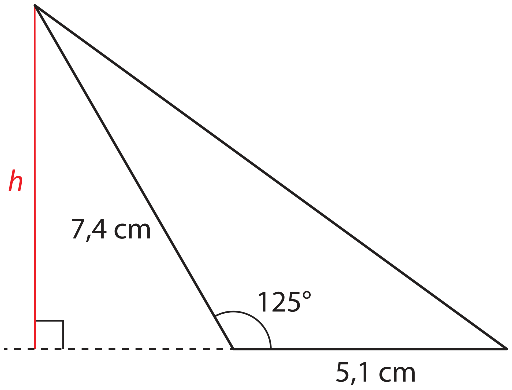
d)


120°
3,0 cm
3,0 cm
h

e)


6,0 cm
5,0 cm
5,0 cm
h
12,0 cm

f)


h
7,4 cm
125°
5,1 cm

Sana geometria tulee kreikan kielen sanasta ”γεωμετρία”, joka tarkoittaa maanmittausta.

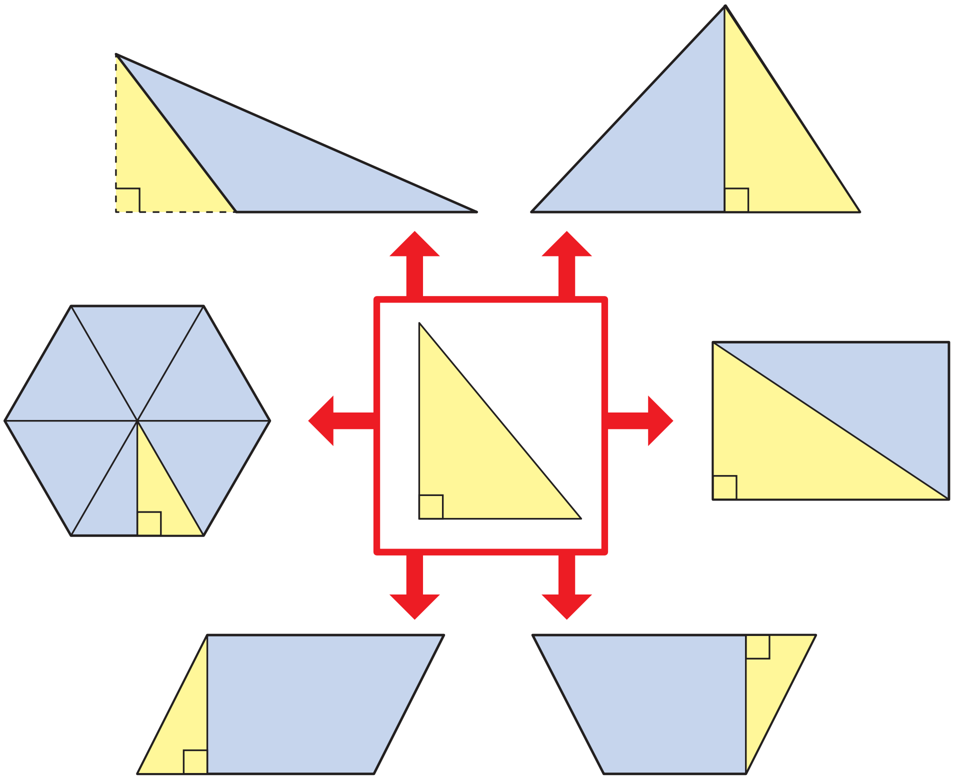
Geometriassa tutkitaan kuvioita ja kappaleita. Monikulmiot ja niiden ominaisuudet ovat tärkeä osa geometriaa.

Tasogeometrian tehtävissä lasketaan monikulmioiden
- sivujen ja lävistäjien pituuksia
- sivujen välisiä kulmia
- piirejä
- pinta-aloja.

Monikulmioista tärkein on suorakulmainen kolmio. Sen kulmia ja sivujen pituuksia voidaan laskea Pythagoraan lauseen ja trigonometristen funktioiden avulla.

Lisämateriaali: Säännölliset monikulmiot s. 171

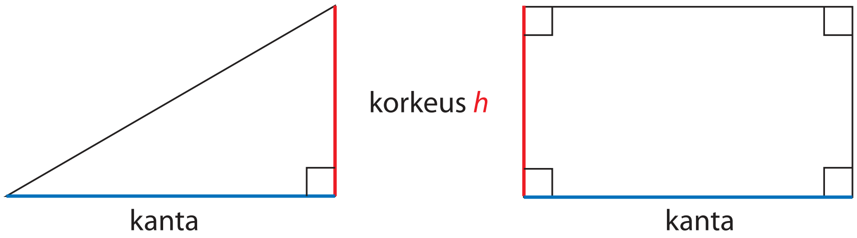
Suorakulmainen kolmio löytyy myös monen monikulmion sisältä tai monikulmiota täydennetään suorakulmaisella kolmiolla.



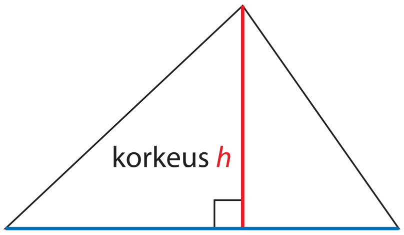
Suorakulmaista kolmiota hyödynnetään usein kuvioiden **korkeusjanan** pituuden määrittämisessä. Korkeusjanaa tarvitaan, kun esimerkiksi lasketaan erilaisten kuvioiden pinta-aloja.

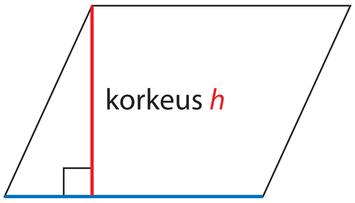
Koska suorakulmiossa ja suorakulmaisessa kolmiossa kahden sivun väliin muodostuu 90°:n kulma, korkeusjanaksi voidaan valita toinen näistä sivuista.

Korkeusjanan pituutta merkitään usein kirjaimella *h*.

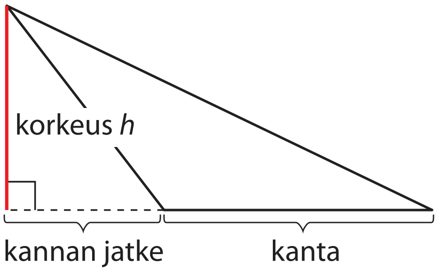


Muiden kolmioiden ja nelikulmioiden kohdalla korkeusjana sijaitsee joko kuvion sisä- tai ulkopuolella. Koska korkeusjana on kohtisuorassa kantasivua vastaan, kuvioihin muodostuu aina 90°:n kulma.





Korkeusjana piirretään kannan vastaisesta kärjestä kohtisuoraan kantaa vastaan. Jossakin tilanteissa korkeusjana voi sijaita kuvion ulkopuolella. Tällöin korkeusjana on kohtisuorassa kannan **jatketta vastaan**.



Kuvion korkeuden määrittämiseksi tehtävässä kannattaa edetä seuraavasti:

❶ Piirrä tarvittaessa mallikuva tai käytä tehtävän valmista kuvaa.

❷ Piirrä kuvioon korkeusjana niin, että saat muodostettua korkeusjanan avulla kuvioon suorakulmaisen kolmion.

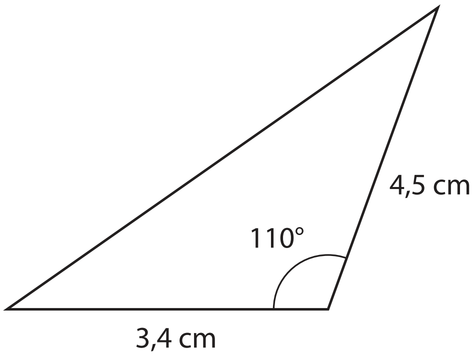
❸ Täydennä kuvioon tehtävässä annetut tiedot.

Vastaavalla tavalla suorakulmaisen kolmion avulla voidaan ratkaista muitakin sivujen pituuksia ja kulmia.

❹ Ratkaise korkeus suorakulmaisesta kolmiosta joko Pythagoraan lauseen tai trigonometristen funktioiden avulla.

ESIMERKKI 1

Laske kolmion pinta-ala.

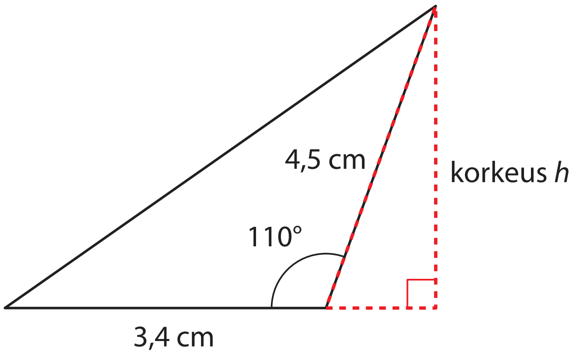


RATKAISU

Pinta-alan laskemiseen tarvitaan kolmion kannan ja korkeusjanan pituudet.

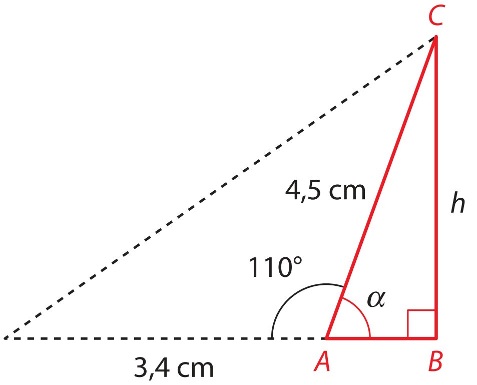
Valitaan kolmion kannaksi sivu, jonka pituus on 3,4 cm.

Kolmion korkeusjana on kolmion ulkopuolella kohtisuorassa kannan jatketta vastaan.



Merkitään muodostuneen suorakulmaisen kolmion kärkipisteitä kirjaimilla *A*, *B* ja *C*.

Kolmiossa *ABC* hypotenuusan pituus on 4,5 cm. Korkeuden *h* ratkaisemiseen tarvitaan lisäksi joko kateetin *AB* pituus tai kulma α.



Lisämateriaali: Erilaisia kulmia s. 165

Koska kulma α ja 110°:n kulma ovat toistensa vieruskulmia, niiden summa on 180°.

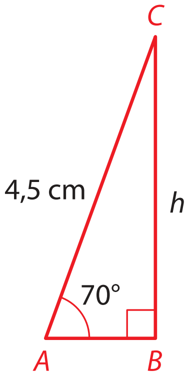
$$\alpha = 180° - 110° = 70°$$

Ratkaistaan kolmion korkeus *h* sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{\text{vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$$

$$\sin 70° = \frac{h}{4{,}5}$$

$$h = 4{,}2286...$$



Lasketaan alkuperäisen kolmion pinta-ala.

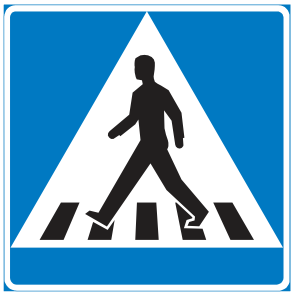
Muista käyttää laskuissa pyöristämättömiä arvoja.

$$A = \frac{3{,}4\text{ cm} \cdot 4{,}2286...\text{ cm}}{2} = 7{,}1886...\text{ cm}^2 \approx 7{,}2\text{ cm}^2$$

VASTAUS Kolmion pinta-ala on 7,2 cm^2.

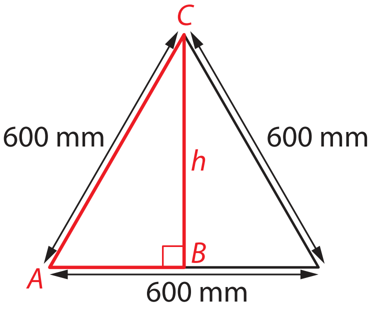
ESIMERKKI 2

Suojatiemerkissä on neliön sisälle piirretty tasasivuinen kolmio. Neliön sivun pituus on 600 mm. Kuinka monta prosenttia liikennemerkin pinta-alasta on sinistä?



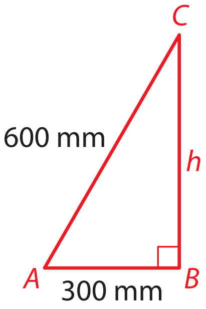
RATKAISU

Neliön sisälle piirretyn tasasivuisen kolmion sivun pituus on sama kuin neliön sivun pituus. Koska kolmio on tasasivuinen, korkeusjana puolittaa kantasivun. Suorakulmaisen kolmion kannan pituus:



$$AB = \frac{600\text{ mm}}{2} = 300\text{ mm}.$$

Lasketaan kolmion korkeus suorakulmaisesta kolmiosta *ABC* Pythagoraan lauseen avulla.



$$h^2 + 300^2 = 600^2$$
$$h = \pm 300\sqrt{3}$$

Korkeus on aina positiivinen, joten

$$h = 300\sqrt{3}\text{ mm} = 519{,}615...\text{ mm}.$$

Jos käytät laskuissa desimaalilukuja, niin käytä pyöristämättömiä arvoja. Muista, että laskin näyttää vain osan päättymättömän luvun desimaaleista.

Lasketaan tasasivuisen kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{600\text{ mm}\cdot 300\sqrt{3}\text{ mm}}{2}$$
$$= 90\,000\sqrt{3}\text{ mm}^2$$
$$= 155\,884{,}57...\text{ mm}^2$$

Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_{\text{neliö}} = 600\text{ mm}\cdot 600\text{ mm}$$
$$= 360\,000\text{ mm}^2$$

Sinisen alueen pinta-ala on neliön ja kolmion pinta-alojen erotus.

$$A_{\text{sininen}} = A_{\text{neliö}} - A_{\text{kolmio}}$$
$$= 360\,000\text{ mm}^2 - 90\,000\sqrt{3}\text{ mm}^2$$
$$= 204\,115{,}42...\text{ mm}^2$$

Verrataan sinisen alueen pinta-alan osuutta koko neliön pinta-alaan.

Kopioi laskimella lausekkeen pyöristämätön arvo.

$$\frac{A_{\text{sininen}}}{A_{\text{neliö}}} = \frac{(360\,000 - 90\,000\sqrt{3})\text{ mm}^2}{360\,000\text{ mm}^2} = 0{,}56698... \approx 57\ \%$$

VASTAUS

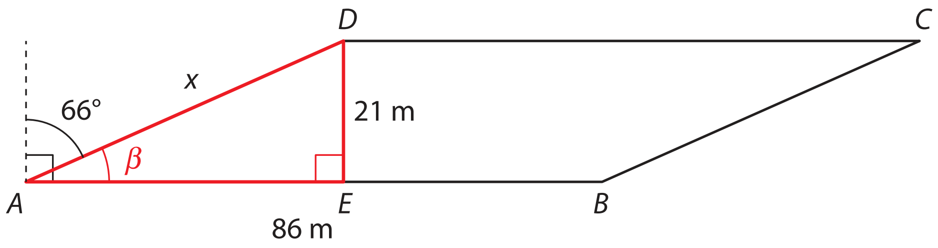
Liikennemerkin pinta-alasta on 57 % sinistä.

ESIMERKKI 3

Hampurissa Saksassa sijaitsevan Docklandin toimistorakennuksen julkisivu on suunnikkaan muotoinen. Rakennus sijaitsee Elbe-joen varrella. Osa rakennuksesta kallistuu joen päälle niin, että rakennuksen kallistuma pystysuoraan rakennukseen verrattuna on 66°. Rakennuksen korkeus on 21 m ja jokaisen kerroksen pituus 86 m. Rakennuksen katolla on näköalatasanne, jonne pääsee kaltevaa seinää pitkin kulkevia portaita. Laske portaikon pituus.

RATKAISU

Piirretään ensin mallikuva. Portaikon pituus on janan *AD* pituus. Merkitään sitä kirjaimella *x*.



Suunnikkaan kulma β muodostaa 66 asteen kulman kanssa suoran kulman.

$$\beta = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ$$

Suunnikkaan sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio *AED*. Lasketaan kolmion avulla rakennuksen kaltevan seinän pituus *x*.

$$\sin 24^\circ = \frac{21}{x}$$

$$x = 51{,}6304...$$

$$x \approx 51\ (\mathrm{m})$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$$

Portaikon pituus on 51 m.

VASTAUS

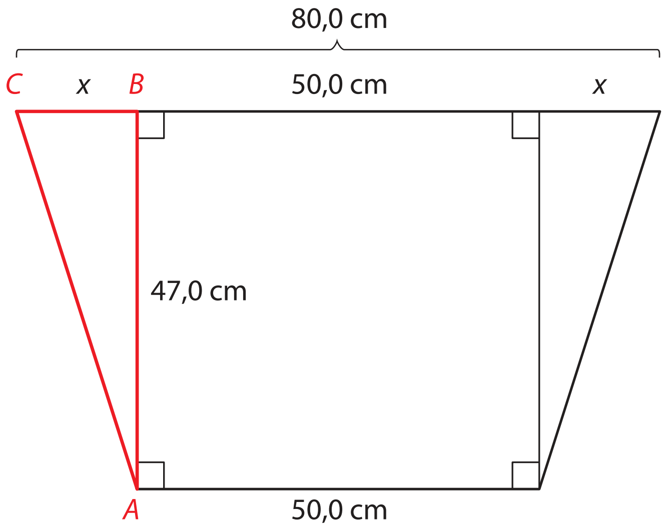
Portaikon pituus on 51 m.

ESIMERKKI 4

Valma osti kesälomamatkallaan rantakassin, jonka poikkileikkaus on tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoinen. Pohjan pituus on 50,0 cm, suuaukon pituus 80,0 cm ja kassin syvyys 47,0 cm. Laske kassin pohjan ja kaltevan reunan välisen kulman suuruus asteen tarkkuudella.

RATKAISU Tasakylkinen puolisuunnikas koostuu yhdestä suorakulmiosta ja kahdesta keskenään samanlaisesta suorakulmaisesta kolmiosta.

Merkitään yhden kolmion vaakasuoran kateetin pituutta kirjaimella x.

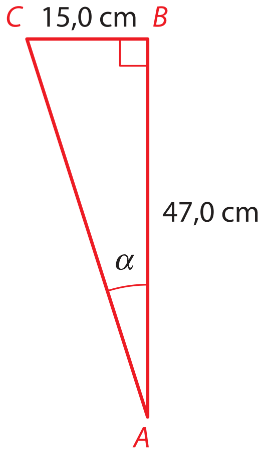


Muodostetaan yhtälö suuaukon pituudesta ja ratkaistaan siitä x.

$$2x + 50{,}0 = 80{,}0$$

$$x = 15{,}0 \quad \text{(cm)}$$

Ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta ABC kulma α.



Laskimella kulman saa toiminnolla: $\tan^{-1}\left(\frac{15{,}0}{47{,}0}\right)$.

$$\tan\alpha = \frac{15{,}0\text{ cm}}{47{,}0\text{ cm}}$$

$$\alpha = 17{,}70...°$$

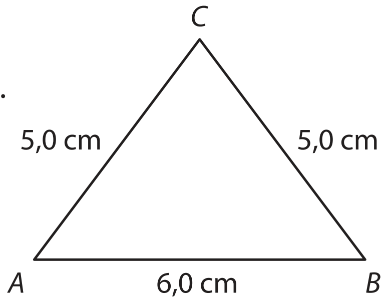
Puolisuunnikkaan pohjan ja kaltevan reunan välisen kulman suuruus on

$$17{,}70\ldots° + 90° = 107{,}70\ldots° \approx 108°.$$

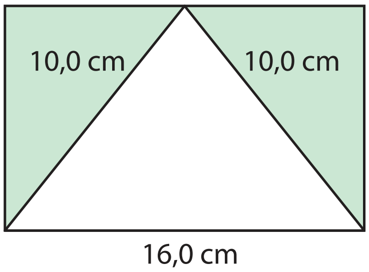
VASTAUS Pohjan ja kaltevan reunan välinen kulma on 108°.

Tehtävät

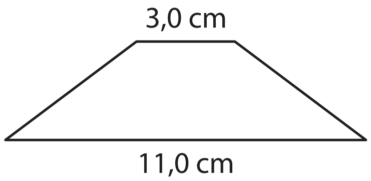
134. Tarkastellaan tasakylkistä kolmiota *ABC*. Laske kolmion
a) korkeus
b) pinta-ala.


C
5,0 cm
5,0 cm
A
6,0 cm
B

135. Laske väritetyn alueen pinta-ala.


10,0 cm
10,0 cm
16,0 cm

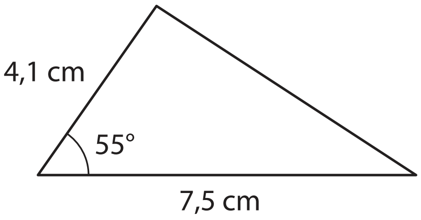
136. Tasakylkisen puolisuunnikkaan pinta-ala on 21 cm^2. Laske puolisuunnikkaan piiri.



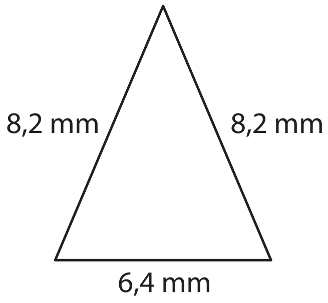
---

137. Laske kolmion korkeus.

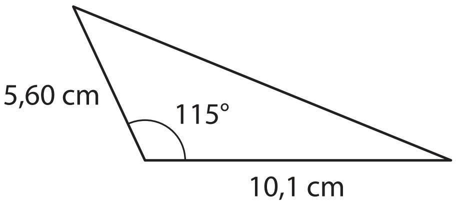
a)


4,1 cm
55°
7,5 cm

b)

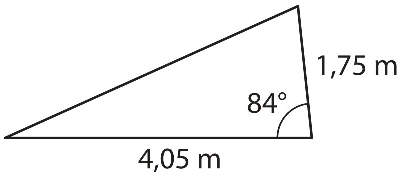

8,2 mm
8,2 mm
6,4 mm

E1 **138.** Laske kolmion pinta-ala.

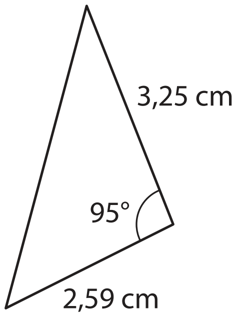

5,60 cm
115°
10,1 cm

139. Laske tasokuvion pinta-ala.

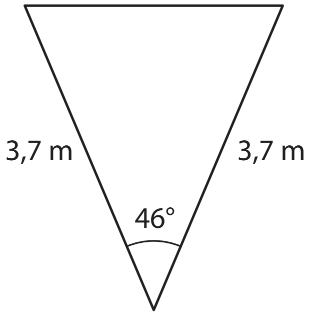
a)


1,75 m
84°
4,05 m

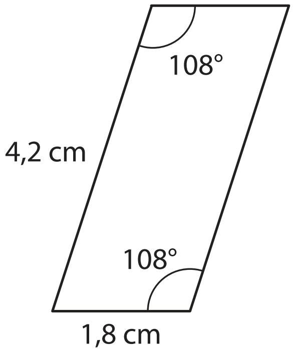
b)


3,25 cm
95°
2,59 cm

c)

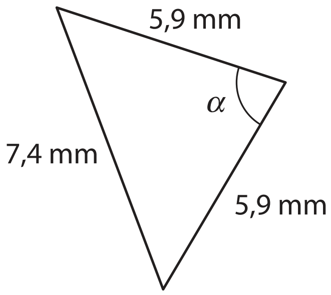


d)

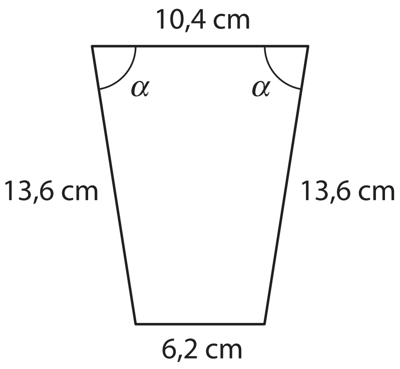

108°
4,2 cm
108°
1,8 cm

140. Laske kulman α suuruus.

a)

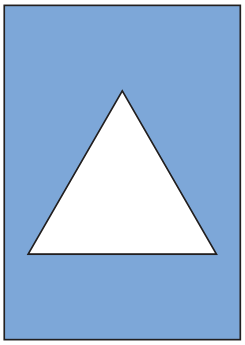

5,9 mm
α
7,4 mm
5,9 mm

b)


10,4 cm
α
α
13,6 cm
13,6 cm
6,2 cm

E2

141. A5-kokoisesta paperiarkista leikataan pois tasasivuisen kolmion muotoinen pala. Kolmion sivun pituus on 80 % paperiarkin lyhyemmän sivun pituudesta. Kuinka monta prosenttia paperin pinta-ala pienenee, kun A5-paperiarkin mitat ovat 148 mm × 210 mm?



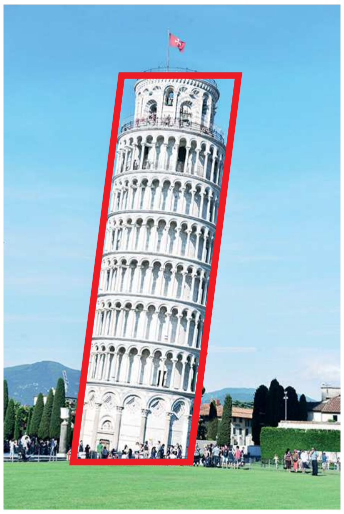
142. Tasasivuisen kolmion piiri on 12,0 cm. Laske kolmion pinta-ala.

143. Tasakylkisen kolmion sivujen pituudet ovat 52 mm, 72 mm ja 72 mm. Laske

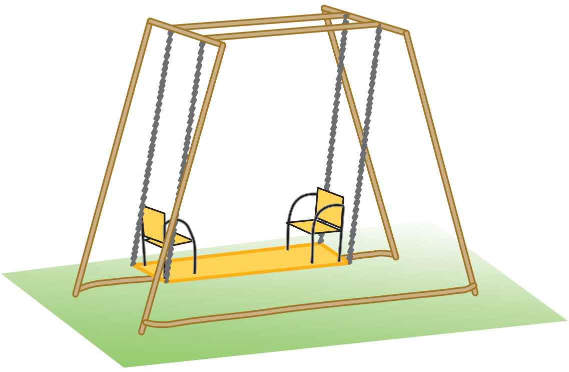
a) kolmion pinta-ala. Ilmoita vastaus neliösenttimetreinä.

b) kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

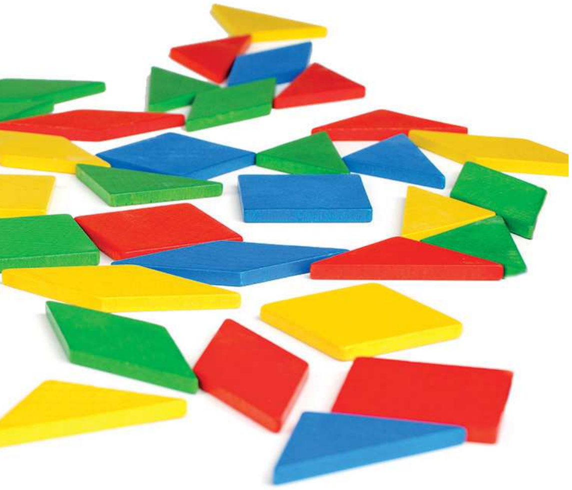
E3 **144.** Pisan tornin kallistuma (pystysuoraan rakennukseen verrattuna) on 3,97 astetta. Tornin korkeus korkeammalla olevan reunan puolelta on 56,70 m. Mallinnetaan tornin poikkileikkausta suunnikkaan avulla niin, että suunnikkaan korkeus on edellä mainittu tornin korkeus. Arvioi tämän mallin mukaan tornin kaltevan seinän pituus. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



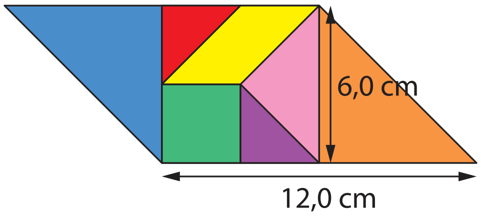
145. Kun kuvan keinu ei ole liikkeessä, sen etäisyys maanpinnasta on 15 cm. Keinun istuimet ovat kiinni pohjalevyssä, jonka mitat ovat 1,75 m × 0,80 m. Pohjalevy on kiinni ylätangoissa kannatinvaijereilla, joiden pituus on 2,40 m. Kuinka suuri on pohjalevyn etäisyys maanpinnasta silloin, kun keinu on asennossa, jossa kannatinvaijerin ja pohjalevyn välinen kulma on 75°?



146. Neljäkkään (vinoneliön) sivun pituus on 8,0 cm. Lyhyempi lävistäjistä on 4,0 cm pitkä. Laske pitemmän lävistäjän pituus. [K2009, 7]



147. Tangram-palapelissä pienemmistä palasista kootun ison suunnikkaan kanta on 12,0 cm ja korkeus 6,0 cm. Kuinka monta prosenttia pienen keltaisen suunnikkaan piiri on ison suunnikkaan piiristä, kun vihreän neliön sivun pituus on 3,0 cm?

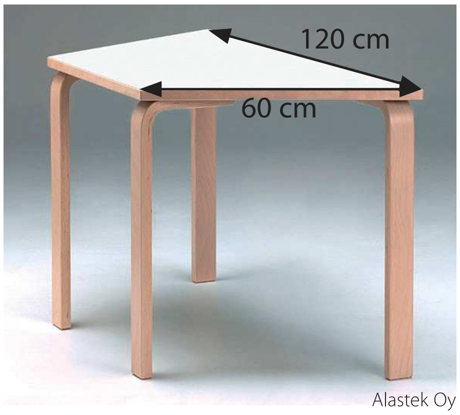


E4 **148.** Koulun pihalle tehtiin tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoiset istutuslaatikot, joihin istutettiin erilaisia hyötykasveja. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet olivat 1,7 m ja 50,0 cm.

a) Laske yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys, kun istutusalueen pinta-ala on 2,2 m^2.

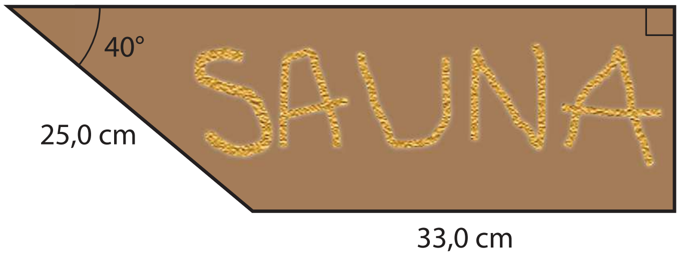
b) Laske puolisuunnikkaan kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

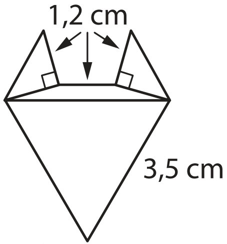
149. ”Mini”-sarjan pöytään voi saada tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoisen pöytälevyn. Puolisuunnikkaan pidempi sivu on pituudeltaan 120 cm ja sivujanan pituus on 60 cm. Mikä on pöydän pinta-ala, jos yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys on 50 cm?

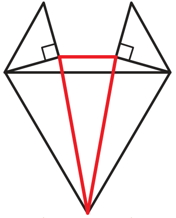


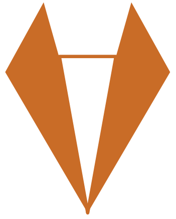
Alastek Oy

150. Lapset valmistivat kesämökille kuvan mukaisen puolisuunnikkaan muotoisen opaskyltin. Laske kyltin pinta-ala.









151. Monien eläinhahmojen piirtämisessä käytetään apuna erilaisia geometrisia kuvioita. Esimerkiksi ketun pää voidaan piirtää puolisuunnikkaan ja kolmioiden avulla.

a) Piirretään ensin tasasivuinen kolmio, kaksi tasakylkistä suorakulmaista kolmiota sekä tasakylkinen puolisuunnikas. Laske puolisuunnikkaan korkeus.

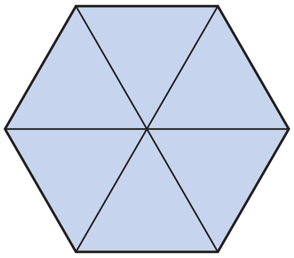
b) Seuraavaksi piirretään tasakylkinen kolmio kuvan osoittamalla tavalla. Laske piirretyn tasakylkisen kolmion pinta-ala.

c) Kuvasta väritetään ruskealla kaikki muut osat paitsi viimeiseksi piirretty tasakylkinen kolmio. Kuinka monta prosenttia ketun pään pinta-alasta on ruskeaa?

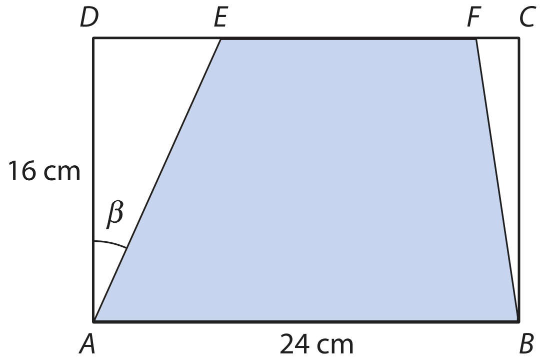
152. Kolmion sivujen pituudet ovat 3,90 cm, 6,18 cm ja 5,40 cm. Kolmion pinta-ala on 10,41 cm^2. Määritä kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

Lisämateriaali: Säännölliset monikulmiot s. 171

153. Säännöllisten monikulmioiden pinta-alat voidaan laskea jakamalla monikulmio kuvan mukaisesti kolmioiksi. Säännöllisen kuusikulmion sivun pituus on 14,8 cm. Laske kuusikulmion pinta-ala.



154. Suorakulmion *ABCD* kanta on 24 cm ja korkeus 16 cm. Sivulta *DC* valitaan kaksi pistettä *E* ja *F*. Nämä pisteet jakavat janan *DC* siten, että janan *DE* pituus on kolminkertainen janan *FC* pituuteen verrattuna ja toisaalta janan *DE* pituus on puolet janan *EF* pituudesta.



a) Määritä puolisuunnikkaan *ABFE* pinta-ala.

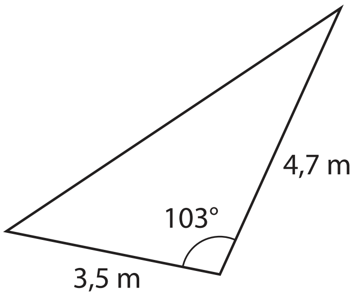
b) Määritä puolisuunnikkaan *ABFE* piiri.

c) Määritä kulma β.

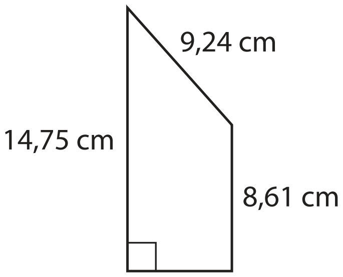
Sekalaisia

155. Laske tasokuvion pinta-ala.

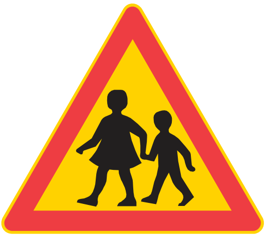
a)



b)

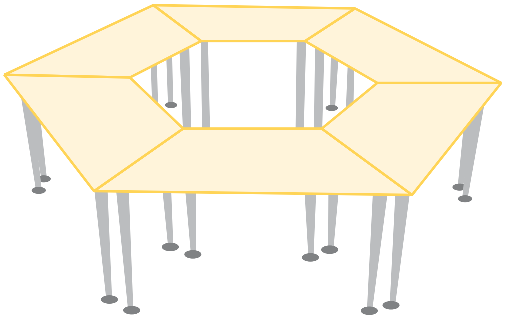


156. Varoitusmerkit liikenteessä ovat muodoltaan tasasivuisia kolmioita. Kolmion korkeus on 21,7 cm. Laske kolmion sivun pituus.



157. Tasakylkisen kolmion kyljen pituus on 6,8 cm. Laske kolmion kantakulmien suuruudet, kun kolmion kannan pituus on 10,5 cm.

158. Keskenään samanlaisista puolisuunnikkaan muotoisista pöydistä rakennetaan kuvan mukainen säännöllisen kuusikulmion muotoinen pöytäryhmä. Kuusikulmion yhden kulman suuruus on 120° ja sivun pituus 150 cm. Pöydän yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys on 65 cm. Laske pöytäryhmän pinta-ala.



159. Costa Rica julkaisi vuonna 1936 neljäkkään muotoisen lentopostimerkin. Postimerkin sivun pituus oli 2,8 cm ja postimerkin lyhyemmän lävistäjän pituus oli 2,2 cm. Laske postimerkin pinta-ala.

2.3 Ympyrän sekantti ja tangentti

Pohdinta

a) Ympyräsektorin keskuskulma α on 58° ja ympyrän säteen OA pituus on 23 cm.

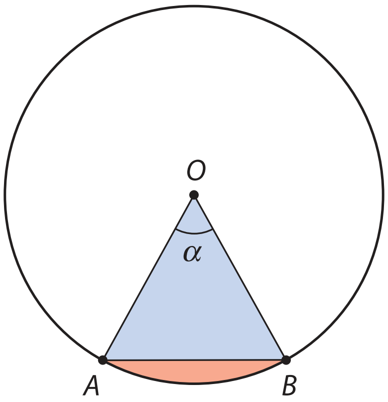
❶ Piirrä korkeusjana kolmiolle ABO ja laske korkeusjanan pituus.

❷ Laske janan AB pituus.

❸ Laske kolmion ABO pinta-ala.

❹ Laske kulman α rajaaman sektorin pinta-ala.

❺ Laske punaisella väritetyn alueen pinta-ala.



b) Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä C piirretyt suorat sivuavat ympyrää kehäpisteissä A ja B. Sivuamispisteisiin piirretyt säteet OA ja OB ovat kohtisuorassa ympyrää sivuavia suoria vastaan.

❶ Mitkä kolmioiden OAC ja OBC sivuista ovat keskenään yhtä pitkiä?

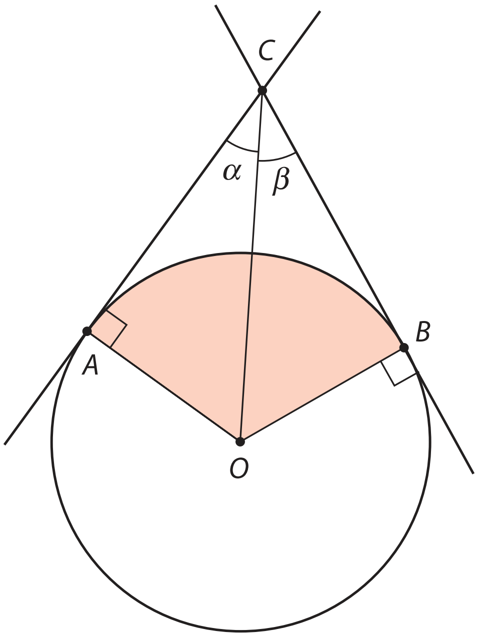
❷ Mitkä kolmioiden OAC ja OBC kulmista ovat keskenään yhtä suuria?

❸ Säteen OA pituus on 43 cm ja pisteen C etäisyys ympyrän kehästä 11 cm. Laske pisteen C etäisyys ympyrän keskipisteestä O.

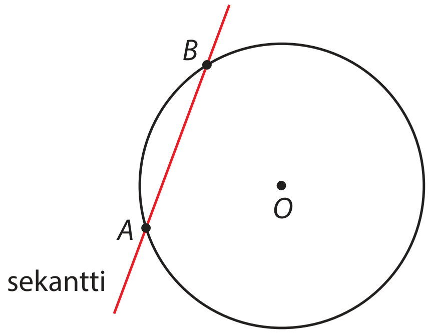
❹ Laske kulman α suuruus asteen tarkkuudella.

❺ Kuinka suuri on kulma β?

❻ Säteet OA ja OB rajaavat ympyrästä kaksi sektoria. Kuinka suuri on pienemmän sektorin keskuskulma?

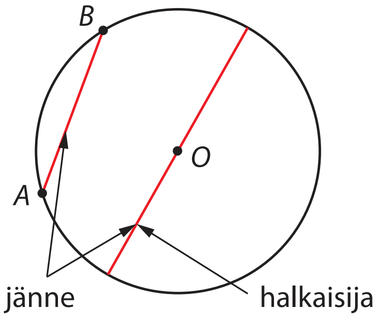


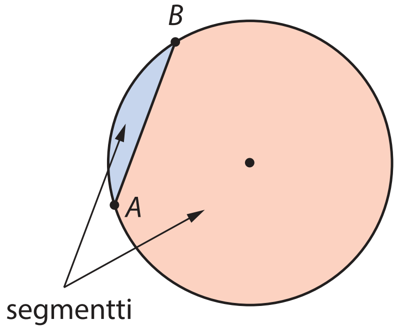
Sekantti, jänne ja segmentti



Ympyrän **sekantti** on suora, joka leikkaa ympyrän kehän kahdessa pisteessä. Kuvan sekantti leikkaa ympyrän kehän pisteissä *A* ja *B*.

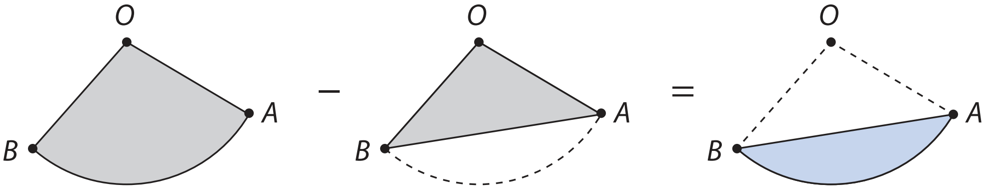
Ympyrän sisään jäävä sekantin osa on **jänne**. Jos jänne kulkee ympyrän keskipisteen kautta, se on ympyrän halkaisija. Jänne *AB* jakaa ympyrän kahteen osaan, joita sanotaan **segmenteiksi**.





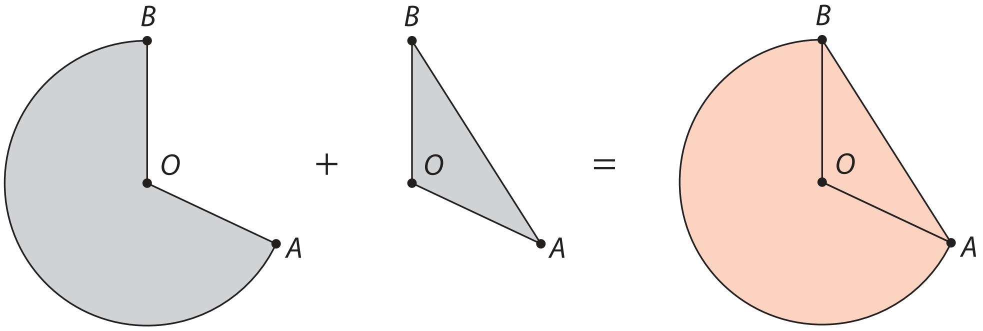
Jos segmentin pinta-ala on alle puolet ympyrän pinta-alasta, sen pinta-ala voidaan laskea vähentämällä sektorin pinta-alasta kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{sektori}} \quad - \quad A_{\text{kolmio}} \quad = \quad A_{\text{segmentti}}$$

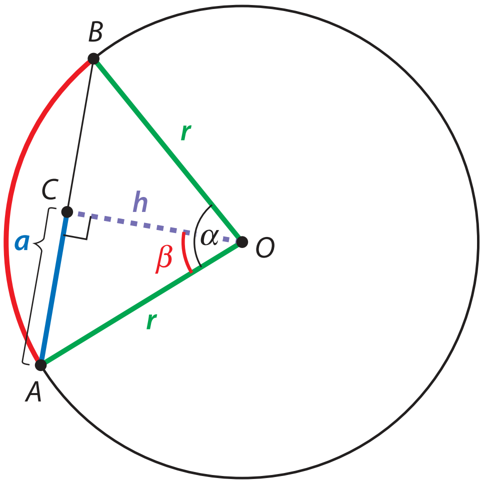


Jos segmentin pinta-ala on yli puolet ympyrän pinta-alasta, sen pinta-ala on sektorin ja kolmion pinta-alojen summa.

$$A_{\text{sektori}} \quad + \quad A_{\text{kolmio}} \quad = \quad A_{\text{segmentti}}$$

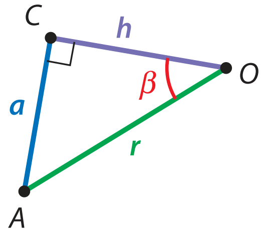


Jänteen pituuden ja segmentin pinta-alaan liittyvissä laskuissa käytetään apuna ympyrän sisälle muodostunutta tasakylkistä kolmiota *AOB*.



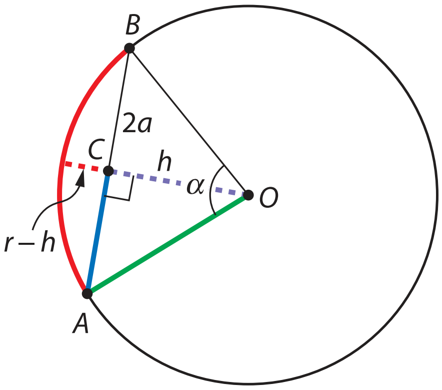
Kolmion *AOB* kylkinä ovat janat *OA* ja *OB*, jotka ovat yhtä pitkiä kuin ympyrän säde *r*. Koska kolmio on tasakylkinen,

- kolmion korkeusjana *OC* jakaa kolmion kannan *AB* kahteen yhtä pitkään osaan
- kolmion korkeusjana puolittaa sektorin keskuskulman α eli $\beta = \frac{\alpha}{2}$.



Korkeusjana jakaa tasakylkisen kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Kolmion *AOC*

- kateetteina ovat janat *AC* ja *OC*
- hypotenuusana on jana *OA*.



Suorakulmaisen kolmion avulla voidaan ratkaista esimerkiksi

- jänteen *AB* pituus ($2a$)
- kolmion korkeus eli ympyrän keskipisteen etäisyys jänteestä (h)
- jänteen suurin etäisyys ympyrän kehästä ($r - h$)
- sektorin keskuskulman suuruus ($\alpha = 2\beta$)

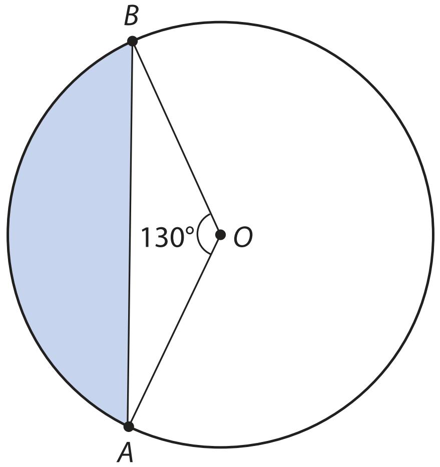
Suorakulmaiseen kolmioon liittyviä pituuksia voidaan ratkaista joko Pythagoraan lauseen tai trigonometristen funktioiden avulla. Kolmion kulmien ratkaisemiseen pitää yleensä käyttää trigonometrisia funktioita.

ESIMERKKI 1

Ympyrän säde on 86 mm. Laske kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella

a) jänteen AB pituus

b) väritetyn segmentin pinta-ala.

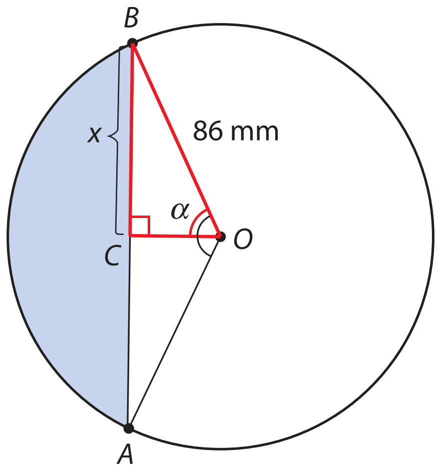


Kolmio *AOB* on tasakylkinen, koska kolmion kylkinä ovat ympyrän säteet.

RATKAISU

a) Jänne AB on tasakylkisen kolmion AOB kanta. Merkitään jänteen pituudeksi $2x$.

Piirretään kolmiolle AOB korkeusjana OC.



Koska kolmio AOB on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan:

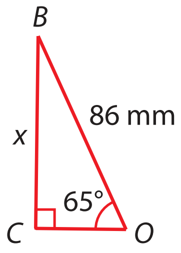
$$|CB| = \frac{2x}{2} = x$$

Merkintä |*CB*| tarkoittaa janan *CB* pituutta.

- korkeusjana puolittaa huippukulman 130°:

$$\alpha = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ.$$

Ratkaistaan sivun pituus x sinin avulla.



$$\sin 65^\circ = \frac{x}{86}$$

$$x = 77{,}94\ldots$$

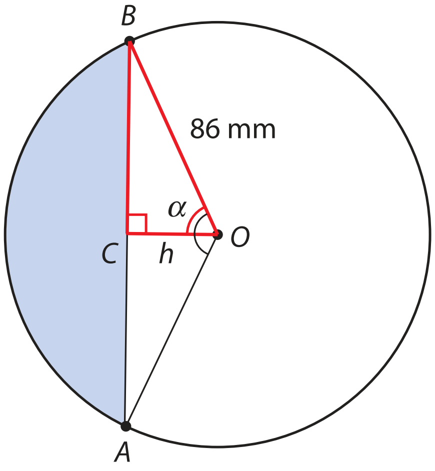
Jänteen AB pituus on:

$$2 \cdot 77{,}94\ldots \text{ mm}$$

$$= 155{,}884\ldots \text{ mm}$$

$$\approx 156 \text{ mm}.$$

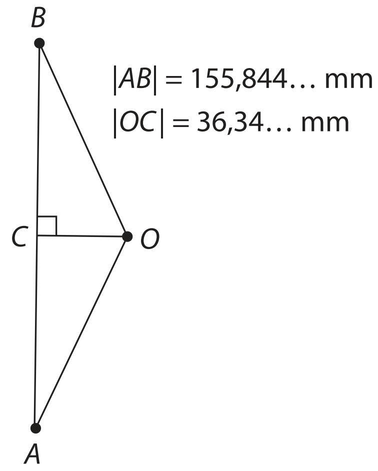
b) Koska segmentin pinta-ala on alle puolet ympyrän pinta-alasta, segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin alasta kolmion *AOB* pinta-ala.



Kolmion pinta-alan laskemiseksi määritetään ensin korkeusjanan pituus *h*.

Korkeus *h* voidaan ratkaista myös Pythagoraan lauseen avulla, koska a-kohdassa on ratkaistu sivun *CB* pituus.

$$\begin{aligned}\cos 65^\circ &= \frac{h}{86}\\ h &= 36{,}34...\end{aligned}$$



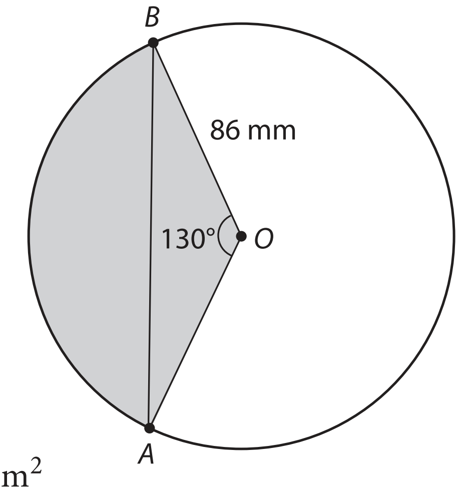
Kolmion *AOB* kantana on jänne *AB*.

Lasketaan kolmion *AOB* pinta-ala.

Kopioi pyöristämättömät arvot aikaisemmista laskuista laskulausekkeeseen.

$$\begin{aligned}A_{AOB} &= \frac{155{,}884...\text{ mm}\cdot 36{,}34...\text{ mm}}{2}\\ &= 2832{,}83...\text{ mm}^2\end{aligned}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.



$$\begin{aligned}A_{\text{sektori}} &= \frac{130^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot(86\text{ mm})^2\\ &= 8390{,}49...\text{ mm}^2\end{aligned}$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned}A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{AOB}\\ &= 8390{,}49...\text{ mm}^2 - 2832{,}83...\text{ mm}^2\\ &= 5557{,}66...\text{ mm}^2\\ &\approx 5600\text{ mm}^2\end{aligned}$$

VASTAUS **a)** 156 mm **b)** 5600 mm^2

ESIMERKKI 2

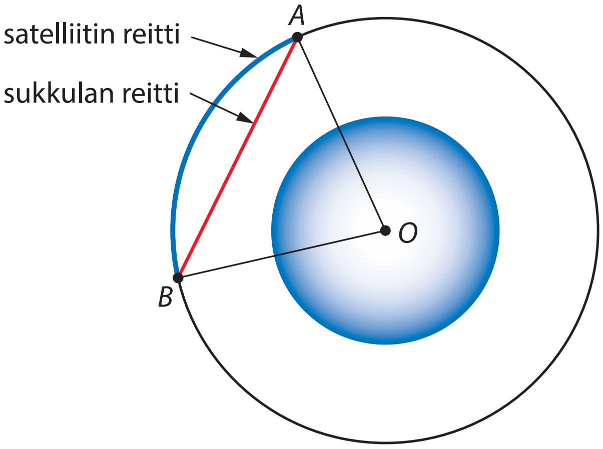
Lisämateriaali: Maapallo s. 175

Satelliitti kiertää Maata ympyrän muotoisella radalla vakionopeudella. Sen etäisyys Maan pinnasta on 850 km. Satelliitista laukaistaan miehittämätön sukkula pisteessä A. Sukkula kohtaa satelliitin kiertoradalla pisteessä B, jonne sukkula saapui suorinta reittiä pisteestä A. Kuinka pitkän matkan sukkula kulkee, kun satelliitin kulkema matka on 4210 km? Maapallon säde on 6370 km.

RATKAISU

Piirretään mallikuva.

- Merkitään kirjaimella O maapallon keskipistettä.
- Satelliitti kulkee matkan ympyrän kaarta pitkin.
- Sukkula kulkee pitkin jännettä AB.



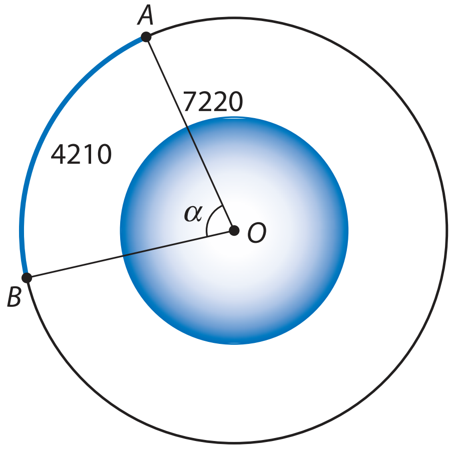
Janan OA pituus on sama kuin satelliitin etäisyys Maan keskipisteestä.

$$|OA| = 6370 \text{ km} + 850 \text{ km} = 7220 \text{ km}$$

Merkitään satelliitin reittiä eli kaarta AB vastaavaa keskuskulmaa kirjaimella α. Ratkaistaan kaaren pituuden avulla keskuskulman α suuruus.

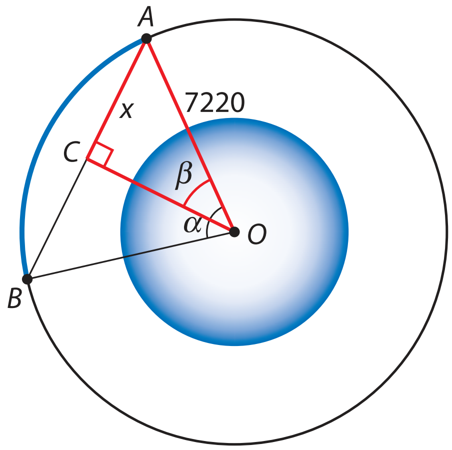
$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$4210 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 7220$$
$$\alpha = 33{,}409...°$$



Piirretään kolmiolle *OAB* korkeusjana *OC*, joka jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Merkitään sivun *CA* pituutta kirjaimella x.



Kolmio *OAB* on tasakylkinen.

Suorakulmaisen kolmion *OAC* kulma β on puolet kulmasta α eli

$$\beta = \frac{33{,}409...°}{2} = 16{,}704...°.$$

Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\sin 16{,}704...° = \frac{x}{7220}$$
$$x = 2075{,}304...$$

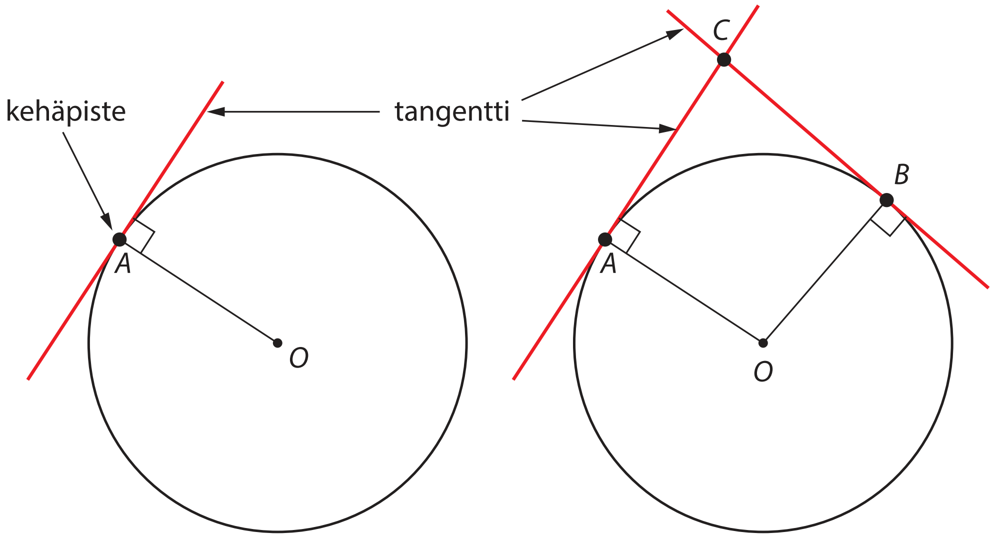
Ratkaistu pituus x on puolet jänteen pituudesta. Jänteen *AB* pituus on siis

$$2 \cdot 2075{,}304... \text{ km}$$
$$= 4150{,}609... \text{ km}$$
$$\approx 4150 \text{ km}$$

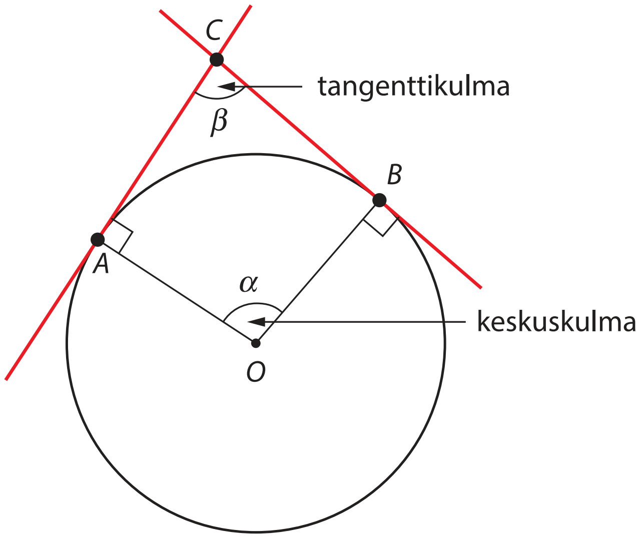
VASTAUS Sukkula kulkee 4150 km.

Ympyrän tangentti

Ympyrän tangentti on suora, joka sivuaa ympyrän kehää yhdessä pisteessä *A*. Jos sivuamispisteeseen piirretään säde *OA*, tangentti on kohtisuorassa tätä sädettä vastaan eli tangentin ja säteen väliin muodostuu 90°:n kulma. **Kehäpisteeseen** *A* voidaan piirtää tangentti ainoastaan yhdellä tavalla.

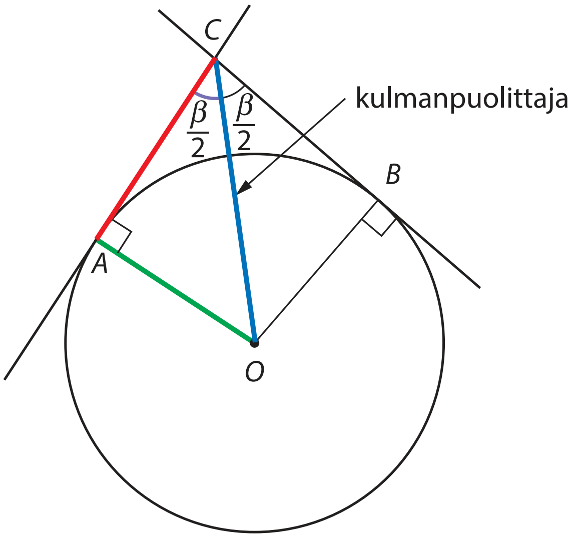


Ympyrän kehän ulkopuolella sijaitsevasta pisteestä *C* voidaan piirtää ympyrälle kaksi erisuuntaista tangenttia. Tangenttien väliin muodostuvaa kulmaa β sanotaan **tangenttikulmaksi**.

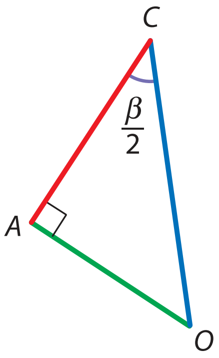


Nelikulmion *AOBC* kulmien summa on 360°. Koska säteet *OA* ja *OB* muodostavat 90° kulman tangenttien kanssa, kahden jäljelle jääneen kulman summa on 180° eli $\alpha + \beta = 180°$.

Jana OC jakaa tangenttikulman β kahteen yhtä suureen osaan eli OC on **kulmanpuolittaja**. Samalla muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, OAC ja OBC.



Suorakulmaisen kolmion OAC kateetit ovat OA ja AC. Hypotenuusa on jana OC. Tarvittavia kulmia tai sivujen pituuksia voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta joko Pythagoraan lauseen tai trigonometristen funktioiden avulla.

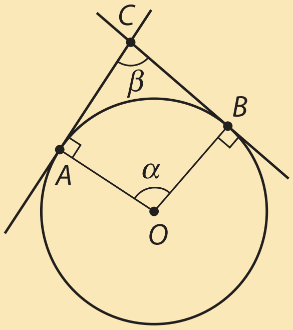


Tangentti

Ympyrän tangentti on suora, joka sivuaa ympyrän kehää yhdessä pisteessä.

- Tangentti on aina kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.
- Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä voidaan piirtää ympyrälle aina kaksi tangenttia.
- Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman summa on 180°.

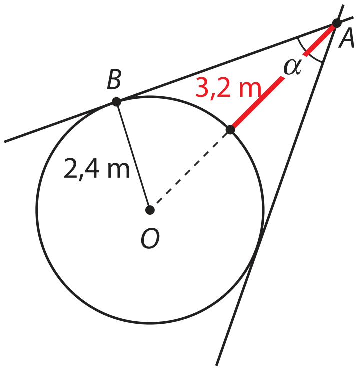
$$\alpha + \beta = 180°$$

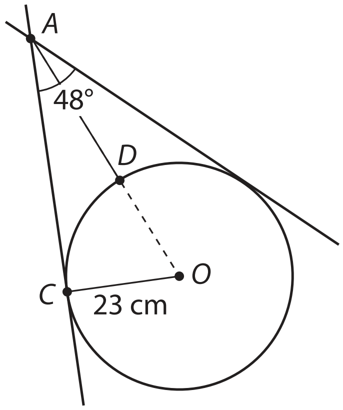


ESIMERKKI 3

Ympyrälle O on piirretty kaksi tangenttia, jotka kulkevat pisteen A kautta. Laske

a) tangenttikulman α suuruus **b)** pisteen A etäisyys ympyrän kehäpisteestä D.

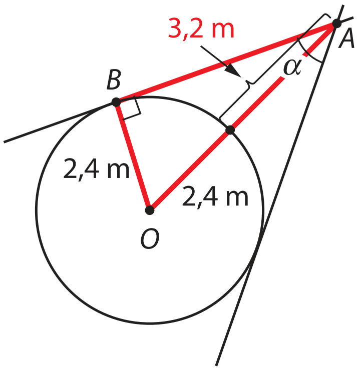




RATKAISU

a) Kolmio OAB on suorakulmainen, koska jana OB on kohtisuorassa janaa AB vastaan.

Sivuamispisteeseen piirretty säde ja tangentti ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



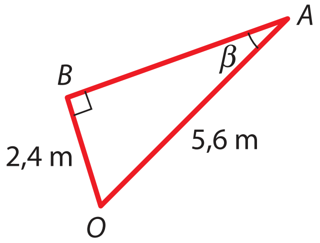
Kolmion kateetteina ovat janat OB ja AB. Hypotenuusa on jana OA.

Hypotenuusan pituus on
$2{,}4\text{ m} + 3{,}2\text{ m} = 5{,}6\text{ m}$.

Merkitään kirjaimella β kolmion OAB toista terävää kulmaa. Ratkaistaan kulma β sinin avulla.

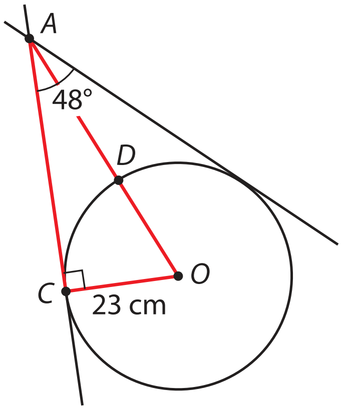
$$\sin\beta = \frac{2{,}4}{5{,}6}$$

$$\beta = 25{,}376...^\circ$$



Kulma β on puolet tangenttikulmasta α. Tällöin $\alpha = 2 \cdot 25{,}376...^\circ \approx 51^\circ$.

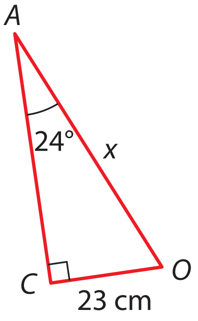
b) Suorakulmaisen kolmion OAC huippukulma on puolet tangenttikulmasta eli $48^\circ : 2 = 24^\circ$.



Merkitään janan OA pituutta kirjaimella x. Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\sin 24^\circ = \frac{23}{x}$$

$$x = 56{,}54...$$



Pisteen A etäisyys pisteestä D on säteen verran lyhyempi kuin sivu OA.
$|AD| = |OA| - |OD| = 56{,}54\ldots\text{ cm} - 23\text{ cm} \approx 34\text{ cm}.$

VASTAUS **a)** 51° **b)** 34 cm

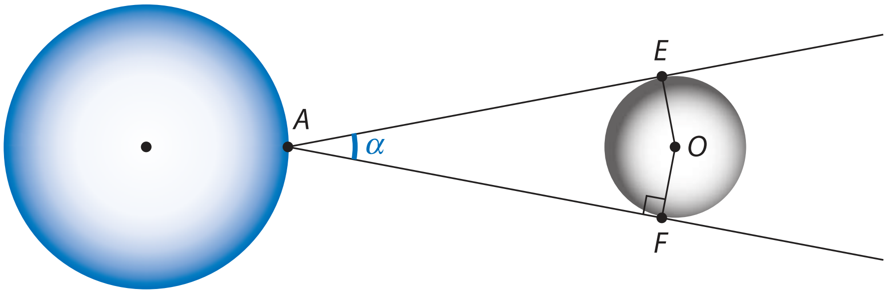
ESIMERKKI 4

Missä kulmassa Kuu näkyy Maan pinnalta, kun Kuun ja Maan välinen etäisyys on 384 400 km? Kuun halkaisija on 3474 km. Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

RATKAISU

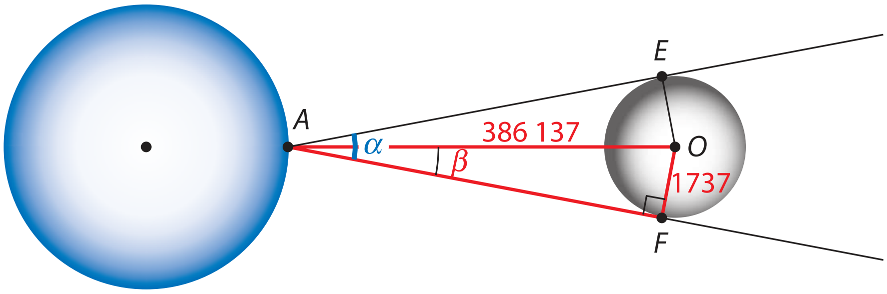
Tarkastellaan Kuuta Maan pisteestä A.

- Piirretään mallikuvaan Kuulle tangentit pisteestä A.
- Merkitään ympyrän ja tangenttien sivuamispisteitä kirjaimilla E ja F.
- Kysytty kulma α muodostuu piirrettyjen tangenttien väliin.



Yhdistetään Maan piste A ja Kuun keskipiste O janalla. Merkitään muodostuneen suorakulmaisen kolmion AFO toista terävää kulmaa kirjaimella β.

- Kolmion lyhyemmän kateetin pituus on puolet Kuun halkaisijasta eli 3474 km : 2 = 1737 km.
- Kolmion hypotenuusa on jana OA. Janan OA pituus on sama kuin pisteen A etäisyys Kuun keskipisteestä.
  $|OA| = 384\,400 \text{ km} + 1737 \text{ km} = 386\,137 \text{ km}$.



Kulma β voidaan nyt ratkaista sinin avulla.

$$\sin\beta = \frac{1737}{386\,137}$$

$$\beta = 0{,}2577...^\circ$$

Tällöin $\alpha = 2 \cdot 0{,}2577...^\circ \approx 0{,}52^\circ$.

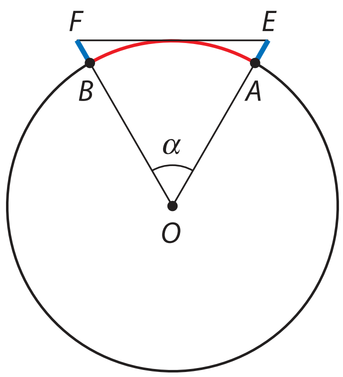
VASTAUS 0,52°

ESIMERKKI 5

Kaksi laivaa lähestyy toisiaan vastakkaisista suunnista. Molempien laivojen tutkat sijaitsevat 35 metrin korkeudella meren pinnasta. Mikä on laivojen välinen etäisyys meren pintaa pitkin mitattuna silloin, kun laivojen tutkat ensimmäisen kerran havaitsevat toisensa? Maapallon säde on 6378 km.

RATKAISU

Laivasta havaitaan toinen laiva, kun ne ovat pisteissä *A* ja *B*. Tällöin tutkien välinen jana *EF* sivuaa ympyrää eli se on ympyrän tangentti. Laivojen välinen etäisyys on muodostuneen sektorin kaaren pituus. Se voidaan laskea, kun tunnetaan keskuskulma α.



Kummankin laivan tutka sijaitsee 35 m meren pinnan yläpuolella. Tällöin kolmio *OEF* on tasakylkinen. Lasketaan kolmion kylkien pituudet.

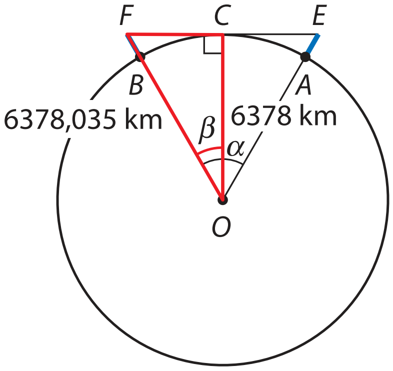
Muuta tutkan korkeus meren pinnasta kilometreiksi.

35 m = 0,035 km

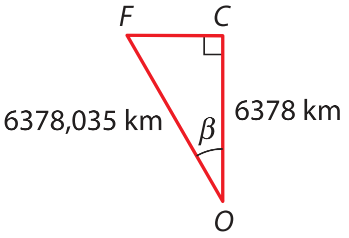
$$|OE| = |OF| = 6378 \text{ km} + 0{,}035 \text{ km} = 6378{,}035 \text{ km}$$

Piirretään kolmiolle *OEF* korkeusjana. Merkitään suorakulmaisen kolmion *OCF* toista terävää kulmaa kirjaimella β.

Kulman β viereinen kateetti on *OC* ja hypotenuusa *OF*.



Ratkaistaan kosinin avulla kulma β.



$$\cos\beta = \frac{6378}{6378{,}035}$$

$$\beta = 0{,}18981...°$$

Tällöin $\alpha = 2 \cdot 0{,}18981...° = 0{,}37962...°$.

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

Sektorin kaaren pituus on siis $\frac{0{,}37962...°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6378 \text{ km} \approx 42 \text{ km}$.

VASTAUS

Laivojen välinen etäisyys on 42 km.

Tehtävät

Jänne ja segmentti

160. Piirrä ympyrä. Lisää ympyrään jänne ja sektori pisteiden A ja B välille, kun sektorin keskuskulma on

a) alle 180°

b) yli 180°.

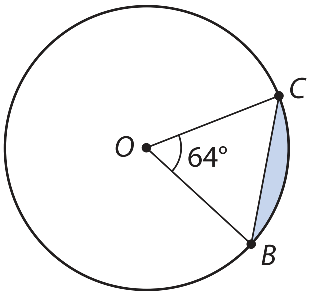
161. Ympyräsektorin keskuskulma on 56°. Sektorin muodostavien säteiden päätepisteet ympyrän kehällä ovat A ja B. Laske jänteen AB pituus, kun ympyrän säde on 19,0 mm.

E1

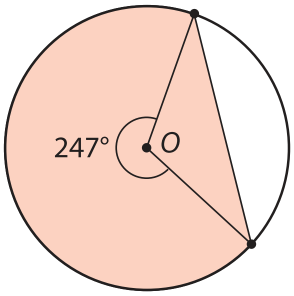
162. Sektorin keskuskulma on 64° ja säteen pituus on 18 cm. Laske

a) jänteen BC pituus

b) väritetyn segmentin pinta-ala.

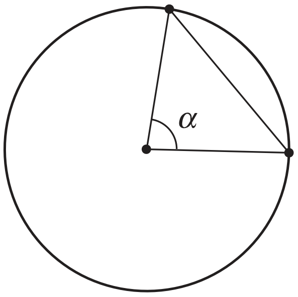


163. Laske väritetyn segmentin pinta-ala, kun ympyrän säde on 114 mm. Anna vastaus neliösenttimetreinä.



164. **a)** Ratkaise keskuskulma α, kun ympyrän säde on 72 mm ja kuvaan piirretyn jänteen pituus on 94 mm.

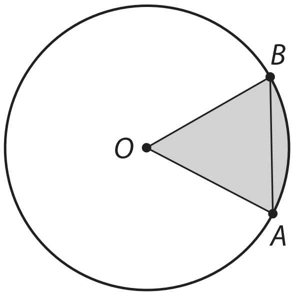
b) Ympyräsektorin keskuskulma on 112°. Sektorin muodostavien säteiden päätepisteiden välisen jänteen pituus on 245 cm. Laske ympyrän säteen pituus.



E2

165. Rimatara on pieni vulkaaninen saari Ranskan Polynesiassa. Saari on ympyrän muotoinen ja sen säde on 1693 m. Kaksi henkilöä lähtee kävelemään saaren rannalta samasta kohdasta. Toinen kulkee pitkin rantaviivaa 4,50 kilometrin matkan. Toinen oikaisee samasta kohdasta suoraan jännettä pitkin rannalla sijaitsevaan kohtauspaikkaan. Kuinka monta metriä pidemmän matkan kävelee henkilö, joka kulkee rantaviivaa pitkin? Anna vastaus kymmenen metrin tarkkuudella.

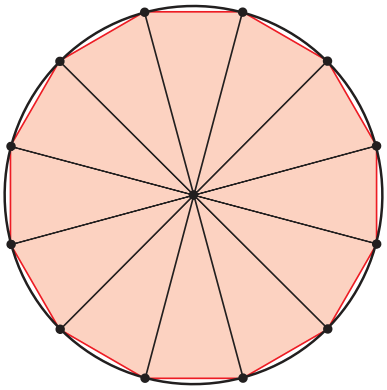
166. Kuvan sektorin kaaren pituus on 72 cm. Ympyrän säde on samanpituinen kuin kaari. Laske jänteen *AB* pituus.



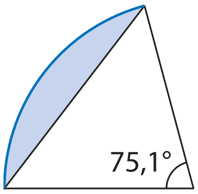
167. Ympyrän muotoisen järven eri kohdissa sijaitsee kaksi laituria. Elias soutaa laiturilta toiselle suorinta mahdollista reittiä, jolloin soutumatkan pituudeksi tulee 1250 m. Juuso juoksee laiturilta toiselle rantaa pitkin. Kuinka pitkän matkan Juuso juoksee, kun järven ympärysmitta on 4360 m?

Lisämateriaali: Säännölliset monikulmiot s. 171

168. Ympyrän muotoiseen piirakkavuokaan valmistetaan kakkupohja. Vuoan halkaisija on 34 cm. Leipuri jakaa kakkupohjan kahteentoista yhtä suureen sektorin muotoiseen palaseen. Hän leikkaa jokaisen palan ulkoreunasta pois segmentin muotoisen palan kuvan mukaisesti. Kuinka monta prosenttia kakkupohjan pinta-alasta leikataan pois?



169. Ympyräsektorin sinisen kaaren pituus on 64,2 cm. Kuinka monta prosenttia sinisen segmentin pinta-ala on koko sektorin pinta-alasta?



170. Paperista on leikattu ympyräsektorin muotoinen pala, jonka piirin pituus on 224 cm. Sektorin keskuskulma on 32°. Sektorista leikataan pois segmentin muotoinen palanen. Laske leikatun palan pinta-ala.

171. Ympyrä jaetaan jänteen avulla kahteen segmenttiin. Pienemmän segmentin kaaren pituus on 20,0 cm. Laske suuremman segmentin pinta-ala, kun ympyrän halkaisija on 22,0 cm.

Ympyrän tangentti

172. Piirrä ympyrä ja valitse kehältä yksi piste. Merkitse sitä kirjaimella A. Piirrä tähän pisteeseen tangentti seuraavasti:

- Piirrä säde pisteeseen A.
- Piirrä säteelle normaali pisteeseen A.

173. Piirrä ympyrä ja ympyrälle kaksi sädettä. Nimeä säteiden päätepisteet kehällä käyttäen kirjaimia A ja B. Tämän jälkeen

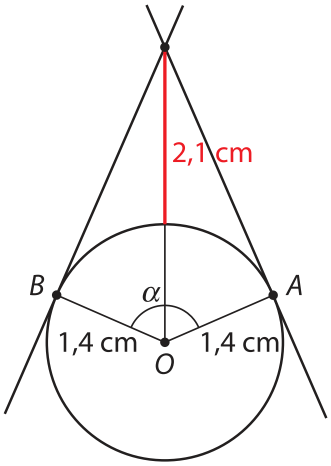
a) piirrä tangentit ympyrälle pisteisiin A ja B
b) määrittele tangenttien leikkauspiste C
c) määritä muodostuneen tangenttikulman suuruus
d) piirrä puolittaja tangenttikulmalle.

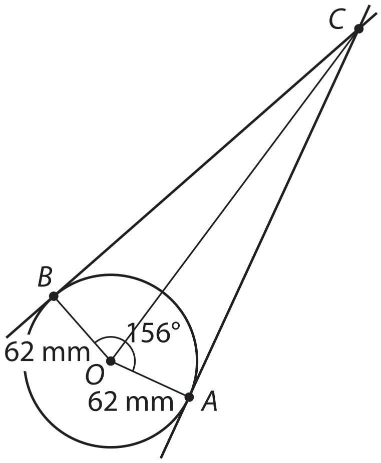
E3

174. Laske

a) keskuskulma α

b) janan OC pituus.





175. Ympyrän ulkopuolella sijaitsevasta pisteestä C piirretään kaksi tangenttia ympyrän kehälle pisteisiin A ja B. Tangenttien välinen kulma on 66,0° ja ympyrän säteen pituus on 142 mm. Laske

a) pisteiden A ja C välinen etäisyys
b) pisteen C etäisyys ympyrän kehästä.

176. Pisteestä D piirretään kaksi tangenttia ympyrälle, jonka kehän pituus on 78 cm. Pisteen D etäisyys ympyrän kehästä on 35 cm. Laske tangenttien väliin muodostuvan kulman suuruus asteen tarkkuudella.

177. Ympyräsektorin keskuskulma on 106°. Sektorin rajaavien säteiden päätepisteisiin piirretään tangentit ympyrän ulkopuolella sijaitsevasta pisteestä A. Laske pisteen A lyhin etäisyys ympyrän kehästä, kun ympyrän halkaisija on 5,2 m.

E4 **178.** Henkilö seisoo 35 metrin päässä suoran ympyrälieriön muotoisesta tornista. Missä kulmassa hän näkee tornin, kun sen halkaisija on 26 m?

Pallosegmentti syntyy, kun pallo jaetaan tason avulla kahteen osaan.

179. Tukholmassa sijaitseva Globen on pallosegmentin muotoinen jääkiekkohalli. Pallon säde on 55 metriä. Henkilö seisoo 245 metrin päässä Globenista. Missä kulmassa hän näkee hallin?

E5 **180.** Bengtskärin majakka sijaitsee Turun saaristossa. Se oli valmistuessaan Pohjoismaiden korkein majakka. Majakan korkeus merenpinnasta on 51,0 m. Kuinka kauaksi merelle maan pintaa pitkin mitattuna majakan huipulta voidaan nähdä? Maapallon säde on 6378 km.

181. Satelliitti leijuu päiväntasaajan yläpuolella 58 km:n päässä Maasta. Kuinka monta prosenttia päiväntasaajasta satelliitista voitaisiin nähdä, kun Maapallon säde on 6378 km?

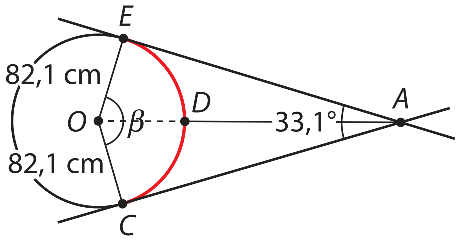
182. Ympyrän säteen pituus on 56 cm. Ympyrän ulkopuolinen piste A ja ympyrän keskipiste O yhdistetään janalla OA. Janan OA pituus on 68 cm. Pisteestä A piirretään tangentti ympyrälle. Tangentti sivuaa ympyrää pisteessä B.

a) Laske janan AB pituus.

b) Jana OA leikkaa ympyrän kehän pisteessä C. Kehäpisteet B ja C erottavat ympyrän kehältä kaksi kaarta. Laske lyhyemmän kaaren pituus.

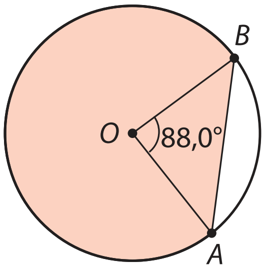
183. Helsingin Pasilassa sijaitsee linkkitorni, jonka korkeus meren pinnasta mitattuna on 146 metriä. Kuinka korkealta paikalta Tallinnasta tornin huippu on mahdollista nähdä, kun Helsingin ja Tallinnan välinen etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 85 km? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km. [S2008, 9]

Sekalaisia



184. Laske
- **a)** keskuskulman β suuruus
- **b)** kaaren EDC pituus
- **c)** janan AD pituus
- **d)** janan AE pituus.

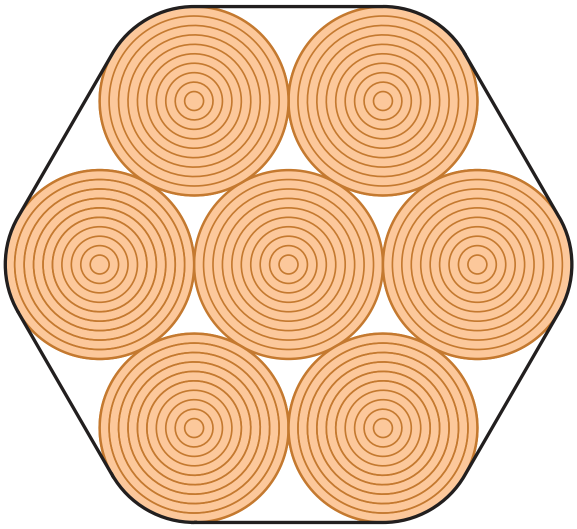
185. Ympyrän säde on 13,2 cm. Laske
- **a)** jänteen AB pituus
- **b)** väritetyn segmentin pinta-ala.



186. Laatokan pituus on 219 km. Kuinka korkealle kuumailmapallolla olisi noustava, jotta Laatokka nähtäisiin kokonaan? Maapallon säde on 6378 km.

187. Pyöreän pitsan halkaisija on 28 cm. Hanna leikkaa pitsasta sektorin muotoisen palan. Koska hän ei halua syödä reunaa, hän leikkaa pizzan reunasta segmentin muotoisen palan pois. Leikatun palan ulkoreunan pituus on 12,5 cm. Laske poisleikatun reunapalan pinta-ala.

188. Seitsemän mäntytukkia sidotaan vaijerilla alla olevan poikkileikkauskuvion mukaisesti. Kuinka paljon vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen? Jokaisen tukin halkaisija on 20 cm. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. [K2014, 7]



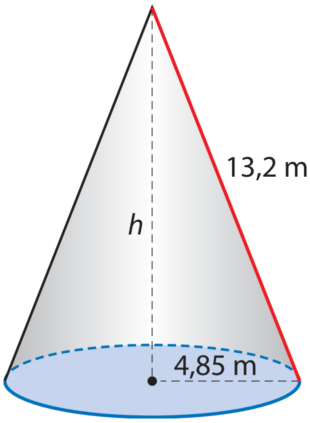
2.4

Avaruusgeometriaa

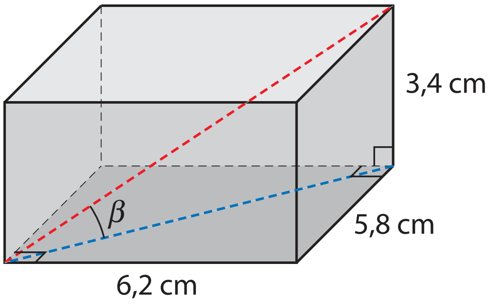
Pohdinta

Ratkaise pituuksia ja kulmia. Käytä Pythagoraan lausetta ja trigonometrisiä funktioita apuna.

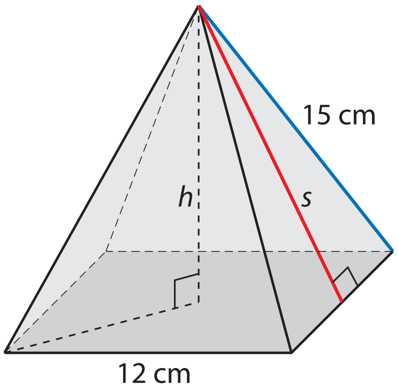
a) Määritä suoran ympyräkartion korkeus. Laske lisäksi sivujanan ja pohjaympyrän säteen välisen kulman suuruus asteen tarkkuudella.



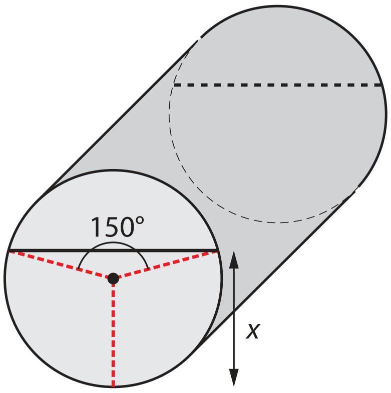
b) Laske suoran särmiön pohjan lävistäjän ja avaruuslävistäjän väliin muodostuvan kulman suuruus asteen tarkkuudella.



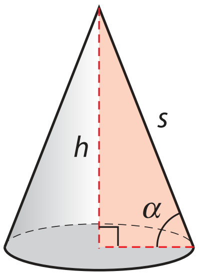
c) Suoran pyramidin pohja on neliö, jonka sivun pituus on 12 cm. Pyramidin sivusärmän pituus on 15 cm. Laske pyramidin korkeus h ja tasakylkisen kolmion muotoisen sivutahkon korkeus s.

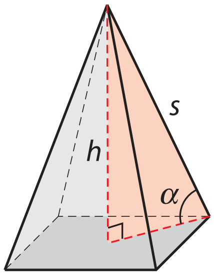


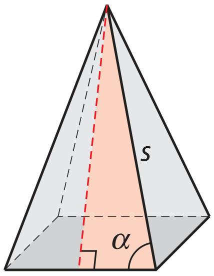
d) Suoran ympyrälieriön pohjaympyrän säde on 24 cm. Laske pituus x.

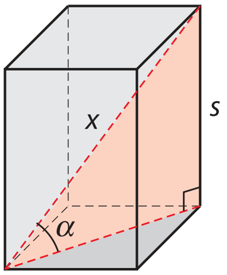


Avaruuskappaleiden tilavuuksien ja pinta-alojen lisäksi voidaan laskea särmien ja erilaisten lävistäjien pituuksia ja kulmia. Kulmat muodostuvat esimerkiksi avaruuslävistäjien ja tahkojen väliin.





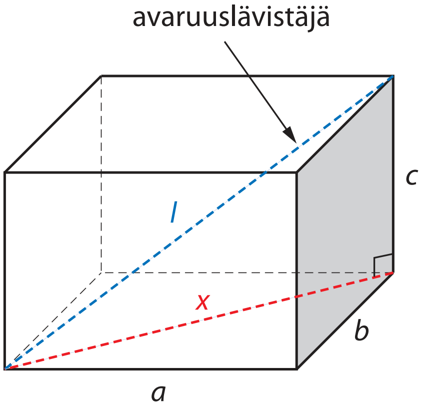


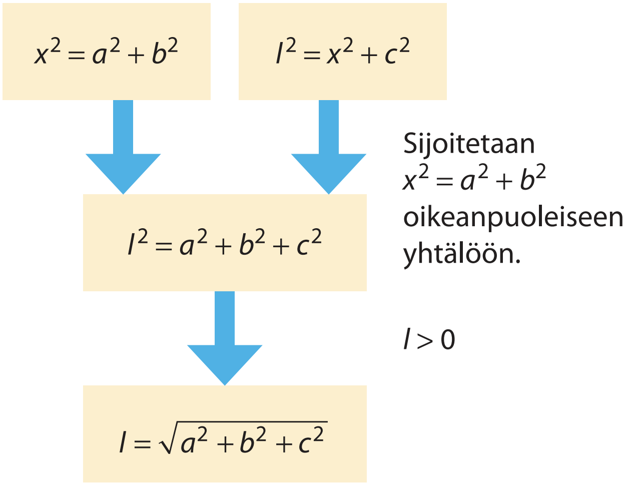


Avaruuskappaleen sisälle voidaan piirtää suorakulmainen kolmio, jonka avulla määritetään tarvittavia mittoja.

- Särmien tai muiden janojen pituuksia voidaan laskea soveltamalla Pythagoraan lausetta tai trigonometrisia funktioita.
- Kulmia voidaan laskea trigonometristen funktioiden avulla.

Suorakulmaiselle särmiölle voidaan piirtää **avaruuslävistäjä**. Avaruuslävistäjälle voidaan johtaa kaava soveltamalla Pythagoraan lausetta kaksi kertaa.


avaruuslävistäjä
l
x
a
b
c


$x^2 = a^2 + b^2$
$l^2 = x^2 + c^2$
Sijoitetaan $x^2 = a^2 + b^2$ oikeanpuoleiseen yhtälöön.
$l^2 = a^2 + b^2 + c^2$
$l > 0$
$l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

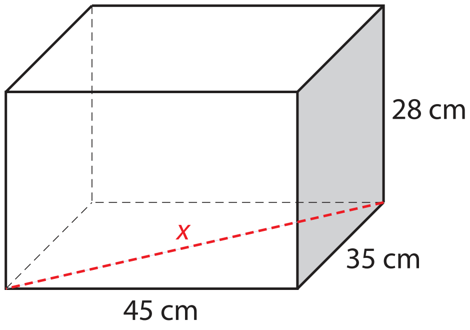
ESIMERKKI 1

Suoran särmiön pohja on suorakulmio, jonka mitat ovat 35 cm ja 45 cm. Särmiön korkeus on 28 cm. Laske särmiön

a) pohjan lävistäjän pituus
b) avaruuslävistäjän pituus
c) pohjan lävistäjän ja avaruuslävistäjän välinen kulma.

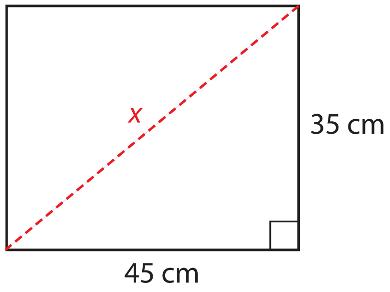
RATKAISU

a) Merkitään pohjasuorakulmion lävistäjää kirjaimella x.



Ratkaistaan x Pythagoraan lauseella.

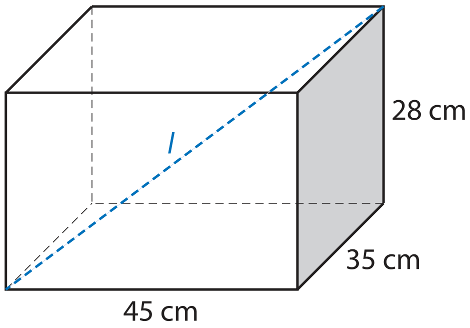
$$x^2 = 45^2 + 35^2$$
$$x = \pm 57{,}008...$$



Koska $x > 0$, pohjan lävistäjän pituus on 57 cm.

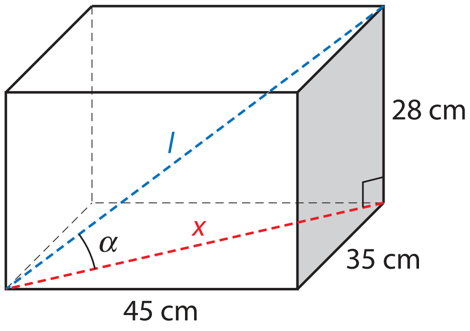
b) Merkitään särmiön avaruuslävistäjän pituutta kirjaimella l.

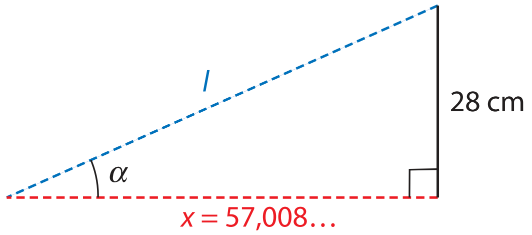
$$l = \sqrt{45^2 + 35^2 + 28^2}$$
$$= 63{,}513...$$
$$\approx 64$$



Avaruuslävistäjän pituus on 64 cm.

c) Merkitään pohjan lävistäjän ja avaruuslävistäjän välistä kulmaa kirjaimella α. Ratkaistaan se tangentin avulla.





$$\tan\alpha = \frac{28}{57{,}008...}$$
$$\alpha = 26{,}158...^\circ$$
$$\alpha \approx 26^\circ$$

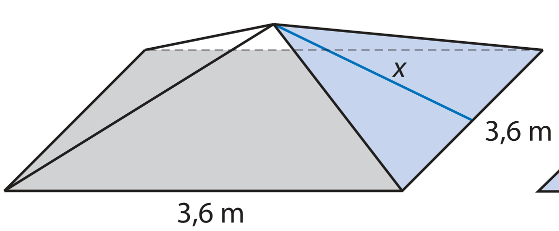
VASTAUS **a)** 57 cm **b)** 64 cm **c)** 26°

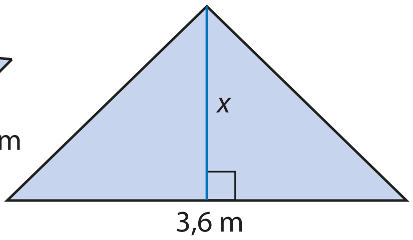
ESIMERKKI 2

Mainosteltan katto on suora neliöpohjainen pyramidi. Pohjasärmän pituus on 3,6 m. Katto-osan korkeus on 0,55 m. Laske katon pinta-ala.

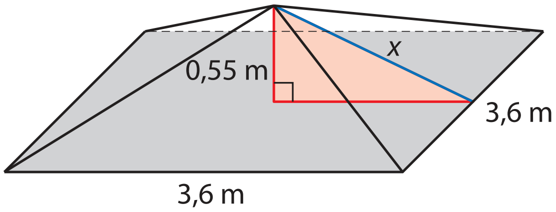
RATKAISU

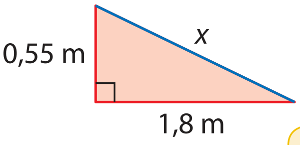
Hahmotellaan mallikuva. Katto muodostuu neljästä samanlaisesta, tasakylkisestä kolmiosta. Merkitään pyramidin sivutahkona olevan kolmion korkeutta kirjaimella x. Kolmion kanta on 3,6 metriä.





Hahmotellaan pyramidin sisälle suorakulmainen kolmio, jonka avulla voidaan ratkaista sivutahkona olevan kolmion korkeus x. Suorakulmaisen kolmion kanta on puolet pyramidin pohjasärmän pituudesta.





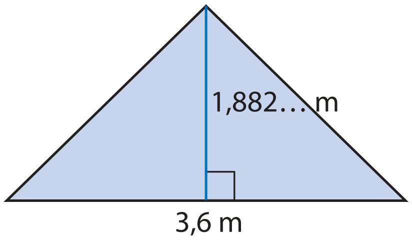
$$\frac{3{,}6\text{ m}}{2} = 1{,}8\text{ m}$$

Ratkaistaan sivun pituus x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 0{,}55^2 + 1{,}8^2$$

$$x = -1{,}88215... \quad \text{tai} \quad x = 1{,}88215...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 1{,}88215\dots$ m.



Lasketaan pyramidin sivutahkon pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{3{,}6\text{ m} \cdot 1{,}88215...\text{ m}}{2} = 3{,}387...\text{ m}^2$$

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$$

Katto muodostuu neljästä kolmiosta.

$$\begin{aligned} A_{\text{katto}} &= 4 \cdot A_{\text{kolmio}} \\ &= 4 \cdot 3{,}387...\text{ m}^2 \\ &= 13{,}5515...\text{ m}^2 \\ &\approx 14\text{ m}^2 \end{aligned}$$

VASTAUS 14 m^2

ESIMERKKI 3

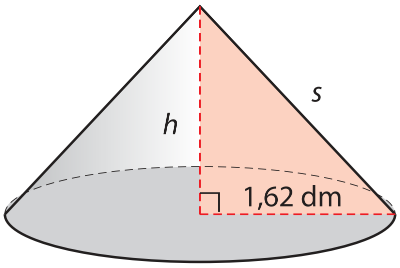
Suoran ympyräkartion vaipan ala on 12,3 dm^2 ja pohjan säde 1,62 dm. Laske

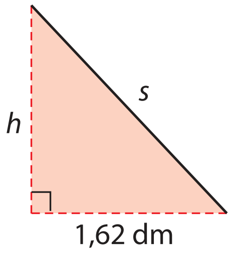
a) kartion korkeus

b) sivujanan ja pohjan säteen välinen kulma asteen tarkkuudella.

RATKAISU

a) Piirretään mallikuva. Kartion sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio.



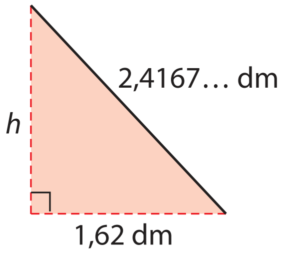


- Kolmion korkeus on sama kuin kartion korkeus *h*.
- Kolmion toisen kateetin pituus on sama kuin kartion pohjaympyrän säde eli 1,62 cm.
- Kolmion hypotenuusa on sama kuin kartion sivujana *s*.

Lasketaan ensin sivujanan *s* pituus, kun tiedetään, että kartion vaipan ala on 12,3 dm^2.

$$\begin{aligned}\pi rs &= A_{\text{vaippa}}\\ \pi \cdot 1{,}62s &= 12{,}3\\ s &= 2{,}4167\ldots\ (\text{dm})\end{aligned}$$

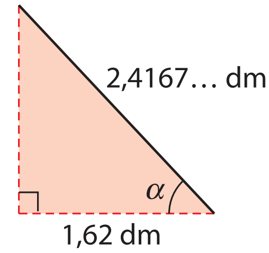
Kartion korkeus *h* saadaan Pythagoraan lauseella.



$$\begin{aligned}h^2 + 1{,}62^2 &= 2{,}4167\ldots^2\\ h &= \pm 1{,}793\ldots\ (\text{dm})\end{aligned}$$

Koska korkeus $h > 0$, niin $h = 1{,}79346\ldots$ dm $\approx 1{,}79$ dm.

b) Merkitään pohjan säteen ja sivujanan väliin muodostuvaa kulmaa kirjaimella α. Ratkaistaan kulma kosinin avulla.



$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1{,}62\ \text{dm}}{2{,}4167\ldots\ \text{dm}}\\ \alpha &= 47{,}909\ldots^\circ\\ \alpha &\approx 48^\circ\end{aligned}$$

VASTAUS

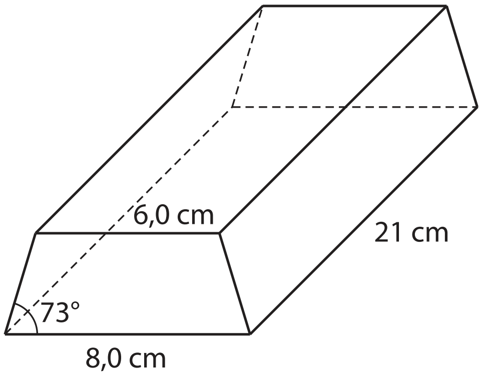
a) 1,79 dm **b)** 48°

ESIMERKKI 4

Kultaharkko on suoran särmiön muotoinen. Särmiön pohja on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 6,0 cm ja 8,0 cm. Puolisuunnikkaan terävä kulma on 73°. Kultaharkon pituus on 21 cm. Laske kultaharkon massa, kun kullan tiheys on 19,32 kg/dm^3.

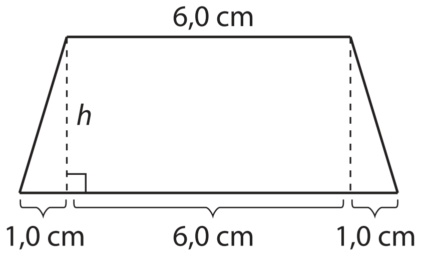
RATKAISU

Piirretään kultaharkosta mallikuva.



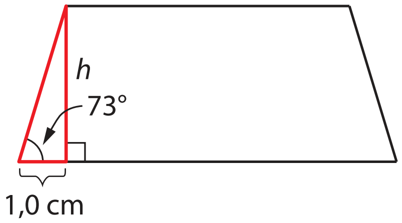
Kultaharkon massan laskemiseen tarvitaan sen tilavuus.

Lasketaan särmiön pohjana olevan puolisuunnikkaan pinta-ala. Sen laskemiseksi määritetään ensin puolisuunnikkaan korkeus *h*. Tasakylkisen puolisuunnikkaan sisälle muodostuvien suorakulmaisten kolmioiden kannan pituus on



$$\frac{8{,}0\text{ cm} - 6{,}0\text{ cm}}{2} = 1{,}0\text{ cm}$$

Ratkaistaan *h* tangentin avulla.



$$\tan 73° = \frac{h}{1{,}0}$$

$$h = 3{,}270...$$

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A_p = \frac{6{,}0\text{ cm} + 8{,}0\text{ cm}}{2} \cdot 3{,}270...\text{ cm} = 22{,}89...\text{ cm}^2$$

Koska tiheyden yksikkö on kg/dm^3, tilavuus muunnetaan kuutiodesimetreiksi.

Lasketaan särmiön tilavuus.

$$V = 22{,}89...\text{ cm}^2 \cdot 21\text{ cm} = 480{,}81...\text{ cm}^3 = 0{,}48081...\text{ dm}^3$$

Lasketaan tiheyden avulla harkon massa.

massa = tiheys · tilavuus

$$m = 19{,}32\text{ kg/dm}^3 \cdot 0{,}48081\ldots\text{ dm}^3 = 9{,}289\ldots\text{ kg} \approx 9{,}3\text{ kg}$$

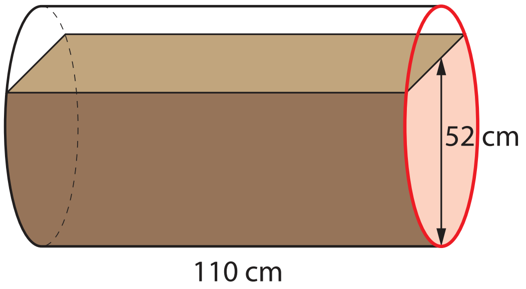
VASTAUS Kultaharkon massa on 9,3 kg.

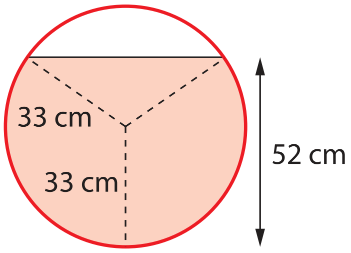
ESIMERKKI 5

Suoran ympyrälieriön muotoisen polttoöljytynnyrin korkeus on 110 cm ja pohjaympyrän säde 33 cm. Kyljellään olevassa tynnyrissä öljyn korkeus on 52 cm. Laske tynnyrissä olevan öljyn tilavuus litroina.

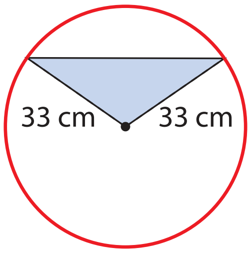
RATKAISU

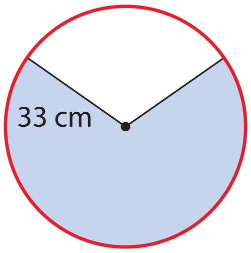
Hahmotellaan mallikuva. Kyljellään olevan tynnyrin öljymäärä muodostaa lieriön, jonka pohjana on ympyrän segmentti.





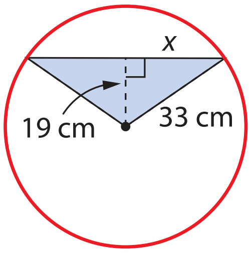
Segmentin pinta-ala on sektorin ja tasakylkisen kolmion pinta-alojen summa.





Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on yhtä suuri kuin tynnyrin säteen pituus eli 33 cm.

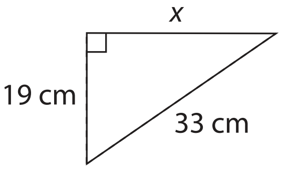
Koska öljyn korkeus on 52 cm, kolmion korkeus on 52 cm – 33 cm = 19 cm.



Merkitään muodostuneen suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituutta kirjaimella x. Ratkaistaan se Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 19^2 = 33^2$$

$$x = \pm 26{,}98147...$$



Koska $x > 0$, niin $x = 26{,}98147\ldots$ cm.

Tasakylkisen kolmion kanta on siis

$$2x = 2 \cdot 26{,}98147...\text{ cm} = 53{,}96295...\text{ cm}.$$

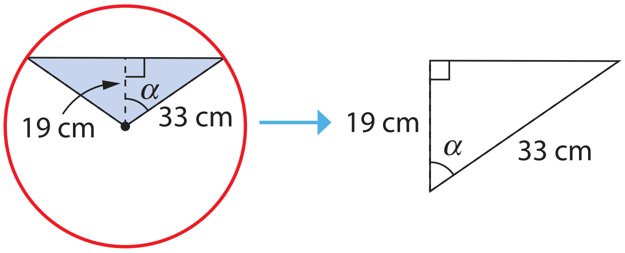
Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2} \cdot 53{,}996295...\text{ cm} \cdot 19\text{ cm} = 512{,}6480...\text{ cm}^2$$

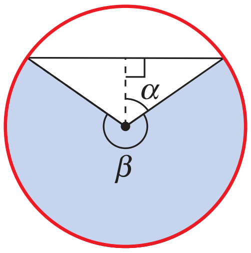
Lasketaan sektorin pinta-ala. Merkitään tasakylkisen kolmion huippukulman puolikasta kirjaimella α. Ratkaistaan α kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{19\text{ cm}}{33\text{ cm}}$$

$$\alpha = 54{,}847...^\circ$$



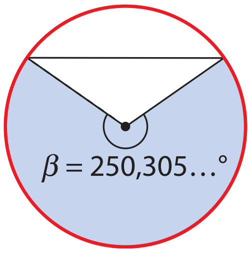
Tasakylkisen kolmion huippukulma on
$2\alpha = 2 \cdot 54{,}847...^\circ = 109{,}694...^\circ$



Sektorin keskuskulma
$\beta = 360^\circ - 2\alpha = 360^\circ - 109{,}694...^\circ = 250{,}305...^\circ$.

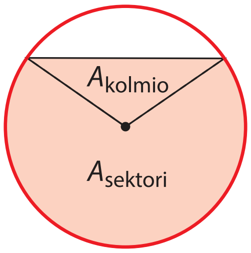
Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{sektori}} &= \frac{250{,}305...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (33\text{ cm})^2 \\ &= 2378{,}7318...\text{ cm}^2 \end{aligned}$$



Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{kolmio}} + A_{\text{sektori}} &= 512{,}648...\text{ cm}^2 + 2378{,}7318...\text{ cm}^2 \\ &= 2891{,}379...\text{ cm}^2 \end{aligned}$$



Öljyn tilavuus V saadaan lieriön tilavuutena

$$\begin{aligned} V &= 2891{,}379...\text{ cm}^2 \cdot 110\text{ cm} \\ &= 318\,051{,}782...\text{ cm}^3 \\ &= 318{,}051...\text{ dm}^3 \\ &\approx 320\text{ l} \end{aligned}$$

$V_{\text{lieriö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h$

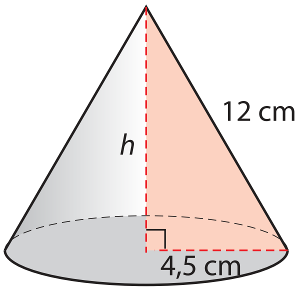
Lisämateriaali: Yksikkömuunnokset s. 160

VASTAUS 320 l

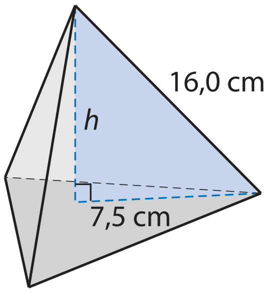
Tehtävät

189. Laske korkeusjanan *h* pituus.

a)

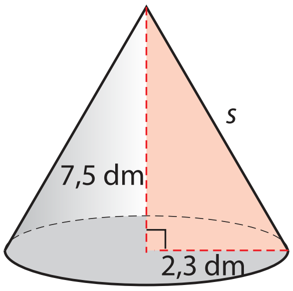


b)

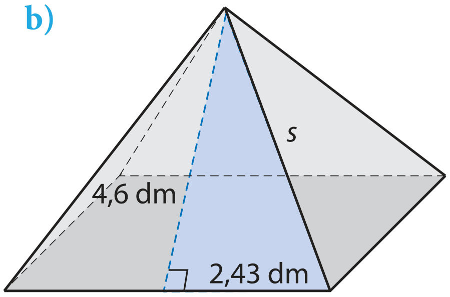

16,0 cm
h
7,5 cm

190. Laske sivujanan *s* pituus.

a)

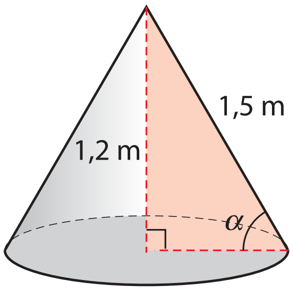


b)

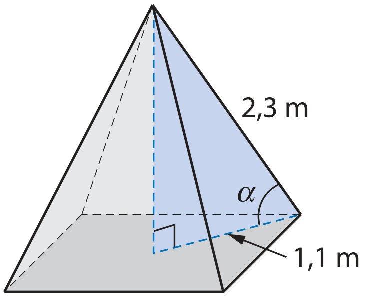

s
4,6 dm
2,43 dm

191. Määritä kulma α asteen tarkkuudella.

a)

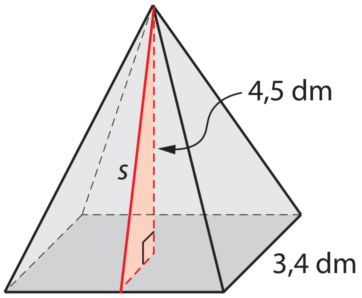

1,5 m
1,2 m
α

b)

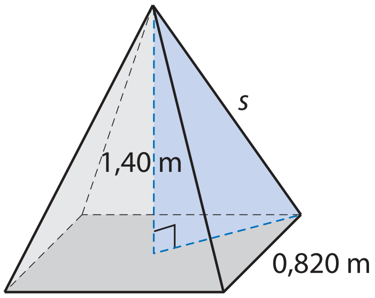

2,3 m
α
1,1 m

192. Määritä sivujanan *s* pituus, kun pyramidi on neliöpohjainen.

a)



b)


s
1,40 m
0,820 m

E1

193. Suoran särmiön pohja on neliö, jonka sivun pituus on 4,80 dm. Särmiön korkeus on 6,25 dm. Laske särmiön

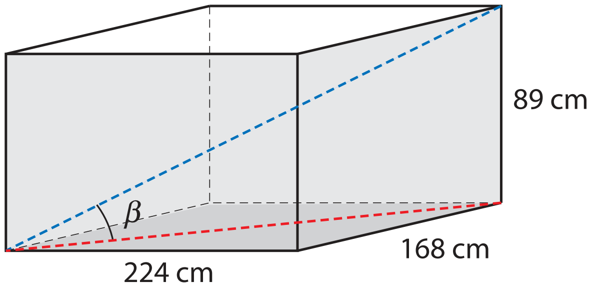
a) pohjasuorakulmion lävistäjän pituus

b) avaruuslävistäjän pituus

c) pohjan lävistäjän ja avaruuslävistäjän välinen kulma.

194. Kuution sivun pituus on 13,2 cm. Laske kuution pohjan lävistäjän ja avaruuslävistäjän välinen kulma.

195. Kuvan särmiön pohja on suunnikas, jonka sivujen pituudet ovat 168 cm ja 224 cm. Sivujen välinen terävä kulma on 33°. Määritä kulman β suuruus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.



E2

196. Mansikoiden myyntikojun kankaasta tehty katto on suora pyramidi, jonka korkeus on 95 cm. Pyramidin pohjana on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 3,2 m ja 1,8 m. Laske kattoon tarvittavan kankaan pinta-ala.

Lisämateriaali: Säännölliset monikulmiot s. 171

197. Pillimehupurkki on muodoltaan säännöllinen tetraedri, jonka särmän pituus on 9,3 cm. Tetraedri on kolmiopohjainen pyramidi, jonka kaikki tahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Laske tölkin pinta-ala.

E3

198. Suoran ympyräkartion vaipan ala on 45,3 dm^2 ja sivujanan pituus 45,2 cm. Laske kartion

a) korkeus

b) sivujanan ja pohjan halkaisijan välinen kulma

199. Lapinkota on suoran ympyräkartion muotoinen. Kodan tilavuus on 26 m^3 ja korkeus 4,0 m. Kuinka paljon kangasta kodan valmistamiseen on vähintään käytetty? Kodassa on maalattia. Kodan huipussa olevan savuaukon alaa ei tarvitse ottaa huomioon.

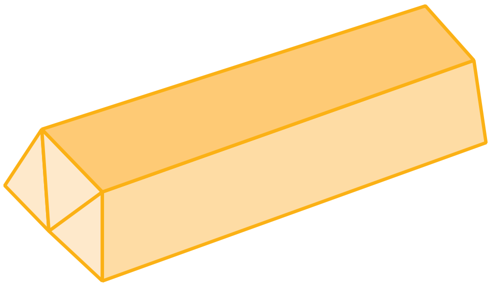
200. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 5. Kolmio pyörähtää täyden kierroksen pidemmän kateettinsa ympäri, jolloin syntyy avaruuskappale. Laske kappaleen vaipan ala ja tilavuus. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

201. Washington-monumentti on obeliski, jonka ylimmässä kärjessä on pieni, suora, neliöpohjainen pyramidi. Pyramidin pohjaneliön sivun pituus on 14 cm, ja sen korkeus on 23 cm. Pyramidi oli aikanaan maailman painavin puhtaasta alumiinista valettu esine.

a) Laske pyramidin massa, kun alumiinin tiheys on 2,70 kg/dm^3.

b) Alumiinin hapettuessa pyramidin vaippa voidaan pinnoittaa ohuella alumiinikerroksella. Kuinka monta kilogrammaa alumiinia tarvitaan, kun sitä kuluu pinnoittamisessa 0,50 kg/m^2?

E4 **202.** Toblerone-suklaapatukan keksivät Theodor Tobler ja Emil Baumann Bernissä vuonna 1908. Sitä myydään yksittäispakkausten lisäksi kolmen patukan pakkauksessa. Pakkaus on muodoltaan suora särmiö, jonka pohja on tasakylkinen puolisuunnikas. Sen yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 4,0 cm ja 8,0 cm. Puolisuunnikkaan terävä kantakulma on 60°. Koko pakkauksen pituus on 28,0 cm. Kuinka paljon pakkauksen suklaapatukat painavat, kun suklaan tiheys on 1,33 kg/dm^3. Pakkausmateriaalin massaa ei oteta huomioon.



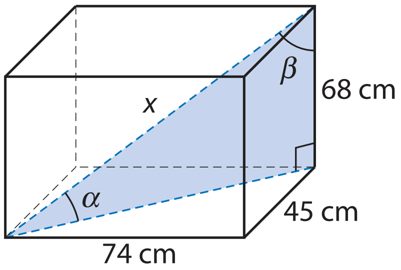
203. Suoran särmiön muotoisen, lasista valmistetun prisman pohja on tasakylkinen kolmio. Kolmion kantakulmat ovat 36° ja kyljen pituus on 8,3 cm. Prisman korkeus on 18,4 cm. Laske prisman massa, kun valmistusmateriaalina käytetyn lasin tiheys on 2,50 g/cm^3.

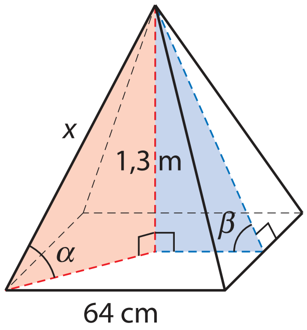
E5 **204.** Puutarhajuhlissa voi hakea juotavaa suoran ympyrälieriön muotoisista kanistereista, jotka on asetettu noutopöytään kyljelleen tuettuina. Poikkileikkausympyrän halkaisija on 24,0 cm ja kanisterin pituus on 45,0 cm. Nestepinnan korkeus kyljellään olevassa kanisterissa on 16,9 cm. Kuinka monta litraa kanisterissa on juomaa?

205. Kermajuusto on suoran ympyrälieriön muotoinen. Juuston halkaisija on 11,2 cm ja juuston korkeus on 9,8 cm. Klaus ostaa juustopaketin kotiin. Jonkin ajan kuluttua hän havaitsee, että juuston reunassa on hometta. Hän poistaa homeen leikkaamalla juustosta suoran lieriön muotoisen palan, jonka pohja on segmentin muotoinen. Leikattuun kohtaan muodostuneen jänteen pituus on 4,2 cm. Kuinka monta prosenttia juuston tilavuudesta leikattiin pois?

Sekalaisia

206. Määritä janan x pituus ja kulmien α ja β suuruudet, kun kappale on
a) suorakulmainen särmiö **b)** suora, neliöpohjainen pyramidi.





207. Louvren taidemuseon sisäpihalla on lasipyramidi, jonka pohjaneliön sivun pituus on 35,42 m ja korkeus 21,64 m. Laske pyramidin
a) vaipan ala
b) sivusärmän ja pohjan välinen kaltevuuskulma
c) tilavuus.

208. Suoran ympyrälieriön muotoisesta tukista, jonka halkaisija on 18,0 cm, valmistetaan rakennustyömaalle poikkileikkaukseltaan suorakulmion muotoisia palkkeja. Palkkien leveys on 12,0 cm ja pituus on 2,50 m. Määritä palkin tilavuus, kun tukista leikataan palkki, jonka korkeus on suurin mahdollinen.

209. Grillikioski tarjoilee ranskalaisia perunoita suoran ympyräkartion muotoisessa tötterössä. Se on valmistettu sektorin muotoisesta paperista, jonka pinta-ala on 325 cm^2. Tötterön suuaukon halkaisija on 12 cm. Laske tötterön tilavuus desilitroina.

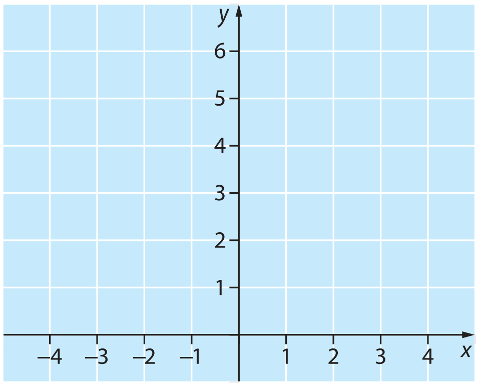
210. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 12,4 cm ja toinen terävä kulma 64,5°. Kolmio pyörähtää pitemmän kateettinsa ympäri. Laske syntyneen kartion tilavuus ja vaipan ala. [S2006, 8]

2.5 Geometriaa koordinaatistossa

Pohdinta

Kolmion *ABC* kärkipisteet ovat *A* (–2, 1), *B*(3, 1) ja *C*(3, 5).

a) Piirrä kolmio koordinaatistoon.



b) Määritä kuvan avulla kolmion kateettien pituudet.

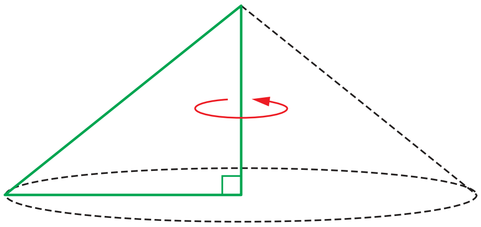
c) Miten voit laskea kateettien pituudet kärkipisteiden *A*, *B* ja *C* avulla?

d) Laske kolmion hypotenuusan pituus.

e) Laske kolmion terävien kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

f) Laske kolmion pinta-ala.

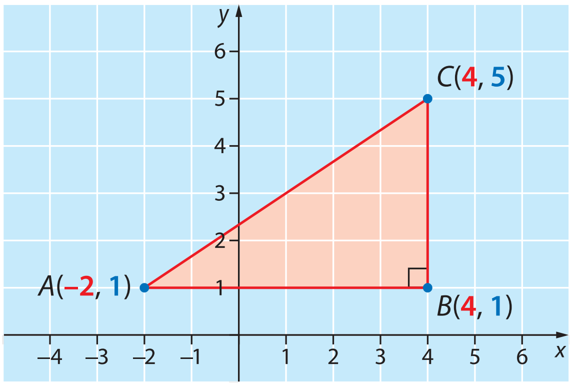
g) Kolmio *ABC* pyörähtää lyhyemmän kateettinsa ympäri. Muodostuva kappale on ympyräkartio. Laske ympyräkartion tilavuus.



Tavallisen *xy*-koordinaatiston akselit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Geometrisia kuvioita voidaan tarkastella *xy*-koordinaatistossa, jolloin kuvioiden kärkipisteet ovat koordinaatiston pisteitä. Kuvioiden sivujen pituudet määritetään laskemalla kärkipisteiden välisten janojen pituudet.

Tarkastellaan kuvan suorakulmaista kolmiota ABC, jonka kärkipisteiden koordinaatit ovat $A(-2, 1)$, $B(4, 1)$ ja $C(4, 5)$.



Kolmion kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

- Vaakasuoran kateetin AB pituus $|AB|$ riippuu vain päätepisteiden x-koordinaateista. Vaakasuoran kateetin pituus:

Janan pituutta merkitään itseisarvomerkkien avulla.

$$|AB| = 4-(-2) = 6.$$

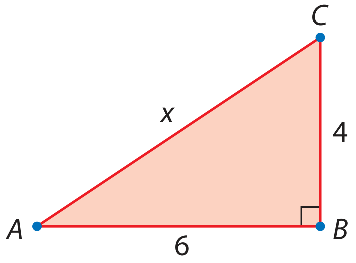
- Pystysuoran kateetin BC pituus riippuu vain päätepisteiden y-koordinaateista. Pystysuoran kateetin pituus:

Erotus voidaan laskea myös toisin päin. Tällöin erotuksesta on otettava itseisarvo.
$|1-5| = |-4| = 4$

$$|BC| = 5-1 = 4.$$

- Hypotenuusan pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

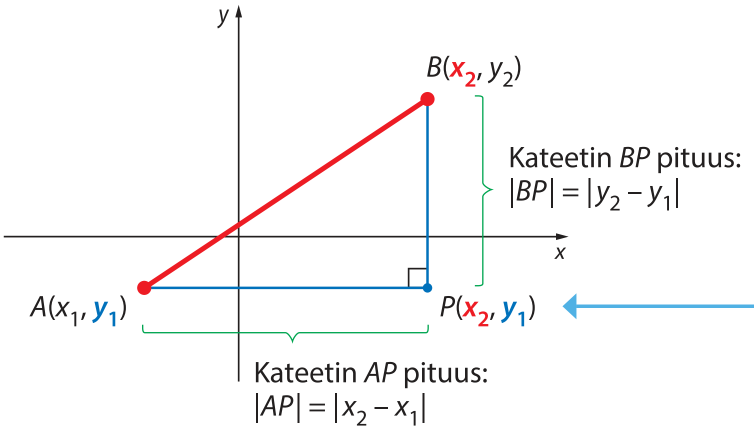
$$x^2 = 4^2 + 6^2$$
$$x^2 = 16 + 36$$
$$x^2 = 52$$
$$x = \pm\sqrt{52}$$
$$x = \pm 2\sqrt{13}$$



Sievennetyn muodon juurilausekkeesta saa laskimen avulla.

Koska sivun pituus on aina positiivinen, hypotenuusan pituus on $|AC| = 2\sqrt{13}$.

Tarkastellaan janaa AB koordinaatistossa, kun janan päätepisteiden koordinaatit ovat $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$. Piirretään koordinaatistoon suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusana on jana AB ja jonka kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaisia.



Kolmion kolmannen kärkipisteen P koordinaatit saadaan janan päätepisteiden avulla.

Lasketaan hypotenuusan pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$$

$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$|AB| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Itseisarvomerkit voidaan korvata tavallisilla suluilla, koska erotuksen toinen potenssi on aina positiivinen.

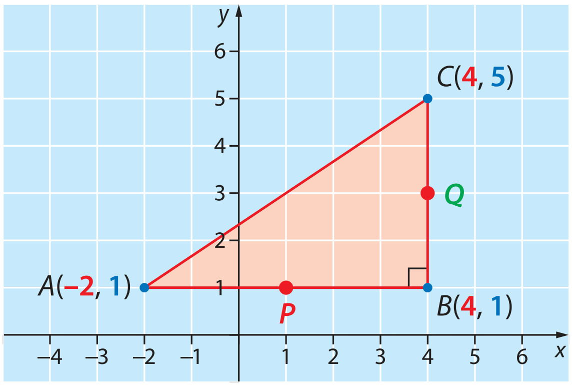
Janan pituus

Janan AB päätepisteiden koordinaatit ovat (x_1, y_1) ja (x_2, y_2).

- Janan AB pituus on $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Jos jana on x-akselin suuntainen, janan pituus saadaan suoraan x-koordinaattien erotuksen avulla.
  $|AB| = |x_2 - x_1|$
- Jos jana on y-akselin suuntainen, janan pituus saadaan suoraan y-koordinaattien erotuksen avulla.
  $|AB| = |y_2 - y_1|$

Janan päätepisteiden koordinaattien avulla voidaan laskea myös janan keskipisteen koordinaatit.

Lasketaan ensin kuvassa olevien koordinaattiakselien suuntaisten janojen AB ja BC keskipisteiden koordinaatit **P** ja **Q**.



- Janan AB kaikilla pisteillä on sama y-koordinaatti, $y = 1$. Janan keskipisteen x-koordinaatti on päätepisteiden x-koordinaattien keskiarvo.

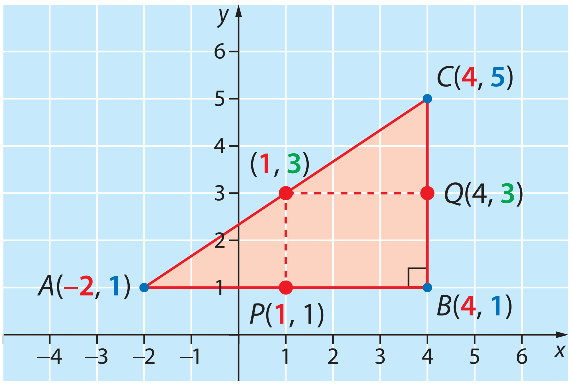
$$x = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad P(1,\ 1)$$

- Janan BC kaikilla pisteillä on sama x-koordinaatti, $x = 4$. Janan keskipisteen y-koordinaatti on päätepisteiden y-koordinaattien keskiarvo.

$$y = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad Q(4,\ 3)$$

Janan AC keskipisteen koordinaatit saadaan koordinaattiakselien suuntaisten janojen keskipisteistä.

Janan AC keskipisteen koordinaatit ovat (1, 3).



Janan keskipisteen koordinaatit

Janan päätepisteiden koordinaatit ovat (x_1, y_1) ja (x_2, y_2). Janan keskipisteen (x_0, y_0) koordinaatit saadaan laskemalla päätepisteiden koordinaattien keskiarvot.

$$(x_0,\ y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

ESIMERKKI 1

Suorakulmion *ABCD* kolme kärkipistettä ovat *A*(–8, –3), *B*(–1, –3) ja *C*(–1, 2).

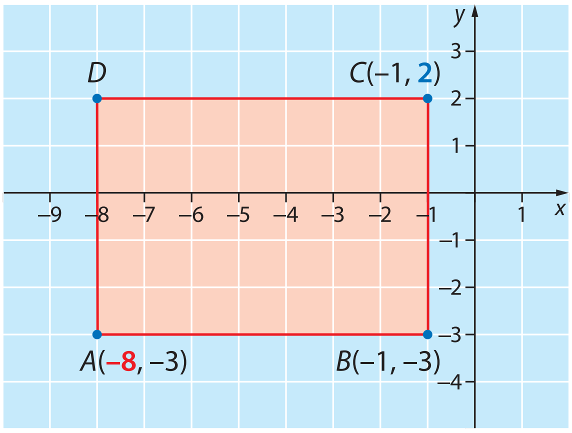
a) Määritä suorakulmion neljännen kärkipisteen *D* koordinaatit.

b) Laske suorakulmion lävistäjän *AC* pituus.

c) Suorakulmion sisälle piirretään tasakylkinen kolmio, jonka kanta on jana *AB* ja huippu sijaitsee suorakulmion lävistäjän *AC* keskipisteessä. Laske kolmion korkeusjanan pituus.

RATKAISU

a) Merkitään annetut suorakulmion kärkipisteet koordinaatistoon ja hahmotellaan niiden avulla suorakulmio *ABCD*.



Suorakulmion kaikki kulmat ovat 90° ja vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

- Pisteen *D* tulee sijaita samalla korkeudella, kuin pisteen *C*, joten näiden pisteiden y-koordinaatit ovat samat.
- Pisteen *D* tulee sijaita suoraan pisteen *A* yläpuolella, joten näiden pisteiden x-koordinaatit ovat samat.

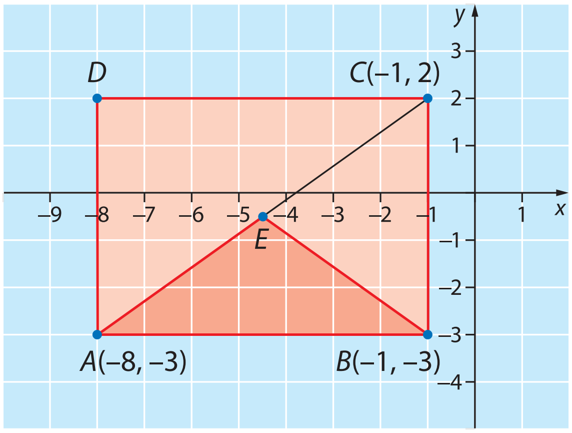
Pisteen *D* koordinaatit ovat (–8, 2).

b) Suorakulmion lävistäjän *AC* pituus saadaan päätepisteiden koordinaattien avulla.

$$\begin{aligned}|AC| &= \sqrt{(-1-(-8))^2+(2-(-3))^2} \\ &= \sqrt{7^2+5^2} \\ &= \sqrt{49+25} \\ &= \sqrt{74}\end{aligned}$$

$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

c) Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään lävistäjän keskipistettä kirjaimella E.


y
x
D
C(–1, 2)
E
A(–8, –3)
B(–1, –3)
–9
–8
–7
–6
–5
–4
–3
–2
–1
1
3
2
1
–1
–2
–3
–4

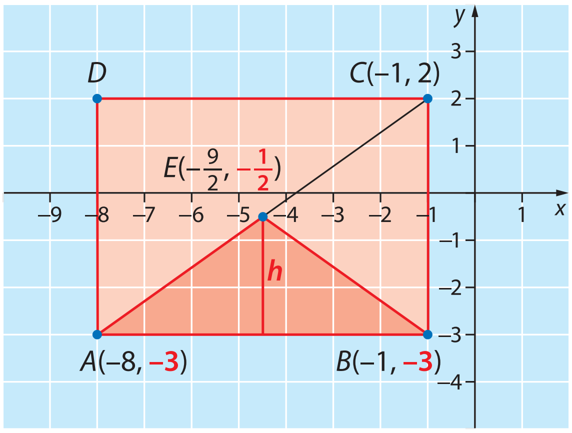
Lasketaan pisteen E koordinaatit lävistäjän päätepisteiden avulla.

Janan keskipisteen (x_0, y_0) koordinaatit:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$E = \left(\frac{-8 + (-1)}{2}, \frac{-3 + 2}{2}\right) = \left(\frac{-9}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

Kolmion korkeusjanan pituus h saadaan laskemalla pisteen E etäisyys kolmion kannasta AB.


y
x
D
C(–1, 2)
E(–9/2, –1/2)
h
A(–8, –3)
B(–1, –3)
–9
–8
–7
–6
–5
–4
–3
–2
–1
1
3
2
1
–1
–2
–3
–4

Kolmion kanta AB on x-akselin suuntainen. Kannan kaikkien pisteiden y-koordinaatti on -3. Kolmion korkeusjanan pituus saadaan y-koordinaattien erotuksena.

$$h = \left|-\frac{1}{2} - (-3)\right| = \left|-\frac{1}{2} + {}^{2)}\frac{3}{1}\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{6}{2}\right| = \left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

VASTAUS **a)** $D(-8, 2)$ **b)** $|AC| = \sqrt{74}$ **c)** $h = \frac{5}{2}$

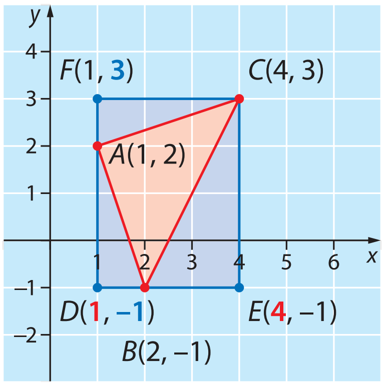
ESIMERKKI 2

Kolmion ABC kärkipisteet ovat $A(1, 2)$, $B(2, -1)$ ja $C(4, 3)$. Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU

Piirretään kolmion ympärille suorakulmio niin, että suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

Suorakulmion kärkipisteiden D, E ja F koordinaatit saadaan kolmion kärkipisteiden avulla. Merkitään kärkipisteet kuvaan.



Suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia.

Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

- $|DE| = 4 - 1 = 3$
- $|FD| = 3 - (-1) = 4$

Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

$$A_{\text{suorakulmio}} = 3 \cdot 4 = 12$$

Kolmiot DBA, BEC ja CFA ovat suorakulmaisia. Lasketaan kolmioiden kateettien pituudet ja pinta-alat.

Kolmio DBA	Kolmio BEC	Kolmio CFA
• $\lvert BD\rvert = 2 - 1 = 1$	• $\lvert EB\rvert = 4 - 2 = 2$	• $\lvert CF\rvert = 4 - 1 = 3$
• $\lvert AD\rvert = 2 - (-1) = 3$	• $\lvert CE\rvert = 3 - (-1) = 4$	• $\lvert FA\rvert = 3 - 2 = 1$
• $A_{DBA} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$	• $A_{BEC} = \frac{\cancel{2} \cdot 4}{\cancel{2}} = 4$	• $A_{CFA} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$

Kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään sinisten kolmioiden DBA, BEC ja CFA pinta-alat, jäljelle jää kysytty kolmion ABC pinta-ala.

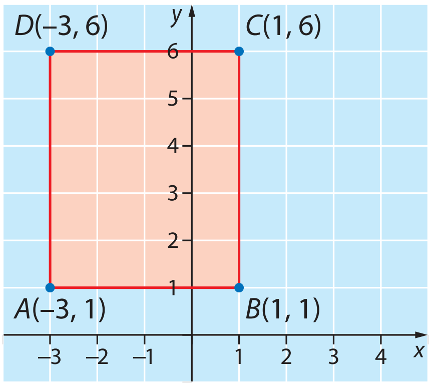
$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{\text{suorakulmio}} - (A_{DBA} + A_{BEC} + A_{CFA}) \\ &= 12 - \left(\frac{3}{2} + 4 + \frac{3}{2}\right) = 12 - 7 = 5 \end{aligned}$$

VASTAUS Kolmion pinta-ala on 5.

ESIMERKKI 3

Suorakulmion *ABCD* kärkipisteet ovat $A(-3, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, 6)$ ja $D(-3, 6)$. Suorakulmio pyörähtää sivun *BC* ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus desilitroina yhden desimaalin tarkkuudella, kun koordinaatiston yksikkönä on senttimetri.

RATKAISU Merkitään suorakulmion kärkipisteet koordinaatistoon ja piirretään suorakulmio *ABCD*.

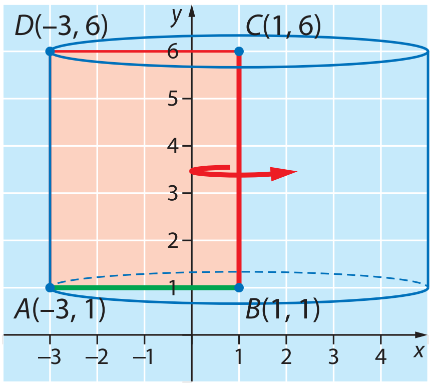


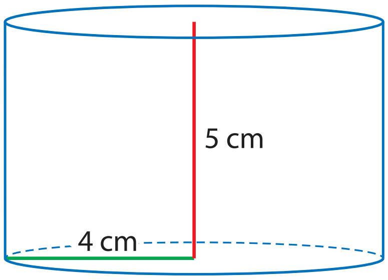
Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

- $|AB| = 1 - (-3) = 4\ (\text{cm})$
- $|BC| = 6 - 1 = 5\ (\text{cm})$

Kun suorakulmio pyörähtää sivun *BC* ympäri, syntyy ympyrälieriö, jonka

- korkeus on $|BC| = 5$ cm
- pohjaympyrän säde on $|AB| = 4$ cm.





Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \cdot (4\ \text{cm})^2 \cdot 5\ \text{cm} = 251{,}32...\ \text{cm}^3$$

Muunnetaan tilavuus desilitroiksi.

$1\ \text{dm}^3 = 1$ litra

$$251{,}32\ldots\ \text{cm}^3 = 0{,}25132\ldots\ \text{dm}^3 = 0{,}25132\ldots\ \text{l} = 2{,}5132\ldots\ \text{dl} \approx 2{,}5\ \text{dl}$$

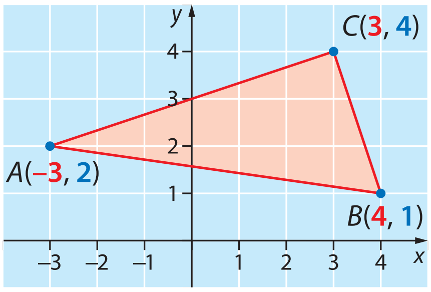
VASTAUS Pyörähdyskappaleen tilavuus on 2,5 dl.

ESIMERKKI 4

Suorakulmaisen kolmion kärkipisteiden koordinaatit ovat $A(-3, 2)$, $B(4, 1)$ ja $C(3, 4)$. Laske kolmion terävien kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

RATKAISU

Piirretään mallikuva. Lasketaan kolmion kärkipisteiden avulla kolmion sivujen pituudet.

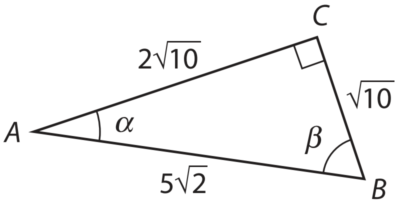


Laskin sieventää yleensä juurilausekkeet. Jotta sivujen pituudet voidaan laittaa suuruusjärjestykseen, pituuksista kannattaa ottaa laskimella likiarvo.

- $$|AB| = \sqrt{(4-(-3))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$
- $$|AC| = \sqrt{(3-(-3))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$$
- $$|BC| = \sqrt{(3-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$$

Kolmion pisin sivu eli hypotenuusa on sivu AB. Kaksi muuta sivua ovat kateetteja.

Merkitään kolmion teräviä kulmia kirjaimilla α ja β.



Kun kolmion kaikkien sivujen pituudet tunnetaan, voidaan kulmien suuruudet ratkaista minkä tahansa trigonometrisen funktion avulla.

Ratkaistaan kulma α esimerkiksi sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}$$
$$\alpha = 26{,}565...^\circ$$
$$\alpha \approx 27^\circ$$

Kosinin avulla:

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}$$

Tangentin avulla:

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$$

Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 26{,}565\ldots^\circ = 63{,}434\ldots^\circ \approx 63^\circ.$$

VASTAUS Kolmion terävien kulmien suuruudet ovat 27° ja 63°.

ESIMERKKI 5

Ympyrän keskipiste on $A(3, -2)$ ja kehäpiste $B(5, 2)$. Ympyrälle piirretään pisteen $C(7, 1)$ kautta kaksi tangenttia.

a) Tutki laskemalla, sivuaako toinen pisteen C kautta piirretty tangentti ympyrää pisteessä B.

b) Laske ympyrän pinta-alan tarkka arvo.

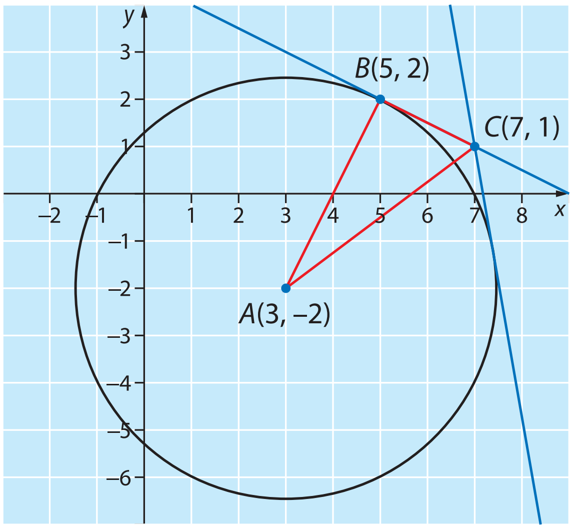
c) Laske tangenttikulman suuruus asteen tarkkuudella.

RATKAISU

a) Piirretään ensin ympyrä. Ympyrä voidaan piirtää keskipisteen A ja kehäpisteen B avulla.

Merkitään koordinaatistoon piste C ja piirretään ympyrälle pisteen C kautta kulkevat tangentit.

Piirretään kuvaan kolmio ACB.



Sivuamispisteeseen piirretty säde ja tangentti ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Jos piste B on tangentin sivuamispiste, kolmio ACB on suorakulmainen kolmio.

Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

- $|AB| = \sqrt{(5-3)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$
- $|AC| = \sqrt{(7-3)^2 + (1-(-2))^2} = 5$
- $|BC| = \sqrt{(7-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$

Kolmio on suorakulmainen, jos Pythagoraan lause on voimassa.

$$5^2 = \sqrt{5}^2 + (2\sqrt{5})^2$$

$$25 = 25$$

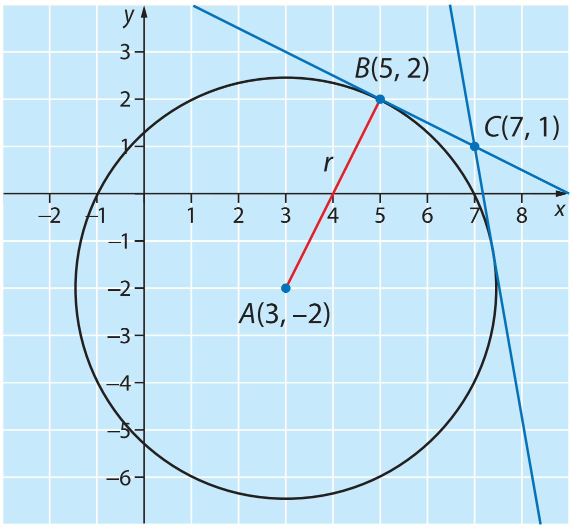
tosi

Tulo $2\sqrt{5}$ on laitettava sulkuihin, kun se on potenssin kantalukuna.

Pythagoraan lause on voimassa, joten kolmio ACB on suorakulmainen kolmio. Tällöin pisteeseen B piirretty suora on tangentti, joten B on sivuamispiste.

b) Jana *AB* on ympyrän säde.

$r = |AB| = 2\sqrt{5}$

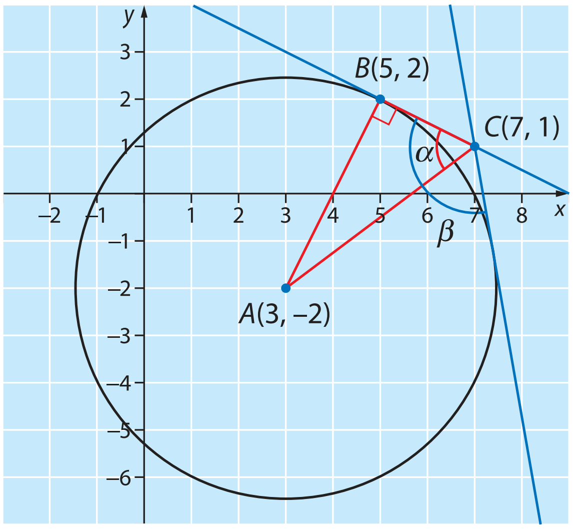


Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$A = \pi r^2$

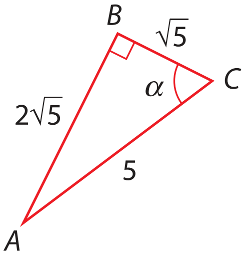
$A = \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 = 20\pi$

c) Merkitään kolmion *ACB* toista terävää kulmaa kirjaimella α. Kulma α on puolet tangenttikulmasta β.



Koska suorakulmaisen kolmion kaikkien sivujen pituudet tunnetaan, kulma α voidaan ratkaista myös kosinin tai tangentin avulla.

Ratkaistaan kulman α suuruus sinin avulla.



$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\alpha = 63{,}43\ldots^\circ$$

Lasketaan tangenttikulman suuruus.

$$\beta = 2\alpha = 2 \cdot 63{,}43\ldots^\circ = 126{,}86\ldots^\circ \approx 127^\circ$$

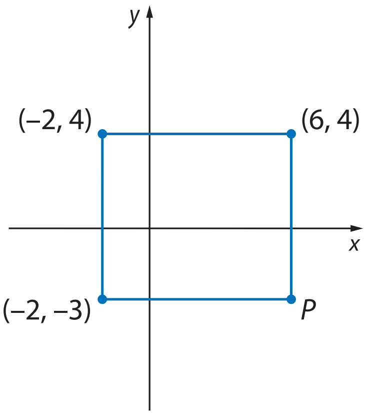
VASTAUS

a) Tangentti sivuaa ympyrää pisteessä *B*.
b) Ympyrän pinta-ala on 20π.
c) Tangenttikulman suuruus on 127°.

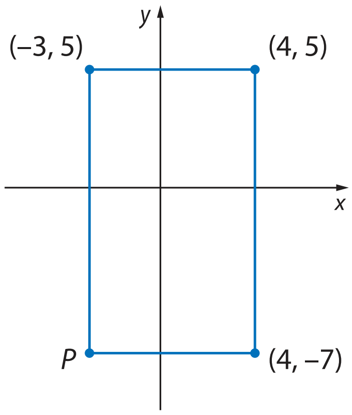
Tehtävät

211. Määritä kärkipisteen *P* koordinaatit, kun nelikulmio on

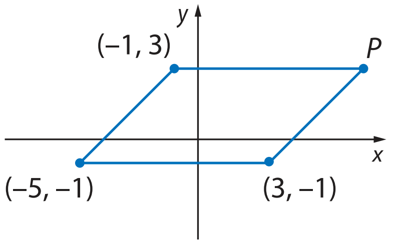
a) suorakulmio



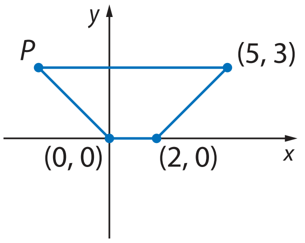
b) suorakulmio



c) suunnikas



d) tasakylkinen puolisuunnikas.



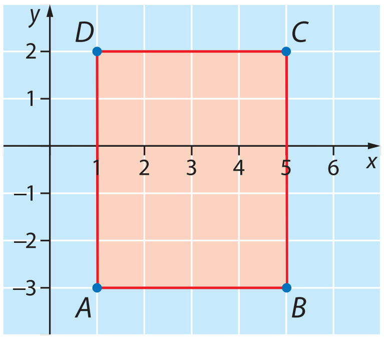
212. Kuvan nelikulmio *ABCD* on suorakulmio. Laske

a) Sivun *AB* pituus.

b) Sivun *AD* pituus.

c) Lävistäjän *AC* pituus.

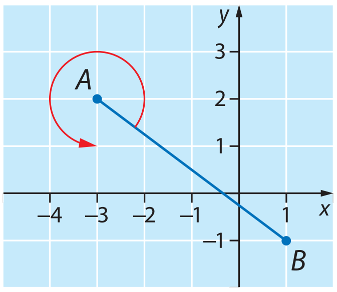
d) Kolmion *ABD* pinta-ala.


y
x
D
C
A
B
2
1
−1
−2
−3
1
2
3
4
5
6

213. Olkoon *A*(–3, 2) ja *B*(1, –1). Kun jana *AB* pyörähtää päätepisteen *A* ympäri, syntyy ympyrä.

a) Laske ympyrän pinta-ala.

b) Tutki laskemalla, onko piste (–5, 1) ympyrän kehän sisäpuolella vai ulkopuolella.


y
x
A
B
3
2
1
−1
−4
−3
−2
−1
1

E1 **214.** Suorakulmion $ABCD$ kolme kärkipistettä ovat $A(-1, -2)$, $B(5, -2)$ ja $D(-1, 1)$.

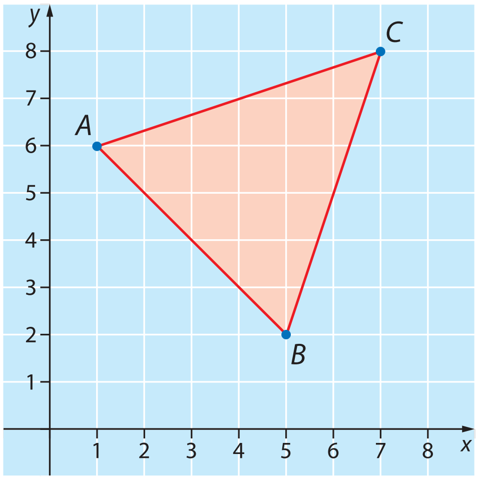
- **a)** Määritä suorakulmion kärkipisteen C koordinaatit.
- **b)** Laske suorakulmion lävistäjän BD pituus.
- **c)** Suorakulmion sisälle piirretään tasakylkinen kolmio, jonka kanta on jana AB ja huippu sijaitsee suorakulmion lävistäjän BD keskipisteessä. Laske kolmion korkeusjanan pituus.

215. Suunnikkaan $ABCD$ kolme kärkipistettä ovat $A(1, -2)$, $B(4, -2)$ ja $C(-1, 5)$.

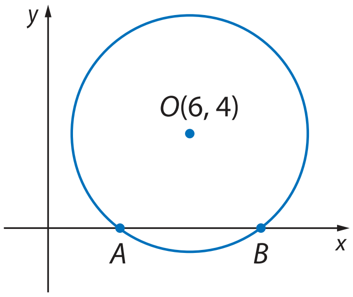
- **a)** Määritä suunnikkaan kärkipisteen D koordinaatit.
- **b)** Laske suunnikkaan kummankin lävistäjän pituus.
- **c)** Suunnikkaan lävistäjät leikkaavat toisensa pisteessä E. Laske pisteen E koordinaatit, kun suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

216. Kolmion ABC kanta on jana AB.

- **a)** Osoita laskemalla, että kolmio ABC on tasakylkinen.
- **b)** Laske kolmion kannan keskipisteen D koordinaatit.
- **c)** Laske kolmion korkeusjanan CD pituus.
- **d)** Laske kolmion pinta-ala.



217. Ympyrän keskipiste sijaitsee pisteessä $O(6, 4)$. Ympyrän säteen pituus on 5. Ympyrän kehä leikkaa x-akselin pisteissä A ja B. Määritä pisteiden koordinaatit.



E2 **218.** Kolmion ABC kärkipisteet ovat $A(-3, 1)$, $B(2, 4)$ ja $C(-1, 5)$. Laske kolmion pinta-ala.

219. Nelikulmion kärkipisteiden koordinaatit ovat $(-3, -3)$, $(2, -2)$, $(4, 1)$ ja $(-2, 2)$. Laske nelikulmion pinta-ala.

---

220. Nelikulmion muotoisen tontin kulmiin on laitettu rajapyykit, jotka sijaitsevat koordinaatiston pisteissä $(1, -2)$, $(3, -2)$, $(5, 4)$ ja $(-1, 1)$. Laske tontin pinta-ala aareina, kun koordinaatiston yksikkö on 100 m.

221. Suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Suorakulmion sisään on piirretty kolmio, jonka kärkipisteet ovat $A(-1, -2)$, $B(1, 6)$ ja $C(4, 3)$.

a) Määritä kärkipisteet pienimmälle mahdolliselle suorakulmiolle, jonka sisään kolmio ABC on piirretty.

b) Kuinka monta prosenttia kolmion ABC ala on pienempi kuin suorakulmion ala?

E3 **222.** Suorakulmion $ABCD$ kärkipisteet ovat $A(-7, -2)$, $B(-1, -2)$, $C(-1, 3)$ ja $D(-7, 3)$. Suorakulmio pyörähtää sivun AB ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus desilitroina yhden desimaalin tarkkuudella, kun koordinaatiston yksikkönä on senttimetri.

223. Suorakulmion kärkipisteet ovat $(12, -7)$, $(12, 2)$, $(1, -7)$ ja $(1, 2)$. Suorakulmio pyörähtää pidemmän sivun ympäri, jolloin syntyy ympyrälieriö. Koordinaatiston yksikkönä on senttimetri.

a) Laske ympyrälieriön vaipan ala neliösenttimetrin tarkkuudella.

b) Laske ympyrälieriön tilavuus litroina yhden desimaalin tarkkuudella.

224. Suorakulmaisen kolmion kärkipisteet ovat $A(-3, -4)$, $B\left(\frac{5}{2}, -4\right)$ ja $C\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$. Kun suorakulmainen kolmio pyörähtää lyhyemmän kateetin ympäri, syntyy ympyräkartio K_1. Kun suorakulmainen kolmio pyörähtää pidemmän kateetin ympäri, syntyy ympyräkartio K_2. Kumman kartio tilavuus on suurempi? Kuinka monta prosenttia suurempi on suuremman kartion tilavuus pienemmän kartion tilavuuteen verrattuna?

E4 **225.** Suorakulmaisen kolmion kärkipisteiden koordinaatit ovat (–10, 6), (14, –10) ja (–6, 12). Laske kolmion terävien kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

226. Tasakylkisen kolmion kannan päätepisteet ovat (–4, –14) ja (12, –6). Kolmion huippu sijaitsee pisteessä (–4, 6). Laske

a) kolmion kantakulmien suuruudet asteen tarkkuudella

b) kolmion pinta-ala.

227. Pisteitä $A = (1, 4)$ ja $B = (7, 1)$ katsotaan origosta. Kuinka suuressa kulmassa jana AB näkyy, ts. mikä on janan päätepisteisiin suuntautuvien tähystysviivojen välinen kulma? Anna vastaus yhden asteen tarkkuudella. [S2010, 6]

E5 **228.** Ympyrän keskipiste on $A(-5, 3)$ ja kehäpiste $B(-7, 6)$. Ympyrälle piirretään kaksi tangenttia, jotka leikkaavat pisteessä (0, 4).

a) Tutki laskemalla, kumpi pisteistä (–3, 0) vai (–2, 1) on tangentin sivuamispiste.

b) Laske ympyrän pinta-alan tarkka arvo.

c) Laske tangenttikulman suuruus asteen tarkkuudella.

229. Ympyrän halkaisijan päätepisteet ovat $A(9, 1)$ ja $B(4, 6)$.

a) Laske ympyrän keskipisteen koordinaatit sekä ympyrän säteen pituuden tarkka arvo.

b) Tutki laskemalla, onko piste $\left(8, 5\frac{1}{2}\right)$ ympyrän kehän sisäpuolella vai ulkopuolella.

c) Ympyrälle piirretään kaksi tangenttia pisteestä (7, 9). Toinen tangenteista sivuaa ympyrää pisteessä B. Laske tangenttikulman suuruus asteen tarkkuudella.

230. Ympyrän keskipiste on $O(5, -1)$ ja kehäpiste $A(9, 2)$.

a) Piirrä ympyrä koordinaatistoon. Ympyrän halkaisija on jana AB. Määritä piirtämällä halkaisijan toisen päätepisteen B koordinaatit.

b) Ympyrän sisälle piirretään tasakylkinen kolmio ABC. Kolmion huippupiste C sijaitsee ympyrän kehällä. Ratkaise piirtämällä huippupisteen C koordinaatit, kun pisteen C koordinaatit ovat positiivisia.

c) Laske tasakylkisen kolmion pinta-ala.

Sekalaisia

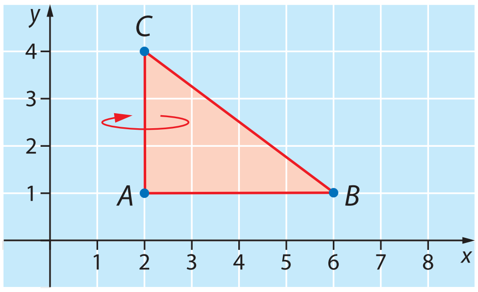
231. Suorakulmion kolme kärkeä ovat pisteissä (–4, 1), (5, 1) ja (–4, –6).

a) Määritä neljännen kärkipisteen koordinaatit.

b) Laske suorakulmion lävistäjän pituus.

c) Laske suorakulmion pinta-ala.

232. Koordinaatistoon on piirretty kolmio *ABC*.



a) Osoita laskemalla, että kolmio on suorakulmainen.

b) Kun kolmio pyörähtää kateetin *AC* ympäri, syntyy pyörähdyskappale. Laske muodostuneen ympyräkartion tilavuuden tarkka arvo.

233. Ympyrän halkaisijan päätepisteet ovat (–2, 4) ja (4, 1). Laske ympyrän

a) keskipisteen koordinaatit.

b) pinta-alan tarkka arvo.

---

234. Kolmion kärjet ovat pisteissä (–6, 1), (0, 0) ja (4, 9).

a) Laske kolmion kulmat asteen kymmenesosan tarkkuudella.

b) Laske kolmion pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella.

[K2009, 9]

235. Ympyrän keskipiste on *O*(–2, –3). Ympyrä kulkee origon kautta.

a) Laske ympyrän säde.

b) Tutki laskemalla, onko piste *A*(–5, –1) ympyrän kehällä.

c) Ympyrän halkaisija kulkee origon kautta. Määritä piirtämällä halkaisijan toisen päätepisteen koordinaatit.

d) Ympyrälle piirretään pisteen *B*(3, –2) kautta tangentti. Tutki laskemalla, sivuaako tangentti ympyrää origossa.

3 Yhdenmuotoisuus

Tavoitteena on

- oppia tunnistamaan ja perustelemaan kuvioiden yhdenmuotoisuus
- oppia hahmottamaan matemaattisia ongelmia piirtämällä ja etsimään niistä yhdenmuotoisia kuvioita
- kerrata verrannollisuus ja verrantoyhtälön ratkaiseminen
- oppia käyttämään mittakaavaa pituuksien ja pinta-alojen ratkaisemisessa.

- Milloin kuviot ovat yhdenmuotoisia?
- Miten löydetään yhdenmuotoisten kuvioiden vastinosat?
- Miten perustellaan kolmioiden yhdenmuotoisuus?
- Miten muodostetaan ja lasketaan yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava?
- Miten ratkaistaan yhdenmuotoisuussuhteen avulla vastinjanojen pituuksia?
- Mikä yhteys on mittakaavalla ja pinta-alojen suhteella?

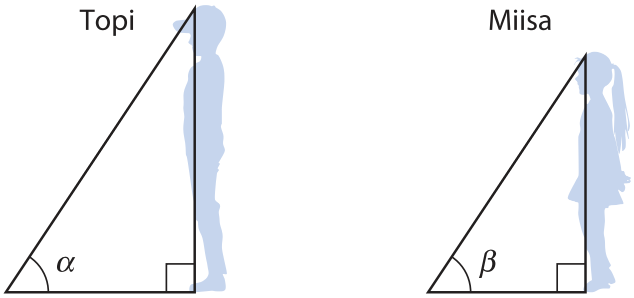
- Miten muodostetaan yhdenmuotoisuussuhteen avulla yhtälöitä?
  - – pituuksien määrittäminen
  - – pinta-alojen määrittäminen
- Miten mittakaava määritetään
  - – pituuksien avulla
  - – pinta-alojen avulla?
- Miten mittakaavaa käytetään karttatehtävissä?
- Miten yhdenmuotoisuutta voidaan hyödyntää avaruuskappaleissa?
  - – sisäkkäiset avaruuskappaleet

3.1 Kuvioiden yhdenmuotoisuus

Pohdinta

Topi ja Miisa seisovat vierekkäin urheilukentällä. Aurinko paistaa heidän takaansa, jolloin heidän eteensä muodostuu varjo. Topin pituus on 180 cm ja Miisan 150 cm. Topin varjon pituus on 120 cm ja Miisan 100 cm.

a) Tilannetta voidaan mallintaa suorakulmaisten kolmioiden avulla. Merkitse seuraaviin kuviin tehtävässä annetut mitat.



b) Laske kulmien α ja β suuruudet asteen tarkkuudella. Mitä havaitset?

c) Kuinka suuria ovat kolmioiden toiset terävät kulmat?

d) Laske seuraavat suhteet.

$$\frac{\text{Topin pituus}}{\text{Miisan pituus}} =$$

$$\frac{\text{Topin varjon pituus}}{\text{Miisan varjon pituus}} =$$

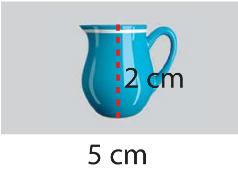
Mitä huomaat?

e) Topin ja Miisan viereen tulee Aino, jonka pituus on 120 cm. Kuinka pitkä on hänen varjonsa?

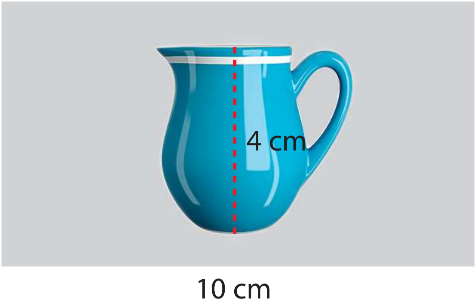
Kuva K_2 on saatu suurentamalla kuvaa K_1. Koska kuvien muoto on sama, ne ovat **yhdenmuotoiset**.

Kuvan K_1 leveys ja kannun korkeus on kaksinkertaistunut suurennuksessa.

Kuva K_1



Kuva K_2

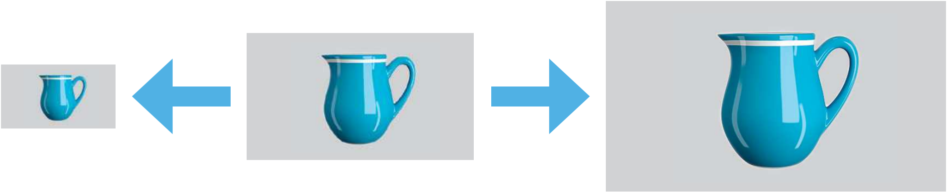


Yhdenmuotoisuus voidaan merkitä lyhyesti symbolilla ~.

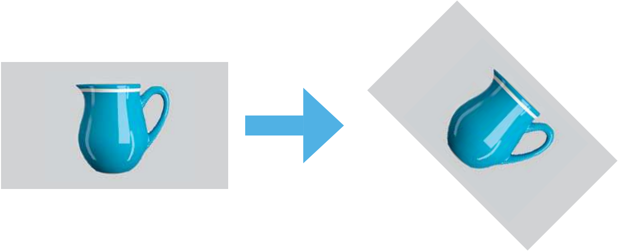
$$K_1 \sim K_2$$

Kaksi kuviota ovat yhdenmuotoisia, jos toinen on saatu toisesta

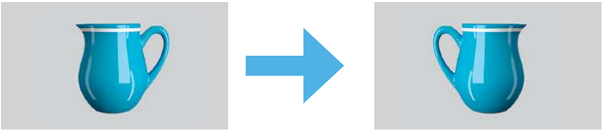
- pienentämällä tai suurentamalla



- kiertämällä

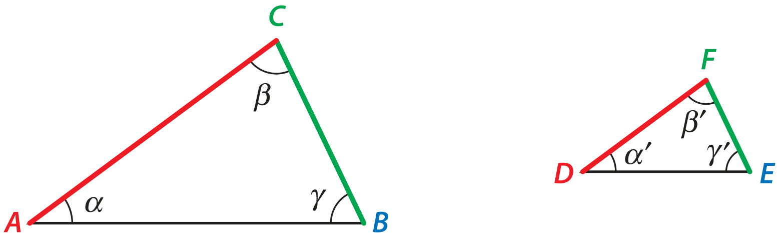


- peilaamalla.



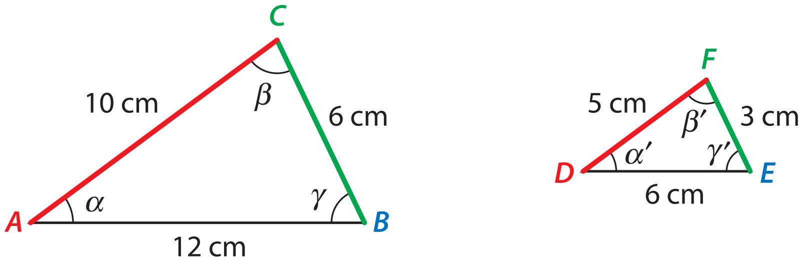
Jos kuvion kokoa ei muuteta, vaan uusi kuvio saadaan kiertämällä tai peilaamalla, kuviot ovat keskenään **yhtenevät**. Yhtenevät kuviot ovat siis keskenään sekä samankokoisia että samanmuotoisia.

Kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoiset, koska kolmio DEF on saatu pienentämällä kolmio ABC. Yhdenmuotoisista kuvioista voidaan löytää **vastinosia**.



Vastinkärjet	A ja D	B ja E	C ja F
Vastinjanat	AB ja DE	BC ja EF	AC ja DF
Vastinkulmat	α ja α'	β ja β'	γ ja γ'

Pienentäminen ei muuta kulmien suuruutta, joten kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret.



Vastinjanojen pituudet eivät säily pienennyksessä. Kun lasketaan vastinjanojen pituuksien suhteita, havaitaan, että ne ovat samat.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{12\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 2 \qquad \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{10\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 2 \qquad \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{6\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 2$$

Yhdenmuotoisuus

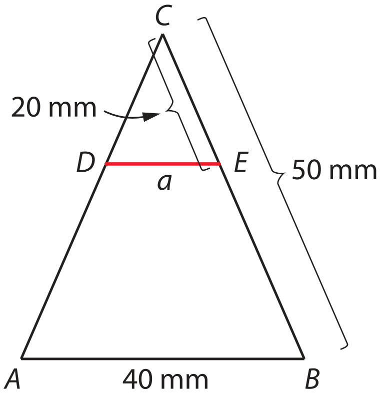
Kaksi tasokuviota K_1 ja K_2 ovat yhdenmuotoiset eli $K_1 \sim K_2$, kun kuvioiden

- vastinjanojen suhde on vakio
- vastinkulmat ovat yhtä suuret.

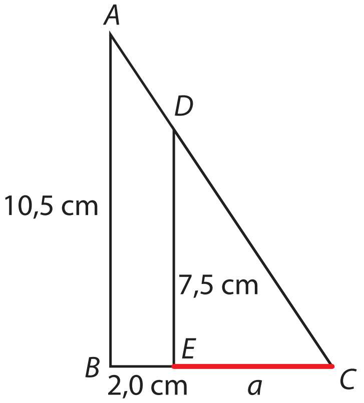
ESIMERKKI 1

Laske sivun *a* pituus, kun kolmiot *ABC* ja *DEC* ovat yhdenmuotoiset.

a)



b)



RATKAISU

a) Sivun *AB* vastinsivu pienemmässä kolmiossa on sivu *DE* ja sivun *BC* vastinsivu on sivu *EC*.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\frac{40}{a} = \frac{50}{20}$$

Verranto ratkaistaan kertomalla ristiin.

$$50a = 40 \cdot 20$$

$$50a = 800 \quad \Big| : 50$$

$$a = \frac{800^{(10}}{50}$$

$$a = \frac{80}{5}$$

$$a = 16 \text{ (mm)}$$

b) Sivun *AB* vastinsivu pienemmässä kolmiossa on *DE* ja sivun *BC* vastinsivu on *EC*.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\frac{10{,}5}{7{,}5} = \frac{2{,}0 + a}{a}$$

Kerrotaan ristiin.

$$10{,}5a = 7{,}5(2{,}0 + a)$$

$$10{,}5a = 15{,}0 + 7{,}5a$$

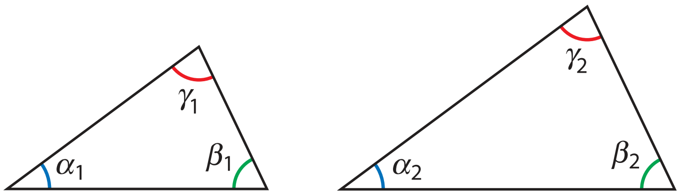
$$3a = 15{,}0 \quad \Big| : 3$$

$$a = 5{,}0 \text{ (cm)}$$

VASTAUS

a) 16 mm **b)** 5,0 cm

Kuvioiden yhdenmuotoisuus voidaan osoittaa kulmien avulla. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinkulmat ovat aina yhtä suuret. Kolmioiden kohdalla riittää, että kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuria. Koska kolmion kulmien summa on 180°, ovat kolmannetkin vastinkulmat tällöin keskenään yhtä suuria. Tämä tunnetaan **kk-lauseena**.



Jos $\alpha_1 = \alpha_2$ ja $\beta_1 = \beta_2$, niin $\gamma_1 = \gamma_2$.

↔

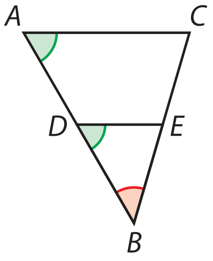
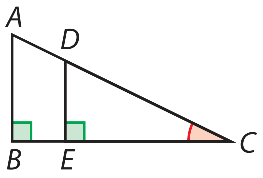
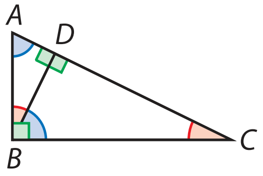
Kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Kk-lause

Kaksi kolmiota ovat yhdenmuotoiset,
jos kolmioissa on kaksi yhtä suurta vastinkulmaparia.

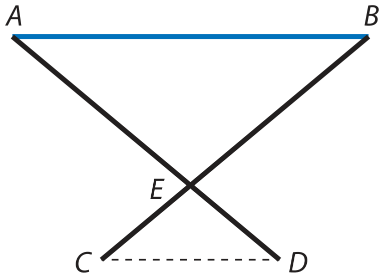
Kolmioiden yhdenmuotoisuus pitää aina osoittaa, ellei tehtävässä muuta mainita. Monissa tilanteissa yhdenmuotoiset kolmiot ovat sisäkkäin.

Lisämateriaali: Erilaisia kulmia s. 165

Yhdenmuotoiset kolmiot	Perustelu yhdenmuotoisuudelle
$ABC \sim DBE$ 	• Kolmioilla on yhteinen kulma B. • Jos janat AC ja DE ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat A ja D ovat yhtä suuret (myös kulmat C ja E ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret).
$ABC \sim DEC$ 	• Kolmioilla on yhteinen kulma C. • Molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana.
$ABC \sim ADB \sim BDC$ 	• Kaikissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana. • Kolmioilla ABC ja ADB on kulma A yhteinen. • Kolmioilla ABC ja BDC on kulma C yhteinen.

ESIMERKKI 2

Silityslauta on asetettu paikalleen lattian suuntaisesti siten, että laudan jalat menevät ristiin. Sivusta katsottuna itse lauta, jalat ja lattia muodostavat kaksi kolmiota kuvan mukaisesti. Merkitään jalkoja janoilla AD ja BC. Itse lautaa kuvaa jana AB ja lattiapintaa jana CD.



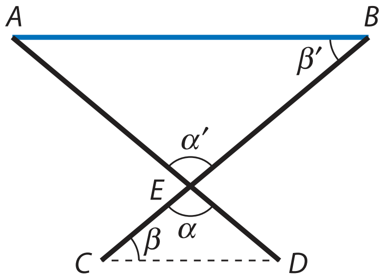
a) Osoita, että kolmiot ABE ja CDE ovat yhdenmuotoiset.

b) Laske silityslaudan pituus, kun $|CD| = 50\text{ cm}$, $|EB| = 64\text{ cm}$ ja $|CE| = 32\text{ cm}$.

RATKAISU

Lisämateriaali: Erilaisia kulmia s. 165

a) Kulmat α ja α' ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret. Kulmilla β ja β' on jana BC vasempana kylkenä, joten kulmat ovat samankohtaisia kulmia. Koska janat CD ja AB (silityslauta ja lattiapinta) ovat yhdensuuntaisia, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\beta = \beta'$.



Kolmioilla ABE ja CDE on siis kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten ne ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

b) Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhteet ovat samat. Merkitään silityslaudan pituutta $|AB|$ kirjaimella x ja muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla verranto.

Suhdetta voidaan supistaa jo tässä vaiheessa:

$$\frac{64^{(32}}{32} = \frac{x}{50}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{x}{50}$$

$$x = 2 \cdot 50$$

$$x = 100$$

$$\frac{|EB|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|CD|}$$

$$\frac{64}{32} = \frac{x}{50}$$

$$32x = 64 \cdot 50 \qquad \Big| : 32$$

$$x = \frac{\overset{2}{\cancel{64}} \cdot 50}{\underset{1}{\cancel{32}}}$$

Ennen kertolaskun suorittamista kannattaa supistaa.

$$x = 2 \cdot 50$$

$$x = 100 \quad \text{(cm)}$$

VASTAUS

b) Laudan pituus on 100 cm.

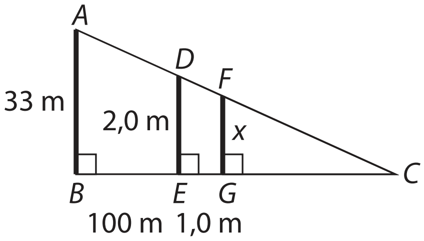
ESIMERKKI 3

Näkötornin korkeus on 33 metriä. Tornin vieressä 100 m:n etäisyydellä on 2,0 m korkea kivimuuri. Voidaanko tornista havaita 145 cm:n pituinen lapsi, joka on muurin takana 1,0 m:n etäisyydellä muurista?

RATKAISU

Samalla tavalla voidaan tutkia, kuinka korkea tornin tulisi olla, jotta sieltä nähdään 145 cm:n pituinen henkilö.

Piirretään mallikuva. Tutkitaan, miten pitkä henkilön pitää vähintään olla, jotta hänet juuri ja juuri nähdään tornista. Merkitään henkilön pituutta kirjaimella x.

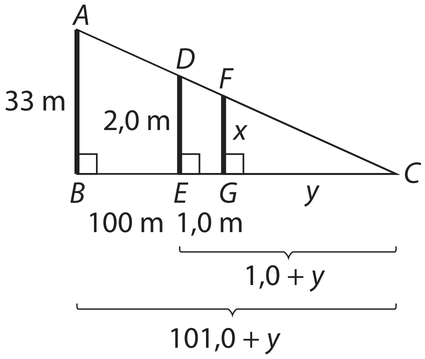


Kolmiot ABC, DEC ja FGC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla:

- kaikilla kolmioilla on suora kulma vastinkulmana
- kulma C on yhteinen.

Henkilön pituus x voidaan ratkaista, jos kolmiosta FGC tunnetaan jonkin toisen sivun pituus. Merkitään sivun GC pituutta kirjaimella y. Tällöin

- sivun EC pituus on $y + 1{,}0$
- sivun BC pituus on $100 + 1{,}0 + y = 101{,}0 + y$.



Muodostetaan kolmioiden ABC ja DEC vastinsivujen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä y.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\frac{33}{2{,}0} = \frac{101{,}0 + y}{1{,}0 + y}$$

$$y = 5{,}4516\ldots\ (\mathrm{m})$$

Muodostetaan sitten kolmioiden ABC ja FGC vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan siitä x.

Tehtävä voidaan ratkaista myös yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} \dfrac{33}{2{,}0} = \dfrac{101{,}0 + y}{1{,}0 + y} \\ \dfrac{33}{x} = \dfrac{101{,}0 + y}{y} \end{cases}$$

$$\frac{|AB|}{|FG|} = \frac{|BC|}{|GC|}$$

$$\frac{33}{x} = \frac{101{,}0 + y}{y}$$

Sijoitetaan $y = 5{,}4516\ldots$

Arvo kannattaa tallentaa laskimen muistiin.

$$\frac{33}{x} = \frac{101{,}0 + 5{,}4516\ldots}{5{,}4516\ldots}$$

$$x = 1{,}69\ (\mathrm{m})$$

Koska henkilön pituuden tulee olla vähintään 1,69 m, jotta hänet nähtäisiin muurin takaa, niin 145 cm = 1,45 m pitkä lapsi ei näy.

VASTAUS

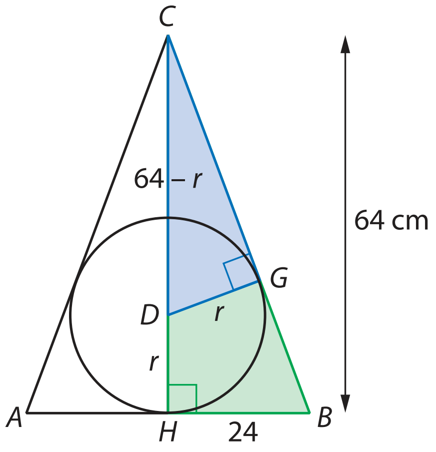
Ei voida havaita 145 cm pitkää lasta.

ESIMERKKI 4

Suoran ympyräkartion korkeus on 64 cm. Kartion sisällä on pallo, joka sivuaa kartion vaippaa ja pohjaa. Määritä pallon säde ja tilavuus litroina, kun kartion pohjan säde on 24 cm.

RATKAISU

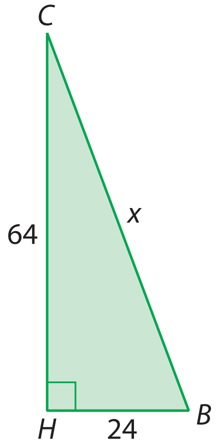
Piirretään poikkileikkauskuva. Kartion poikkileikkaus on tasakylkinen kolmio *ABC*. Pallon poikkileikkaus on ympyrä, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja. Kolmion sivut ovat siis ympyrän tangentteja.



Merkitään pallon sädettä kirjaimella *r* ja keskipistettä kirjaimella *D*. Pallon keskipisteen ja kartion huipun välisen janan pituus $|CD| = 64 - r$ (cm).

Koska kolmion *ABC* sivujana *BC* on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot *BCH* ja *CDG* ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma *C* on kolmioille yhteinen.



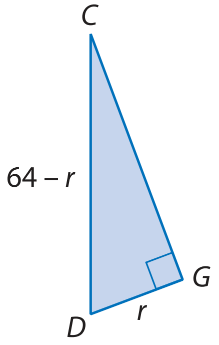
Merkitään kyljen *BC* pituutta kirjaimella *x* ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

Koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen luku, $x = 8\sqrt{73}$.

$$x^2 = 24^2 + 64^2$$

$$x = 8\sqrt{73} \quad \text{tai} \quad x = -8\sqrt{73}$$

Muodostetaan kolmioiden *BCH* ja *CDG* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä *r*.



Käytä laskuissa tarkkaa arvoa $8\sqrt{73}$.

$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|BH|}{|DG|}$$

$$\frac{8\sqrt{73}}{64 - r} = \frac{24}{r}$$

$$r = 3\sqrt{73} - 9 = 16{,}632\ldots \approx 17 \text{ (cm)}$$

Pallon tilavuus on

Lisämateriaali: Yksikkömuunnokset s. 160

$$\frac{4}{3}\pi(3\sqrt{73} - 9)^3 \text{ cm}^3 = 19\,271{,}8\ldots \text{ cm}^3 \approx 19 \text{ dm}^3 = 19 \text{ l}.$$

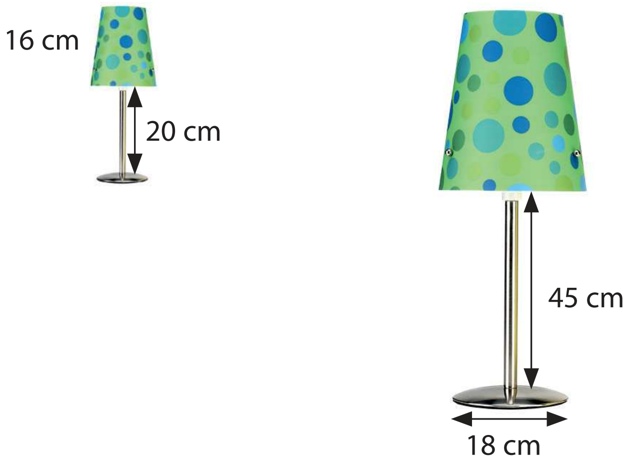
VASTAUS Pallon säde 17 cm ja tilavuus 19 l.

Tehtävät

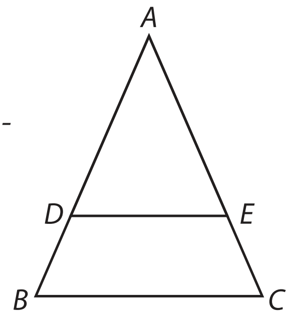
236. Kaksi pöytälamppua ovat yhdenmuotoiset. Laske

a) isomman varjostimen sivujanan pituus

b) pienemmän varjostimen jalan pohjaympyrän säde.


16 cm
20 cm
45 cm
18 cm

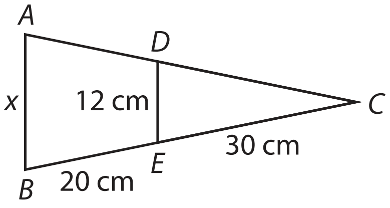
237. Perustele kolmioiden *ABC* ja *ADE* yhdenmuotoisuus, kun janat *BC* ja *DE* ovat yhdensuuntaisia.



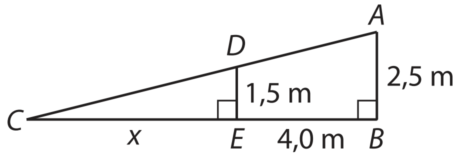
E1

238. Määritä pituus *x*, kun kolmiot *ABC* ja *DEC* ovat yhdenmuotoiset.

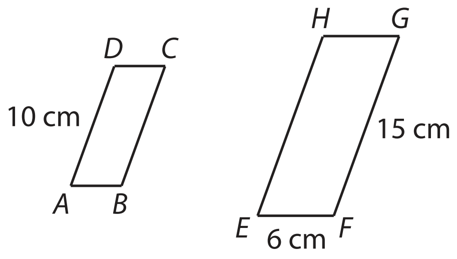
a)


A
D
x
12 cm
C
30 cm
E
B
20 cm

b)


A
D
2,5 m
1,5 m
C
x
E
4,0 m
B

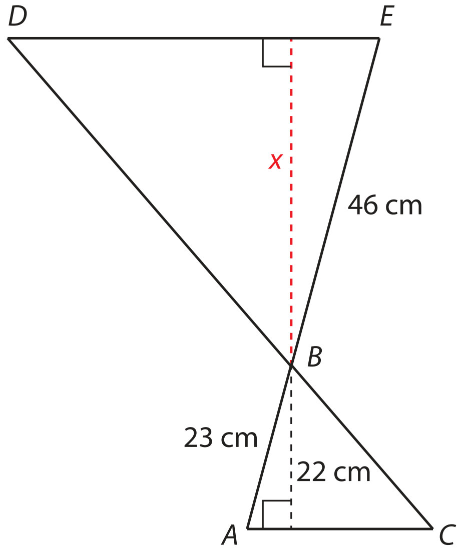
239. Määritä suunnikkaan *ABCD* sivun *AB* pituus, kun suunnikkaat *ABCD* ja *EFGH* ovat yhdenmuotoisia.


D
C
10 cm
A
B
H
G
15 cm
E
6 cm
F

E2 **240.** **a)** Osoita, että kolmiot *ABC* ja *BDE* ovat yhdenmuotoiset, kun janat *DE* ja *AC* ovat yhdensuuntaiset.

b) Mikä on sivun *DB* vastinosa kolmiossa *ABC*?

c) Laske pituus *x*.



241. Pekka arvioi edessään, tasaisella maastolla, kasvavan männyn korkeutta. Hän ottaa oman käsivarren pituisen kepin, ojentaa käsivartensa ja asettaa kepin kasvojensa eteen, pystysuoraan ylös. Pekka siirtyy sellaiselle etäisyydelle (käsivarren asennon säilyttäen), jolloin kepin yläreuna juuri ja juuri peittää männyn latvan. Pekan etäisyys puusta on nyt 21 m. Määritä arvio männyn korkeudelle, kun Pekan silmät ovat 1,8 m:n korkeudella maanpinnasta ja käsivarren pituus on 62 cm.

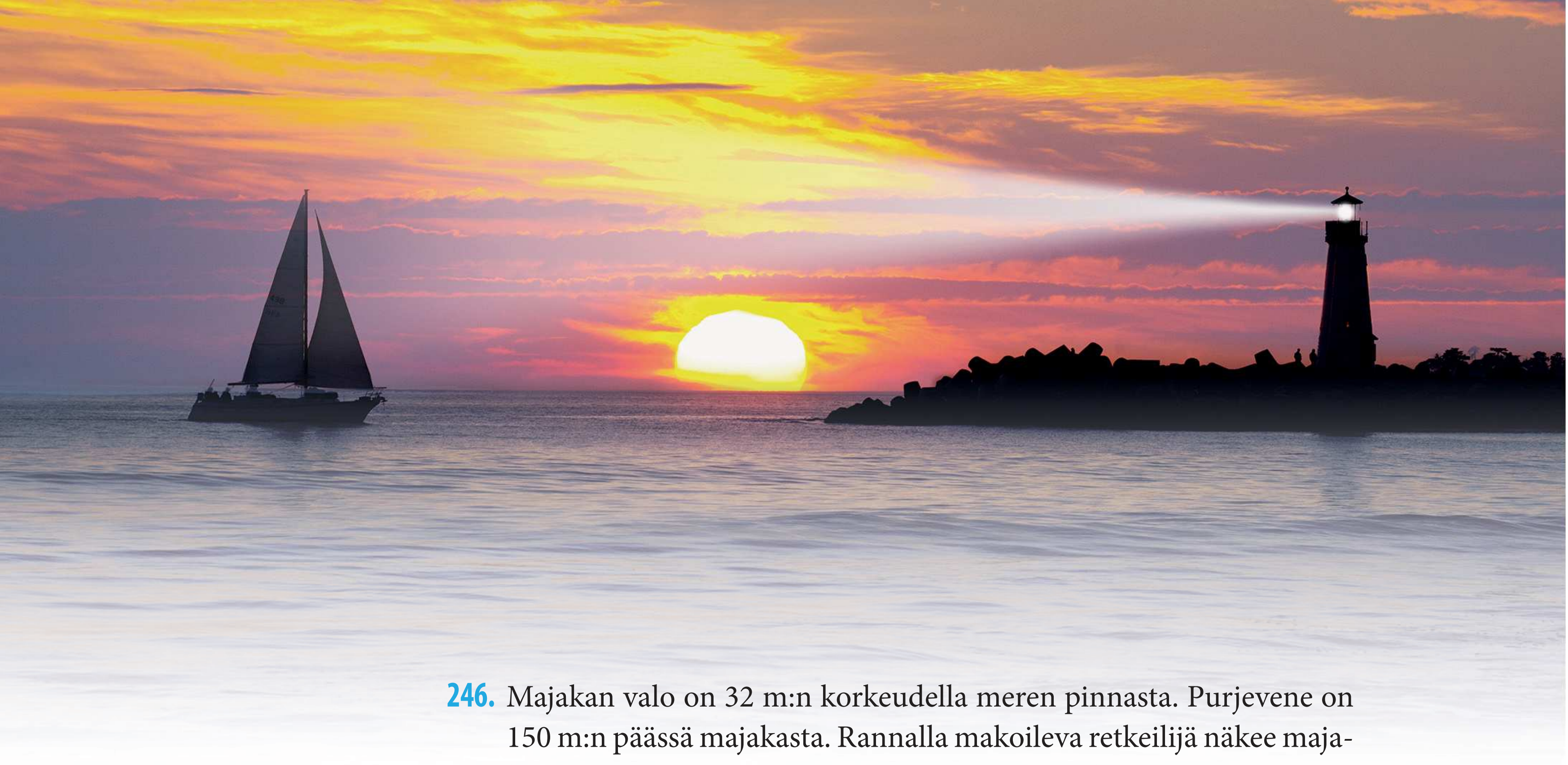
242. Auton lähivalot on suunnattu niin, että 60 cm:n korkeudelta lähtevän valokiilan yläreuna laskee 5 m:n matkalla 5 cm. kuinka kauaksi lähivalot tällöin valaisevat tietä? [S1994, 2b]

---

243. Alvari ja Aleksi piirsivät paperille tasakylkiset kolmiot. Alvarin kolmion kyljen pituus oli 7,0 cm ja kannan pituus 15 cm. Aleksin kolmion kyljen pituus oli 16,8 cm ja kannan pituus 34,5 cm. Ovatko kolmiot yhdenmuotoisia?

244. Tasakylkisen kolmion muotoinen viiri on kaksivärinen siten, että sininen osa on tasakylkinen puolisuunnikas ja punainen osa tasakylkinen kolmio. Punaisen osan kyljen pituus on 12 cm ja kanta 8,5 cm. Tasakylkisen puolisuunnikkaan kyljen pituus on 19 cm. Laske viirin kannan pituus.

E3 **245.** Joona katsoo kerrostalon parvekkeelta 13,2 metrin korkeudelta parkkipaikalle. Parkkipaikan ja talon välissä on 2,5 metriä korkea aita, jonka etäisyys talosta on 25,0 metriä. Aidan takana parkkipaikalla seisoo Milla 3,0 metrin päässä aidasta. Näkeekö Joona Millan, kun Millan pituus on 1,6 metriä?

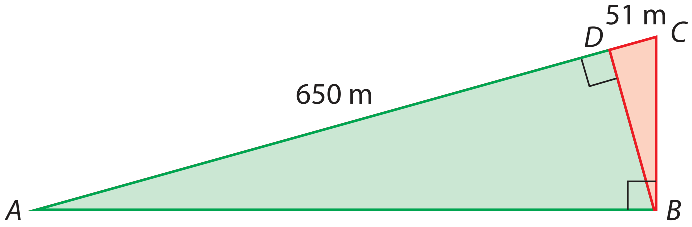


246. Majakan valo on 32 m:n korkeudella meren pinnasta. Purjevene on 150 m:n päässä majakasta. Rannalla makoileva retkeilijä näkee majakan valon juuri ja juuri purjeveneen maston takaa. Kuinka suuri on retkeilijän ja purjeveneen välinen etäisyys, kun purjeveneen masto on 16,5 m:n korkeudella merenpinnasta?

247. Joel seisoo 45 m:n etäisyydellä männystä ja katsoo suoraan männyn latvaan, jolloin latva peittää juuri ja juuri Auringon. Joelin pituus on 1,78 m. Kuinka suuressa kulmassa Auringon säteet kohtaavat Maan, kun männyn korkeus on 19 m?

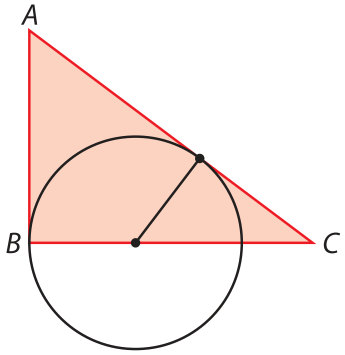
248. Suorakulmaisen kolmion sisään on piirretty neliö, jonka kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa sivua ovat kolmion kateeteilla ja yksi kärki hypotenuusalla. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 310 m ja 750 m. Laske neliön sivun pituus.

249. Suorakulmaisen kolmion *ABC* muotoisesta tontista erotetaan toinen suorakulmaisen kolmion muotoinen tontti *ABD* kuvan osoittamalla tavalla. Laske erotetun tontin pinta-ala. Anna vastaus hehtaareina.



E4 **250.** Neliöpohjaisen pyramidin sisään on asetettu pallo siten, että se sivuaa pyramidin pohjaa ja sivutahkoja. Pyramidin pohjan sivun pituus on 46 cm ja pyramidin korkeus 47 cm. Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on pyramidin tilavuudesta?

251. Suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet ovat $AB = 3$ ja $BC = 4$. Ympyrän keskipiste sijaitsee pidemmällä kateetilla. Lisäksi ympyrä kulkee pisteen B kautta ja sivuaa kolmion hypotenuusaa. Määritä ympyrän säde. [S2015, 12]



252. Pallon ympärille piirretään mahdollisimman pieni suora ympyräkartio. Ympyräkartion pohjan halkaisija on 14,2 cm ja sivujanan pituus on 15,3 cm.

a) Piirrä poikkileikkauskuva tilanteesta.
b) Laske ympyräkartion korkeus.
c) Kuinka pitkä on pallon säde?

253. Metsäpalstalta kaadetaan puita, joita voidaan karsittuina pitää ympyräpohjaisina kartioina. Puista valmistetaan mahdollisimman pitkiä ympyrälieriön muotoisia pilareita, joiden poikkileikkauksen halkaisija on 18 cm. Kuinka pitkä pilari saadaan, jos puun korkeus on 14 m ja tyviläpimitta on 42 cm?

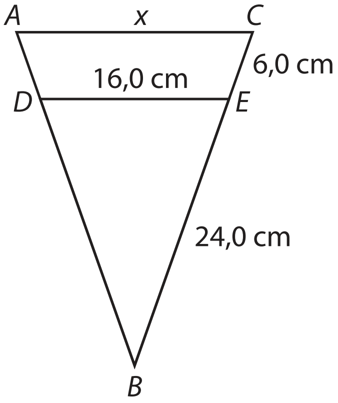
254. Suoran ympyräkartion sisällä on suora ympyrälieriö, jonka pohja on kartion pohjalla ja yläreuna sivuaa kartion vaippaa. Lieriön pohjan halkaisija on yhtä suuri kuin sen korkeus. Toisaalta lieriön pohjan halkaisija on puolet kartion pohjan halkaisijasta. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kartion tilavuudesta? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella. [S2012, 10]

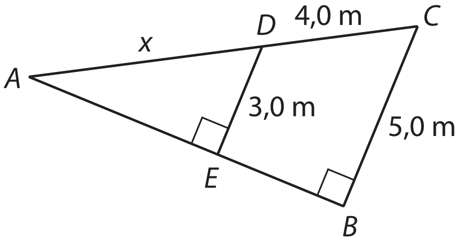
Sekalaisia

255. Laske sivun x pituus, kun tiedetään, että

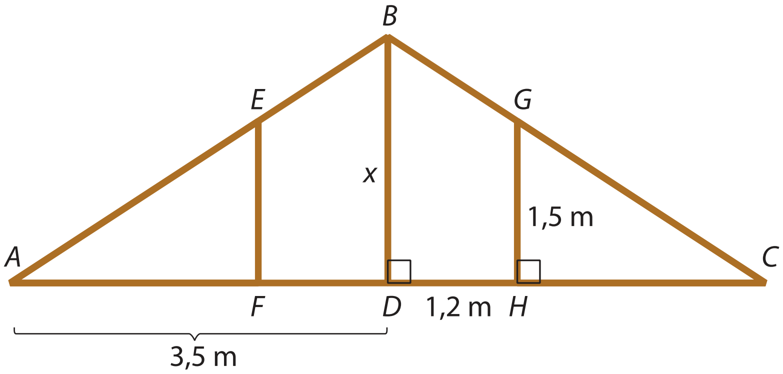
a) tasakylkiset kolmiot ABC ja DBE ovat yhdenmuotoisia

b) suorakulmaiset kolmiot ABC ja AED ovat yhdenmuotoisia.





256. Osoita, että kuvassa olevan katon tukirakenteen muodostamat kolmiot BDC ja GHC ovat yhdenmuotoiset. Kuinka korkea on katon tukirakenteen keskipilari x, kun katon lappeet ovat yhtä pitkät?



257. Kaksi ympyräkartion muotoista popcorn-tötteröä ovat yhdenmuotoiset. Pienemmän tötterön korkeus on 75 % isomman tötterön korkeudesta. Isomman tötterön pohjaympyrän halkaisija on 16 cm. Laske pienemmän tötterön pohjaympyrän halkaisijan pituus.

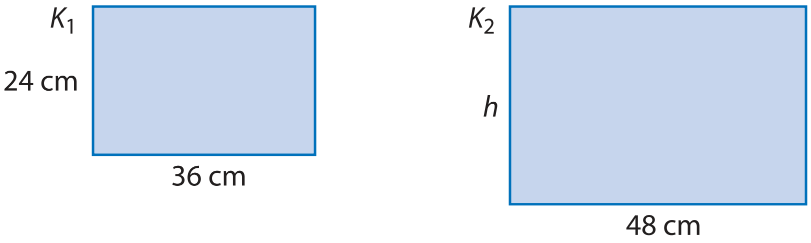
258. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,2 cm ja 5,7 cm. Laske hypotenuusan pituus ja suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta. [K2010, 7]

259. Suoran ympyräkartion korkeus on sama kuin sen pohjan halkaisija, kumpikin suuruudeltaan = 1. Kartion sisään asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa ja pohjaa. Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on ympyräkartion tilavuudesta? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella. [S2010, 10]

3.2 Yhdenmuotoisuussuhde

Pohdinta

Kaksi suorakulmiota K_1 ja K_2 ovat yhdenmuotoiset.



a) Laske vastinjanojen suhde.

b) Laske suuremman suorakulmion korkeus h.

c) Laske suorakulmioiden pinta-alat A_1 ja A_2.

d) Muodosta pinta-alojen suhde $\frac{A_1}{A_2}$.

e) Laske vastinosien suhteen neliö. Mitä huomaat?

f) Kuvio K_3 on yhdenmuotoinen kuvion K_1 kanssa. Kuvioiden pinta-alojen suhde on $\frac{A_1}{A_3} = \frac{9}{16}$. Mikä on vastinjanojen suhde?

g) Onko kuvio K_3 suurennos vai pienennös kuviosta K_1?

Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on vakio. Tätä vakiota kutsutaan **yhdenmuotoisuussuhteeksi** eli **mittakaavaksi**. Mittakaavaa merkitään usein kirjaimella k. Sitä käytetään esimerkiksi erilaisissa pohjapiirustuksissa ja kartoissa.

Mittakaava k ilmoitetaan siten, että suhteen osoittajana on pituus esimerkiksi piirroksessa ja nimittäjänä pituus luonnossa.

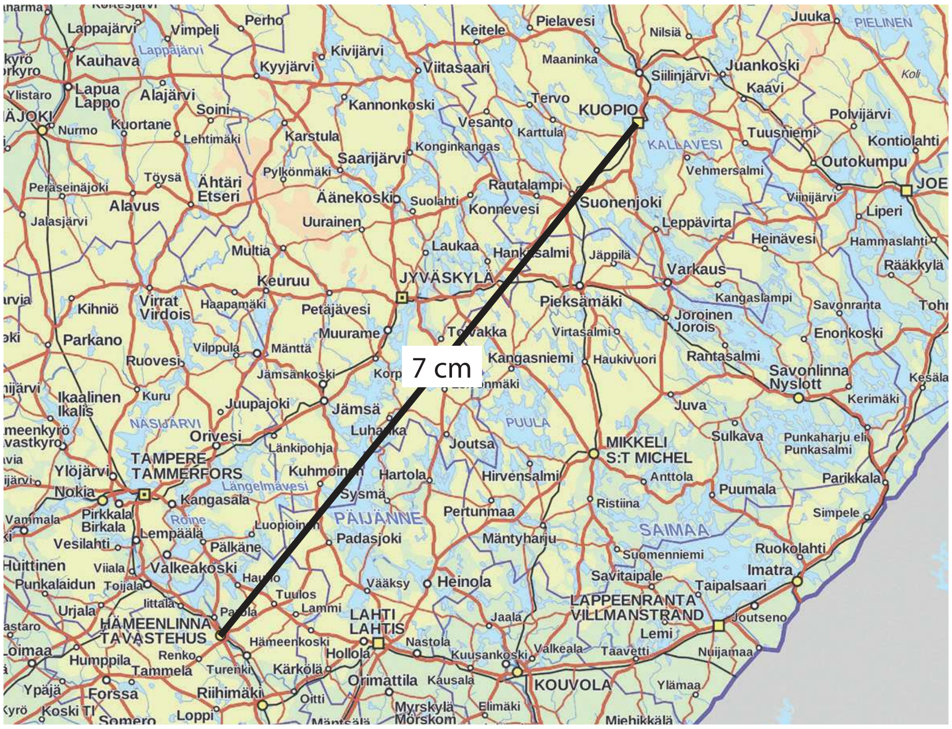
$$k = \frac{\text{pituus piirroksessa}}{\text{pituus luonnossa}}$$

Mittakaava ilmoitetaan tavallisesti jakopisteen avulla. Jos mittakaava on esimerkiksi $k = 1:60$, niin

- 1 m piirustuksessa vastaa 60 m luonnossa
- 1 cm piirustuksessa vastaa 60 cm luonnossa
- 3 cm piirustuksessa vastaa $3 \cdot 60 \text{ cm} = 180 \text{ cm}$ luonnossa.

Alla olevan kartan mittakaava on 1 : 3 900 000. Esimerkiksi Hämeenlinnan ja Kuopion välinen etäisyys linnuntietä on kartalta mitattuna 7 cm. Tällöin todellinen etäisyys luonnossa on

$$7 \cdot 3\,900\,000 \text{ cm} = 27\,300\,000 \text{ cm} = 273 \text{ km}$$


7 cm
KUOPIO
HÄMEENLINNA
TAVASTEHUS
JYVÄSKYLÄ
TAMPERE
TAMMERFORS
LAHTI
LAHTIS
MIKKELI
S:T MICHEL
KOUVOLA
LAPPEENRANTA
VILLMANSTRAND
PÄIJÄNNE
SAIMAA
KALLAVESI

Maanmittauslaitoksen Maastotietokanta 6/2016

ESIMERKKI 1

Asunnon ostaja tutkii pohjapiirustusta, jonka mittakaava on 1 : 60. Piirustuksessa suorakulmion muotoisen huoneen pituus on 7,5 cm ja leveys 5,0 cm.

a) Laske huoneen todelliset mitat.

b) Kuinka paljon huoneen parkettilattian hionta maksaa, kun työn neliöhinta on 20 €?

RATKAISU

a) Merkitään huoneen todellista pituutta kirjaimella x ja leveyttä kirjaimella y. Yhdenmuotoisuuden perusteella vastinosien suhde eli mittakaava on vakio.

$$\frac{7{,}5}{x} = \frac{1}{60}$$

Kerrotaan ristiin.

$$x = 60 \cdot 7{,}5 = 450 \text{ (cm)}$$

Huoneen pituus on $x = 450 \text{ cm} = 4{,}5 \text{ m}$.

$$\frac{5{,}0}{y} = \frac{1}{60}$$

$$y = 60 \cdot 5{,}0 = 300 \text{ (cm)}$$

Huoneen leveys on $y = 300 \text{ cm} = 3{,}0 \text{ m}$.

b) Huoneen lattian pinta-ala saadaan huoneen pituuden ja leveyden tulona.

$$A = xy = 4{,}5 \text{ m} \cdot 3{,}0 \text{ m} = 13{,}5 \text{ m}^2$$

Lattian hionta maksaa 20 €/m^2 eli

$$13{,}5 \text{ m}^2 \cdot 20 \frac{€}{\text{m}^2} = 270 \text{ €}$$

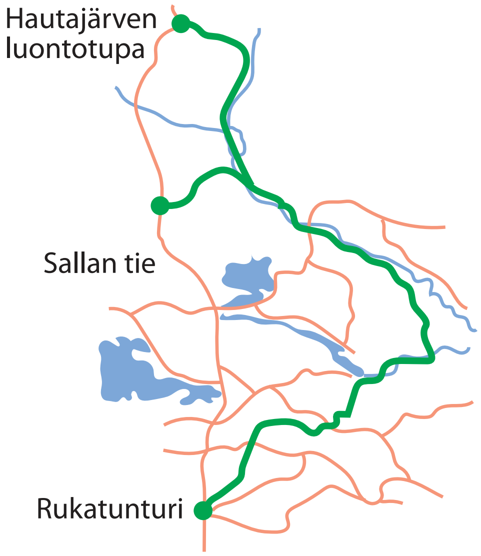
VASTAUS **a)** 4,5 m ja 3,0 m **b)** 270 €

ESIMERKKI 2

Oulangan kansallispuiston vaellusreitin, Karhunkierroksen, pituus on 80 km.

a) Kuinka pitkä reitti on kartalla, jonka mittakaava on 1 : 500 000?

b) Reitin pituus eräällä kartalla on 6,4 cm. Mikä on kartan mittakaava?



RATKAISU

a) Koska pituus kartalla yleensä ilmoitetaan senttimetreinä, muutetaan 80 km senttimetreiksi.

$$80\text{ km} = 80\,000\text{ m} = 8\,000\,000\text{ cm}$$

Merkitään reitin pituutta kartalla kirjaimella x.

Tapa 1

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin reitin pituuksien suhde.

$$\frac{1}{500\,000} = \frac{x}{8\,000\,000}$$

$$x = 16\text{ (cm)}$$

$$k = \frac{\text{pituus kartalla}}{\text{pituus luonnossa}}$$

Tapa 2

Kootaan tiedot taulukkoon ja käytetään hyväksi verrannollisuutta. Pituus kartalla on suoraan verrannollinen pituuteen luonnossa.

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
x	8 000 000
1	500 000

Suoraan verrannollisuudesta saadaan verrantoyhtälö

$$\frac{x}{1} = \frac{8\,000\,000}{500\,000}$$

$$x = 16\text{ (cm)}$$

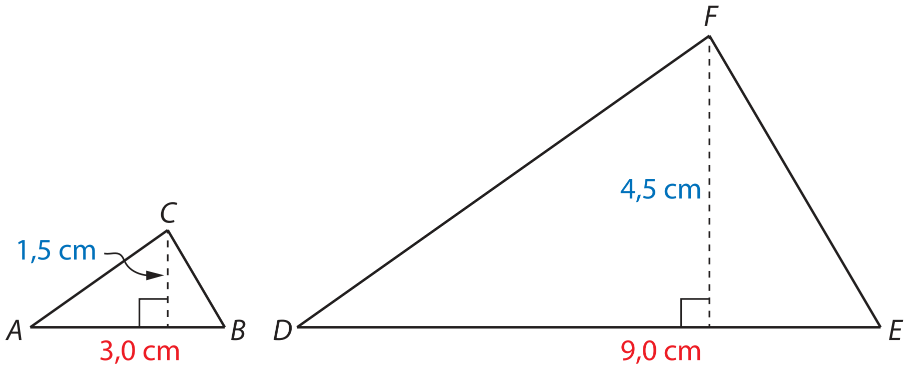
b) Koska pituus kartalla on 6,4 cm ja luonnossa 8 000 000 cm, niin mittakaava

$$k = \frac{6{,}4\text{ cm}}{8\,000\,000\text{ cm}}^{(6{,}4} = \frac{1}{1\,250\,000} = 1:1\,250\,000$$

Mittakaavassa suhteen jäsenet ovat mahdollisimman pieniä kokonaislukuja.

VASTAUS **a)** 16 cm **b)** 1 : 1 250 000

Tarkastellaan yhdenmuotoisia kolmioita *ABC* ja *DEF*.



Kolmioiden yhdenmuotoisuussuhde on 1 : 3.

$$\frac{3{,}0\text{ cm}}{9{,}0\text{ cm}}=\frac{1}{3}\qquad\qquad \frac{1{,}5\text{ cm}}{4{,}5\text{ cm}}=\frac{1}{3}$$

Lasketaan yhdenmuotoisten kolmioiden pinta-alojen suhde.

$$\frac{A_{ABC}}{A_{DEF}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot 3{,}0\text{ cm}\cdot 1{,}5\text{ cm}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot 9{,}0\text{ cm}\cdot 4{,}5\text{ cm}}=\frac{4{,}5}{40{,}5}^{(4{,}5}=\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=k^2$$

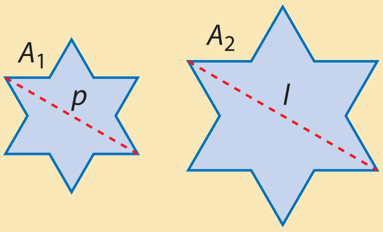
Kahden yhdenmuotoisen kolmion pinta-alojen suhde eli **pintasuhde** on mittakaavan neliö. Tulos voidaan yleistää kaikille yhdenmuotoisille tasokuvioille.

Lisämateriaali: Yhdenmuotoiset kappaleet s. 182

Pintasuhde

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_1}{A_2}=\left(\frac{p}{l}\right)^2=k^2$$



ESIMERKKI 3

a) Petterin kartan mittakaava on 1 : 25 000. Metsäpalstan koko tällä kartalla on 4,3 cm^2. Laske metsäpalstan todellinen pinta-ala hehtaareina.

b) Jaakolla on toinen kartta, jossa metsässä olevan, suorakulmion muotoisen, hakkuualueen mitat ovat 2,4 cm ja 1,3 cm. Laske Jaakon kartan mittakaava, kun hakkuualueen pinta-ala on 78 a.

RATKAISU

a) Merkitään palstan pinta-alaa luonnossa kirjaimella A. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{4{,}3\text{ cm}^2}{A}=\left(\frac{1}{25\,000}\right)^2$$

Lisämateriaali: Yksikkömuunnokset s. 160

$$A=2\,687\,500\,000\text{ cm}^2\approx 27\text{ ha}$$

b) Koska todellisesta hakkuualueesta tiedetään vain pinta-ala, mittakaava pitää ratkaista pinta-alojen avulla.

Lasketaan hakkuualueen pinta-ala kartalla.

$$A_{\text{kartta}}=2{,}4\text{ cm}\cdot 1{,}3\text{ cm}=3{,}12\text{ cm}^2$$

Suhdetta muodostettaessa kannattaa suureet yleensä ilmoittaa pienemmässä yksikössä.

Jotta pinta-alojen suhde eli mittakaava olisi yksikötön luku, pinta-alat on muutettava samaan yksikköön.

$$A_{\text{todellinen}}=78\text{ a}=7800\text{ m}^2=78\,000\,000\text{ cm}^2$$

Muodostetaan pinta-alojen suhde.

$$\frac{A_{\text{kartta}}}{A_{\text{todellinen}}}=\frac{3{,}12\text{ cm}^2}{78\,000\,000\text{ cm}^2}\overset{(3{,}12}{=}\frac{1}{25\,000\,000}$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä mittakaava k.

$$k^2=\frac{A_{\text{kartalla}}}{A_{\text{luonnossa}}}$$

$$k^2=\frac{1}{25\,000\,000}$$

$$k=\pm\frac{1}{5000}$$

Koska mittakaava on aina positiivinen suhdeluku, niin $k = 1:5000$.

VASTAUS **a)** 27 ha **b)** 1 : 5000

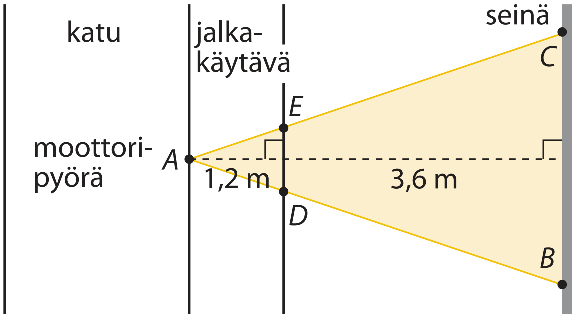
ESIMERKKI 4

Moottoripyörä on pysähtynyt kadun reunaan, jalkakäytävää vastaan kohtisuoraan. Moottoripyörän lampun valokeila osuu suoraan edessä olevan rakennuksen seinään. Rakennuksen seinä on yhdensuuntainen jalkakäytävän reunan kanssa. Jalkakäytävän leveys on 1,2 m ja rakennuksen seinän etäisyys jalkakäytävästä on 3,6 m. Kuinka suuren pinta-alan valokeila kattaa, kun se valaisee jalkakäytävältä 0,375 m^2?

RATKAISU

Piirretään mallikuva.

Suoraan edessä olevaan seinään osuva valokeila on ylhäältä katsottuna tasakylkisen kolmion muotoinen.



Kolmiot ABC ja ADE ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmiossa on kulma A
- kolmion sivut DE ja BC ovat yhdensuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat B ja D ovat yhtä suuret.

Kummastakin kolmiosta tunnetaan niiden korkeus, joten muodostetaan näiden avulla mittakaava.

$$k = \frac{1{,}2\ \text{m}}{1{,}2\ \text{m} + 3{,}6\ \text{m}} = \frac{1{,}2}{4{,}8} = \frac{1}{4}$$

Kysytty pinta-ala on kolmion ABC ala A_1. Kolmion ADE pinta-ala on $A_2 = 0{,}375\ \text{m}^2$.

Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan kysytty pinta-ala A_1.

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö k^2. →

$$\frac{0{,}375}{A_1} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$A_1 = 6{,}0\ (\text{m}^2)$$

VASTAUS $6{,}0\ \text{m}^2$

Tehtävät

260. Luontopolun alussa on iso kyltti, johon on piirretty alueen kartta. Yksi senttimetri kartalla vastaa 100 m luonnossa. Kuinka monta metriä luonnossa on

a) 3,5 cm **b)** 10,2 mm **c)** 0,57 m kartalla?

E1 **261.** Meren rannalla olevan huvilan olohuoneen mitat ovat pohjapiirustuksessa 5,0 cm ja 7,5 cm. Piirroksen mittakaava on 1 : 80.

a) Laske olohuoneen todelliset mitat.

b) Olohuoneen lattia päällystetään marmorilaatoilla. Laatat maksavat 60 €/m^2. Laske laatoituksen hinta.

262. Ympyrän muotoisesta korusta tehdyn suurennoksen mittakaava on 5 : 2.

a) Suurennoksessa korun halkaisija oli 10 cm. Laske korun todellisen halkaisijan pituus.

b) Alkuperäisessä korussa on timantti, jonka halkaisija on 3,0 mm. Kuinka suuri on timantin halkaisija suurennoksessa?

263. Määritä mittakaava, kun

a) 1 cm kartalla vastaa 250 m maastossa

b) 3 cm kartalla vastaa 6 km maastossa

c) 2,5 cm kartalla vastaa 750 m maastossa.

264. Kaksi muovista juomapulloa ovat yhdenmuotoiset. Kuinka moninkertainen muovimäärä on isommassa pullossa pienemmän pullon muovimäärään verrattuna, kun

a) isomman pullon korkeus on kaksinkertainen pienempään pulloon verrattuna

b) isomman pullon korkeus on 24 cm ja pienemmän 8 cm?

265. Kuvion K_1 korkeuden suhde kuvion K_2 korkeuteen on 2 : 3.

a) Onko kuvio K_2 suurennos vai pienennös kuviosta K_1?

b) Määritä kuvion K_2 pinta-ala, kun kuvion K_1 pinta-ala on 8,0 cm^2.

266. Finnairin A350-koneen pituus on 66,9 m ja siipien kärkiväli 64,8 m. Koneesta on valmistettu pienoismalli, jonka mittakaava on 1 : 250. Laske pienoismallin pituus ja siipien kärkiväli.

E2 **267.** Rooman rautatieaseman Terminin ja Colosseumin välimatka on 1,4 km.
a) Laske matka kartalla, jonka mittakaava on 1 : 20 000.
b) Sama matka toisella kartalla on 5,6 cm. Laske kartan mittakaava.

268. Lontoon ja Berliinin välimatka on 930 km.
a) Laske kartan mittakaava, kun Lontoon ja Berliinin välimatka kartalla on 31 cm.
b) Kuinka pitkä matka on Lontoosta Madridiin, kun etäisyys samalla kartalla on 42 cm. Anna vastaus kymmenen kilometrin tarkkuudella.

269. Hämeenlinnan ja Helsingin välinen matka pitkin valtatietä 3 on kartalla 51 cm. Auto ajaa Hämeenlinnasta Helsinkiin keskinopeudella 95 km/h. Kuinka kauan matkaan kuluu aikaa, kun kartan mittakaava on 1 : 200 000? Anna vastaus minuutin tarkkuudella.

E3 **270.** Jenna ja Rebekka ovat lomamatkalla Italiassa. Jennalla on kartta, jonka mittakaava on 1 : 400 000. Italian suurimman järven, Gardajärven, pinta-ala tällä kartalla on 23,125 cm^2.
a) Laske Gardajärven todellinen pinta-ala neliökilometreinä.
b) Rebekan kartalla järven pinta-ala on 59,2 cm^2. Laske Rebekan kartan mittakaava.

271. Lammen pinta-ala on 0,80 ha ja rantaviivan pituus 312 m. Laske lammen

a) rantaviivan pituus **b)** pinta-ala

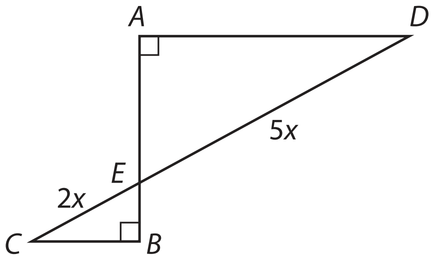
kartalla, jonka mittakaava on 1 : 15 000.

272. Kaksi senttimetriä kartalla vastaa 75 metriä luonnossa.

a) Laske kartan mittakaava.

b) Kartasta mitattiin tontin pinta-alaksi 3,7 cm^2. Laske tontin pinta-ala luonnossa. Anna vastaus aareina.

273. Perustele kuvassa olevien kolmioiden yhdenmuotoisuus. Laske isomman kolmion pinta-ala, kun pienemmän kolmion pinta-ala on 3,65 m^2.



E4

274. Kolmion muotoista puistoaluetta rajaa kaksi katua ja suora joen ranta. Puiston poikki kulkee suora polku, joka on yhdensuuntainen joen rannan kanssa. Polun pituus on 240 m ja puiston rajaaman jokirannan pituus 320 m. Laske puiston pinta-ala, kun polun ja teiden risteyksen välisen puistoalueen pinta-ala on 260 m^2.

275. Tasakylkisen kolmion muotoisen paperin pinta-ala on 39 cm^2. Paperi leikataan kahteen osaan kolmion kannan suuntaisesti. Toinen papereista on tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoinen. Tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 4,5 cm ja 6,5 cm. Laske puolisuunnikkaan pinta-ala.

276. A4-kokoisen kartan mittakaava on 1 : 20 000. Kartta pienennetään kopiokoneella A5-kokoiseksi, jolloin sen pinta-ala pienenee puoleen, mutta muoto säilyy. Mikä on pienennetyn kartan mittakaava? [K2011, 6]

Sekalaisia

277. Koulurakennuksesta valmistettiin pienoismalli. Pienoismallissa koulurakennuksen pituus on 120 cm ja korkeus 20 cm.

a) Laske koulurakennuksen todellinen korkeus, kun rakennuksen pituus on 60 m.

b) Koulurakennus on tasakattoinen. Pienoismallissa katon pinta-ala on 120 dm^2. Koulun huopakatto uusitaan. Kuinka paljon katon uusimiseen tarvittava huopa maksaa, kun huovan neliöhinta on 50 €/m^2?

278. Valokuvan koko on 10 cm × 15 cm. Määritä mittakaava, kun valokuvaa suurennetaan siten, että

a) uusi koko on 12 cm × 18 cm

b) uusi pinta-ala on 600 cm^2.

---

279. Lontoon parlamenttitalon kellotornista, jossa Big Ben sijaitsee, valmistetaan kaksi erikokoista pienoismallia. Toisen pienoismallin mittakaava on 1 : 500. Toinen saadaan, kun tätä pienennetään vielä suhteessa 2 : 3. Laske pienoismallien korkeudet, kun kellotornin todellinen korkeus on 96,3 m.

280. Laatokan pinta-ala on noin 18 200 km^2. Laske järven pinta-ala

a) kartalla, jonka mittakaava on 1 : 5 000 000

b) karttapallolla, jonka halkaisija on 30 cm, kun maapallon halkaisija on 12 800 km.

281. Suorakulmion muotoisen tontin mitat ovat 70 m × 50 m. Tontille rakennetaan kesämökki, jonka pohja on yhdenmuotoinen tontin kanssa. Rakennuslupa antaa mahdollisuuden rakentaa mökin, jonka pohjapinta-ala on korkeintaan 65 m^2. Tontille halutaan rakentaa pohjapinta-alaltaan suurin mahdollinen kesämökki. Laske mökin mitat.

4 Lisämateriaali

4.1 Yksikkömuunnokset

Geometriassa käsitellään mm. pituuksia, pinta-aloja ja tilavuuksia. Kaikkiin näihin suureisiin liittyy yksikkö. Jotta suureiden välisiä laskutoimituksia voidaan suorittaa, pitää osata muuttaa mittayksiköitä. Esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskut suureiden välillä voidaan laskea vain silloin, kun suureilla on sama yksikkö. Kahden yksikön välinen muunnos voidaan tehdä yksiköiden välisen suhdeluvun avulla.

Pituuden perusyksikkö on metri (m) ja **suhdeluku 10**. Yksikkö saadaan siis muutettua kertomalla tai jakamalla yksikön edessä oleva luku suhdeluvulla kymmenen.

	Pituus		
	kilometri	km	
	hehtometri	hm	
	dekametri	dam	
: 10	metri	m	· 10
	desimetri	dm	
	senttimetri	cm	
	millimetri	mm	

ESIMERKKI 1

Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) 4,5 m (mm) b) $5{,}6 \cdot 10^6$ dm (km)

RATKAISU

a) $4{,}5\text{ m} \overset{\cdot 10}{=} 45\text{ dm} \overset{\cdot 10}{=} 450\text{ cm} \overset{\cdot 10}{=} 4500\text{ mm}$

b) $5{,}6 \cdot 10^6\text{ dm} \overset{:10}{=} 5{,}6 \cdot 10^5\text{ m} \overset{:10}{=} 5{,}6 \cdot 10^4\text{ dam} \overset{:10}{=} 5{,}6 \cdot 10^3\text{ hm} \overset{:10}{=} 5{,}6 \cdot 10^2\text{ km}$
$= 560\text{ km}$

VASTAUS

a) 4500 mm b) 560 km

Pinta-alan perusyksikkö on neliömetri (m^2) ja **suhdeluku 100**.

Pinta-ala	
neliökilometri	km^2
hehtaari	ha
aari	a
neliömetri	m^2
neliödesimetri	dm^2
neliösenttimetri	cm^2
neliömillimetri	mm^2

: 100 ↑

· 100 ↓

ESIMERKKI 2

Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) $3{,}8\ \text{m}^2$ (mm^2) **b)** $0{,}53$ ha (dm^2)

c) $213\ \text{cm}^2$ (m^2) **d)** $1{,}8 \cdot 10^7\ \text{mm}^2$ (a)

RATKAISU

a) $3{,}8\ \text{m}^2 \overset{\cdot 100}{=} 380\ \text{dm}^2 \overset{\cdot 100}{=} 38\ 000\ \text{cm}^2 \overset{\cdot 100}{=} 3\ 800\ 000\ \text{mm}^2$

b) $0{,}53\ \text{ha} \overset{\cdot 100}{=} 53\ \text{a} \overset{\cdot 100}{=} 5300\ \text{m}^2 \overset{\cdot 100}{=} 530\ 000\ \text{dm}^2$

c) $213\ \text{cm}^2 \overset{:100}{=} 2{,}13\ \text{dm}^2 \overset{:100}{=} 0{,}0213\ \text{m}^2$

d) $1{,}8 \cdot 10^7\ \text{mm}^2 \overset{:100}{=} 1{,}8 \cdot 10^5\ \text{cm}^2 \overset{:100}{=} 1,8 \cdot 10^3\ \text{dm}^2 \overset{:100}{=} 1{,}8 \cdot 10^1\ \text{m}^2$

Kirjoitetaan luku ilman kymmenpotenssimuotoa ja muunnetaan neliömetrit aareiksi.

$$1{,}8 \cdot 10^1\ \text{m}^2 = 18\ \text{m}^2 = 0{,}18\ \text{a}$$

VASTAUS

a) $3\ 800\ 000\ \text{mm}^2$ **b)** $530\ 000\ \text{dm}^2$

c) $0{,}0213\ \text{m}^2$ **d)** $0{,}18$ a

Kappaleiden tilavuudet voidaan ilmoittaa joko kuutiomittojen tai vetomittojen avulla. **Kuutiomittojen** perusyksikkö on kuutiometri (m^3) ja **suhdeluku 1000**.

: 1000 ↑ ↓ **· 1000**

Tilavuus	
kuutiokilometri	km^3
kuutiohehtometri	hm^3
kuutiodekametri	dam^3
kuutiometri	m^3
kuutiodesimetri	dm^3
kuutiosenttimetri	cm^3
kuutiomillimetri	mm^3

Vetomittojen perusyksikkö on litra (l) ja **suhdeluku 10**.

: 10 ↑ ↓ **· 10**

Tilavuus	
litra	l
desilitra	dl
senttilitra	cl
millilitra	ml

Kuutiomittojen ja vetomittojen välillä on yhteys: $1\ dm^3 = 1\ l$.

Tilavuuksiin liittyvät laskut suoritetaan yleensä kuutiomittojen avulla ja vastaus muutetaan tarvittaessa vetomittojen avulla ilmoitettuun yksikköön.

ESIMERKKI 3

Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) $0{,}094\ m^3\ (cm^3)$ **b)** 5,7 l (ml)

c) 86 dl (cm^3) **d)** $4{,}7 \cdot 10^7\ mm^3$ (dl)

RATKAISU

a) $0{,}094\ m^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 94\ dm^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 94\ 000\ cm^3$

$0{,}094\ m^3 = 94\ dm^3 = 94\ 000\ cm^3$

b) $5{,}7\ l \xrightarrow{\cdot 10} 57\ dl \xrightarrow{\cdot 10} 570\ cl \xrightarrow{\cdot 10} 5700\ ml$

$5{,}7\ l = 57\ dl = 570\ cl = 5700\ ml$

Kuutiomitoissa suhdeluku on 1000.
Vetomitoissa suhdeluku on 10.

c) $86\ dl = 8{,}6\ l = 8{,}6\ dm^3 = 8600\ cm^3$

$1\ l = 1\ dm^3$

d) $4{,}7 \cdot 10^7\ mm^3 = 4{,}7 \cdot 10^4\ cm^3 = 4{,}7 \cdot 10^1\ dm^3 = 47\ l = 470\ dl$

VASTAUS

a) $94\ 000\ cm^3$ **b)** 5700 ml **c)** $8600\ cm^3$ **d)** 470 dl

Tehtävät

282. Täydennä taulukko.

mm	cm	dm	m	km
			570	
	3200			
$6{,}3 \cdot 10^4$				
				2,5

E1

283. Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) 4,8 m (mm)

b) $2{,}4 \cdot 10^6$ cm (km)

284. Täydennä taulukko.

mm^2	cm^2	dm^2	m^2	a
			570	
	3200			
$6{,}3 \cdot 10^4$				
				2,5

E2

285. Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) 0,52 m^2 (mm^2)

b) 3,7 a (cm^2)

c) 3051 cm^2 (m^2)

d) $9{,}01 \cdot 10^7$ cm^2 (ha)

286. Täydennä taulukko.

mm^3	cm^3	dm^3	m^3	dl
			4,2	
	85 000			
$3{,}7 \cdot 10^9$				
				64

287. Täydennä taulukko.

ml	cl	dl	l	cm^3
			6,8	
	560			
$1{,}3 \cdot 10^4$				
				720

E3

288. Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) $0{,}81\ m^3\ (cm^3)$ **b)** 1,05 l (cl)

c) $905{,}3\ dl\ (cm^3)$ **d)** $2{,}8 \cdot 10^3\ cm^3$ (ml)

289. Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) 5402 cm (km) **b)** $0{,}87\ a\ (cm^2)$

c) 741 ml (l) **d)** $0{,}093\ dm^3\ (mm^3)$

290. Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) $5{,}6 \cdot 10^8\ cm^2\ (m^2)$ **b)** $7{,}01 \cdot 10^9\ cm^3\ (m^3)$

c) $3{,}5 \cdot 10^9\ mm^2$ (ha) **d)** $6{,}15 \cdot 10^6\ mm^3$ (ml)

---

291. Ajan yksiköiden muunnoksissa suhdeluku vaihtelee. Tuntien, minuuttien ja sekuntien välisissä muunnoksissa suhdeluku on 60, kun taas esimerkiksi vuorokausien ja tuntien muunnoksissa suhdeluku on 24. Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) 5 min 35 s (s) **b)** 3 min 45 s (min)

c) 1,8 min (s) **d)** 204 s (min)

292. Muunna suluissa mainittuun yksikköön.

a) 582 s (min) **b)** 7 min 6 s (min)

c) 16 min 17 s (s) **d)** 6,05 min (s)

293. Muunna minuuteiksi ja sekunneiksi.

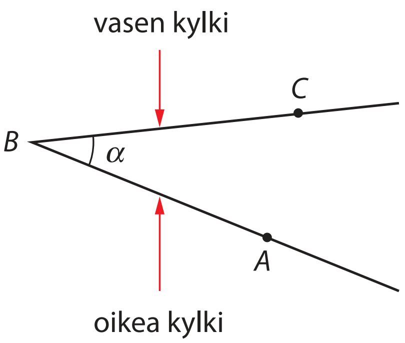
a) 315 s **b)** 294 s

c) 738 s **d)** 447 s

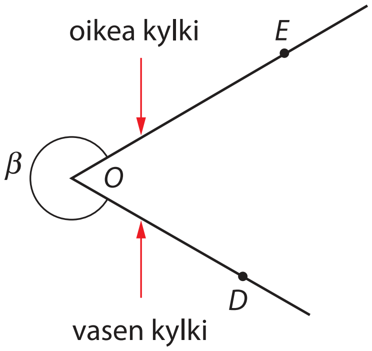
4.2 Erilaisia kulmia

Kulma on kahden puolisuoran rajaama tasoalue. Kulma nimetään yleensä

- kreikkalaisilla kirjaimilla, esimerkiksi α (alfa), β (beeta), γ (gamma)
- kyljillä olevien pisteiden ja kärkipisteen avulla, esimerkiksi kulma ABC.



kulma *ABC*

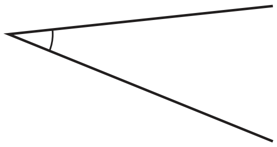
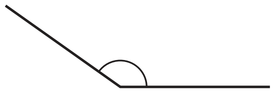
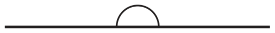


kulma *EOD*

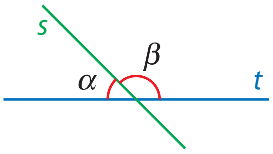
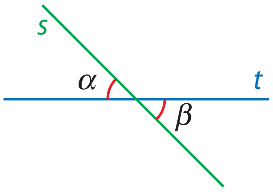
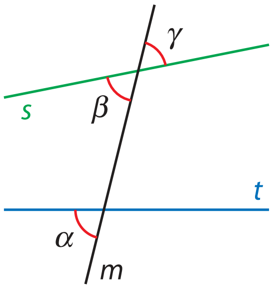
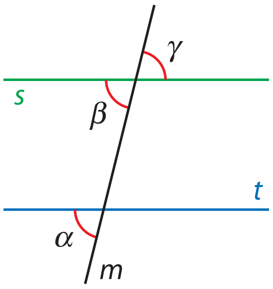
Kulman nimeäminen pisteiden avulla:

1. oikean kyljen piste
2. kulman kärkipiste
3. vasemman kyljen piste

Kulmien suuruudet ilmoitetaan usein asteina. Seuraavassa taulukossa on kulmiin liittyviä nimityksiä.

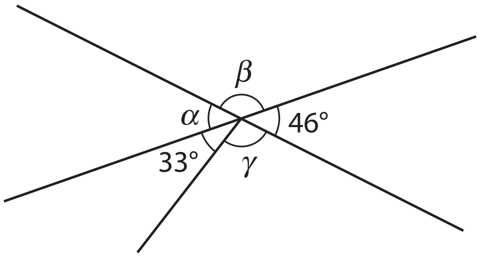
Terävä kulma • Kulman suuruus on alle 90°.	
Suora kulma • Kulman suuruus on 90°. • Kulmaa merkitään omalla merkinnällä.	
Tylppä kulma • Kulman suuruus on yli 90°, mutta alle 180°.	
Oikokulma • Kulman suuruus on 180°.	

Kahden suoran leikkauspisteeseen syntyy neljän kulman ryhmä. Näihin kulmiin liittyy ominaisuuksia, jotka on koottu seuraavaan taulukkoon.

Vieruskulmat • Kulmat sijaitsevat suorien *s* ja *t* leikkauspisteessä vierekkäin. • Kulmat muodostavat yhdessä oikokulman.	 $\alpha + \beta = 180°$
Ristikulmat • Kulmat sijaitsevat suorien *s* ja *t* leikkauspisteessä vastakkain. • Kulmat ovat yhtä suuret.	 $\alpha = \beta$
Samankohtaiset kulmat • Kun yksi suora *m* leikkaa kahta muuta suoraa *s* ja *t*, leikkauspisteisiin muodostuu kaksi neljän kulman ryhmää. • Samankohtaisiksi kulmiksi kutsutaan niitä eri kulmaryhmiin kuuluvia kulmia, joilla leikkaava suora *m* on samannimisenä kylkenä. • Jos suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.	 Suora *m* on kulman α vasen kylki. Kulman α kanssa samankohtaisia kulmia ovat β ja γ.  Suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaiset ($s \parallel t$), joten $\alpha = \beta = \gamma$

ESIMERKKI 1

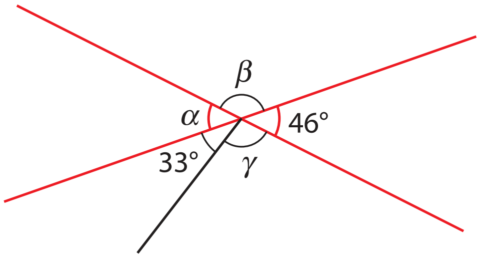
Laske kulmien α, β ja γ suuruudet.


β
α
46°
33°
γ

RATKAISU

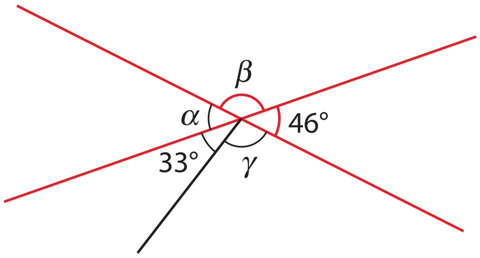
Kulma α on 46 asteen kulman ristikulma. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

$$\alpha = 46°$$


β
α
46°
33°
γ

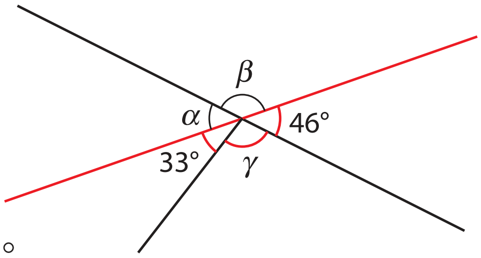
Kulma β on 46 asteen kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$46° + \beta = 180°$$
$$\beta = 180° - 46° = 134°$$


β
α
46°
33°
γ

Kulma γ muodostaa 33 asteen ja 46 asteen kulman kanssa oikokulman.

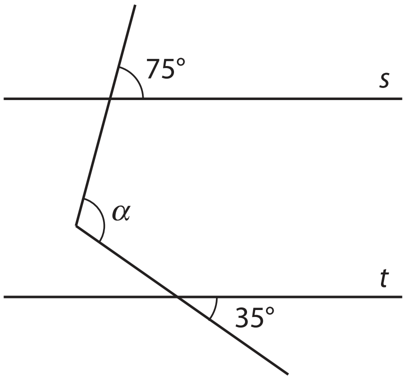
$$33° + \gamma + 46° = 180°$$
$$\gamma = 180° - 46° - 33°$$
$$\gamma = 101°$$


β
α
46°
33°
γ

VASTAUS $\alpha = 46°$, $\beta = 134°$ ja $\gamma = 101°$

ESIMERKKI 2

Laske kulman α suuruus, kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.

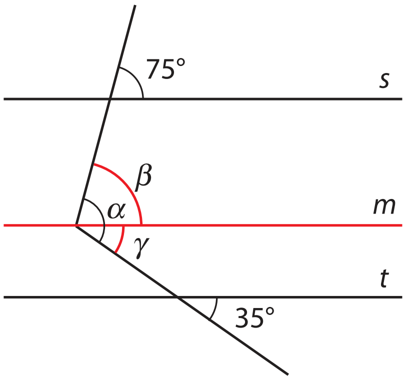


RATKAISU

Tapa 1

Piirretään suora m, joka kulkee kulman α kärjen kautta ja joka on lisäksi yhdensuuntainen suorien s ja t kanssa.

Merkitään kuvioon muodostuvia kulmia kirjaimilla β ja γ.



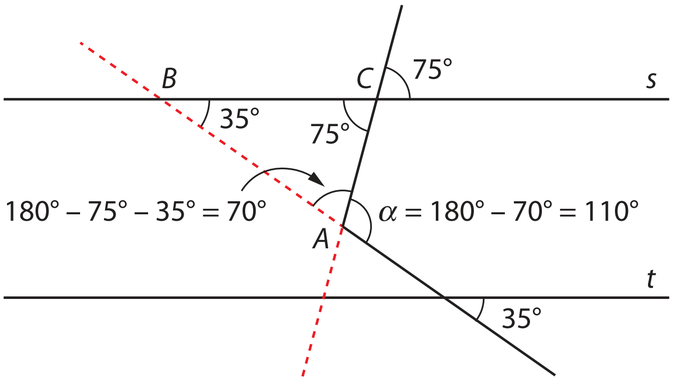
- Kulma β on samankohtainen kulma 75 asteen kulman kanssa. Koska suorat s ja m ovat yhdensuuntaiset, $\beta = 75°$.
- Kulma γ on samankohtainen kulma 35 asteen kulman kanssa. Koska suorat t ja m ovat yhdensuuntaiset, $\gamma = 35°$.

Lasketaan kulman α suuruus.

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta + \gamma \\ &= 75° + 35° \\ &= 110°\end{aligned}$$

Tapa 2

Jatketaan kulman α kylkiä ja määritetään kolmion ABC kulmat, jonka jälkeen voidaan laskea kulma α.

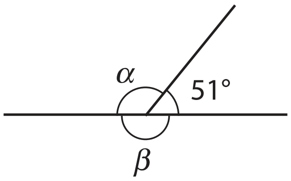


VASTAUS $\alpha = 110°$

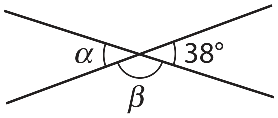
Tehtävät

294. Laske kulmien α ja β suuruus.

a)



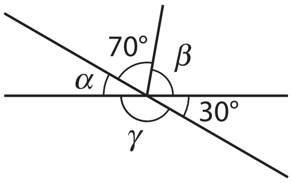
b)



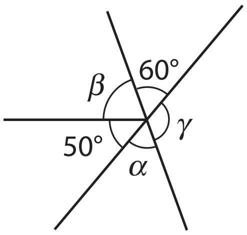
E1

295. Laske kulmien α, β ja γ suuruus.

a)

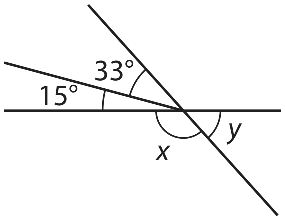


b)

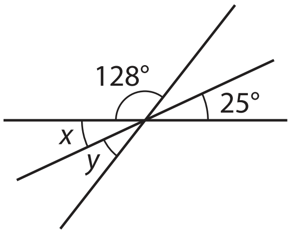


296. Laske kulmien x ja y suuruus.

a)

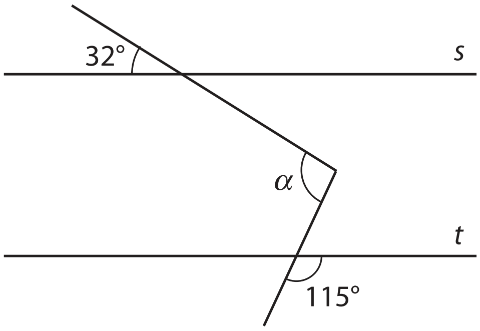


b)



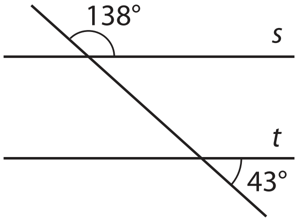
E2

297. Laske kulman α suuruus, kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.

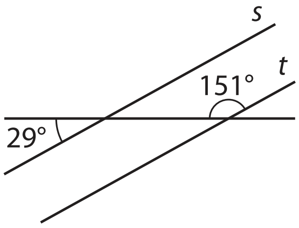


298. Tutki, ovatko suorat s ja t yhdensuuntaiset.

a)

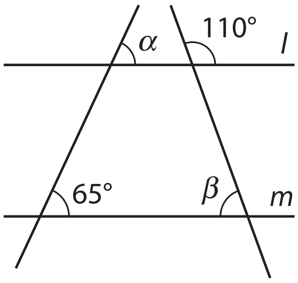


b)

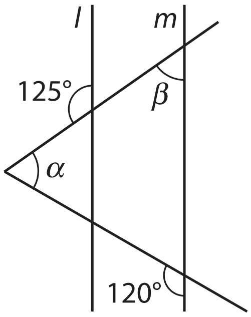


299. Laske kulmien α ja β suuruus, kun suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset.

a)



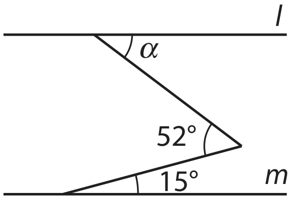
b)



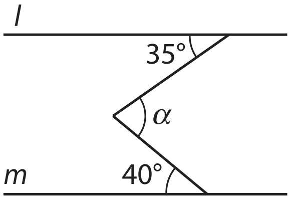
l
m
125°
β
α
120°

300. Laske kulman α suuruus, kun suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset

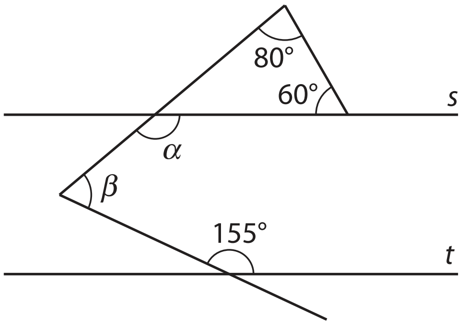
a)



b)



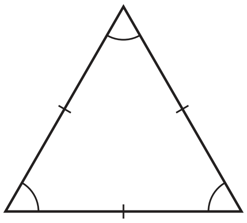
301. Laske kulmien α ja β suuruus, kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.



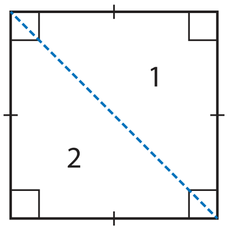
80°
60°
s
α
β
155°
t

4.3 Säännölliset monikulmiot

Monikulmiot nimetään kulmien lukumäärän mukaan. Kappaleessa 1.1 käsiteltiin kolmioita ja nelikulmioita. Jos monikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria, monikulmio on **säännöllinen**. Esimerkiksi tasasivuinen kolmio ja neliö ovat säännöllisiä monikulmioita.

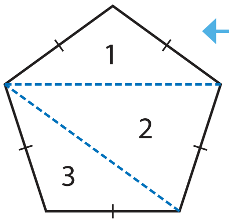


Tasasivuinen kolmio
- sivut yhtä pitkät
- kulmat yhtä suuret, 60°
- kulmien summa 180°



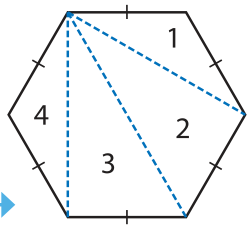
Neliö
- sivut yhtä pitkät
- kulmat yhtä suuret, 90°
- voidaan jakaa **kahdeksi** kolmioksi, joten kulmien summa $2 \cdot 180° = 360°$

Kaikki monikulmiot voidaan jakaa lävistäjien avulla kolmioiksi. Monikulmion kulmien summa riippuu siitä, kuinka moneen kolmioon monikulmio voidaan jakaa.



Säännöllinen viisikulmio voidaan jakaa **kolmeksi** kolmioksi.

Säännöllinen kuusikulmio voidaan jakaa **neljäksi** kolmioksi.



Monikulmion sisälle piirretään lävistäjät samasta kärjestä, jolloin monikulmio jakaantuu kolmioiksi siten, että kolmioita muodostuu aina kaksi vähemmän kuin monikulmiossa on kärkiä (tai kulmia).

Monikulmion kulmien summa

Jos monikulmiossa on n kärkeä tai kulmaa, kulmien summa on

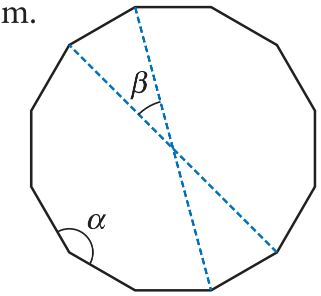
$$(n-2) \cdot 180°$$

ESIMERKKI 1

Säännöllisen 12-kulmion sivun pituus on 4,0 cm. Laske

a) kulmien α ja β suuruudet

b) 12-kulmion pinta-ala.



RATKAISU

a) 12-kulmion kulmien summa on

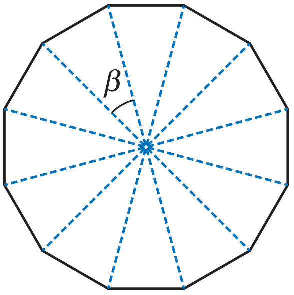
n-kulmion kulmien summa $(n-2)\cdot 180°$

$$(12-2)\cdot 180° = 1800°.$$

Säännöllisen monikulmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret. Kulmia on 12, joten yhden kulman suuruus on

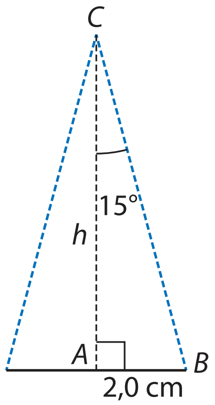
$$\alpha = \frac{1800°}{12} = 150°.$$

Monikulmion lävistäjät jakavat monikulmion kahdeksitoista samanlaiseksi, tasakylkiseksi kolmioksi, joiden huippukulma on



$$\beta = \frac{360°}{12} = 30°.$$

b) Lasketaan yhden tasakylkisen kolmion pinta-ala. Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman β.



$\frac{4{,}0\text{ cm}}{2} = 2{,}0\text{ cm}$

$\frac{30°}{2} = 15°$

Suorakulmaisen kolmion *ABC* kannan pituus on 2,0 cm ja huippukulma 15°. Korkeus *h* ratkaistaan tangentin avulla.

$$\tan 15° = \frac{2{,}0}{h}$$

$$h = 7{,}464\ldots\text{ (cm)}$$

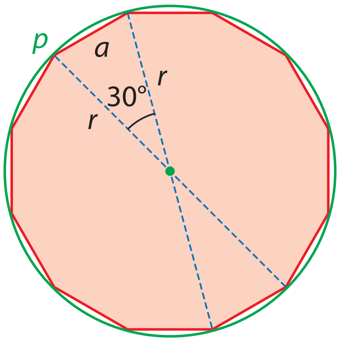
Monikulmion pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= 12\cdot A_{\text{kolmio}} \\ &= 12\cdot\frac{1}{2}\cdot 4{,}0\text{ cm}\cdot 7{,}464\ldots\text{ cm} \\ &= 179{,}138\ldots\text{ cm}^2 \\ &\approx 180\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

VASTAUS **a)** $\alpha = 150°$, $\beta = 30°$ **b)** 180 cm^2

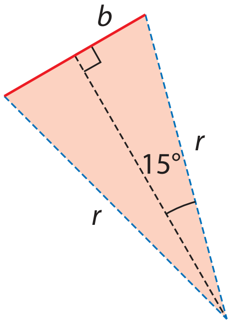
ESIMERKKI 2

Säännöllisen 12-kulmion ympärille piirretään ympyrä siten, että kärjet ovat ympyrän kehällä. Määritä monikulmion piirin pituus ympyrän säteen r avulla lausuttuna. Jos ympyrän kehän pituus korvataan monikulmion piirin pituudella, niin kuinka monen numeron tarkkuudella luvun π arvo saadaan tällä tavalla laskettua? [mukailtu S2000, 12]



RATKAISU

Merkitään monikulmion sivun pituutta kirjaimella a.
Monikulmion piiri $p = 12a$.
Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman. Merkitään kannan puolikasta kirjaimella b.



$$\sin 15° = \frac{b}{r}$$

$$b = r\sin 15°$$

Tällöin $a = 2b = 2r\sin 15°$.

Monikulmion piiri:

$$p = 12 \cdot a = 12 \cdot 2r\sin 15° = 6{,}21165...r$$

Ympyrän kehän pituus on toisaalta $2\pi r$, joten

$2\pi r = p$

$$2\pi r = 6{,}21165...r \quad \big| : 2r$$

$$\pi = 3{,}105828...$$

Koska $\pi = 3{,}14159\ldots$, likiarvossa on kaksi oikeaa numeroa.

VASTAUS Piiri on $6{,}21165\ldots r$. Luvun π likiarvossa on kaksi oikeaa numeroa.

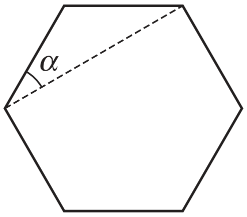
Tehtävät

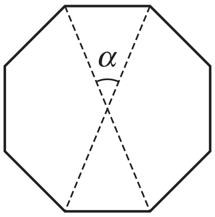
302. Laske

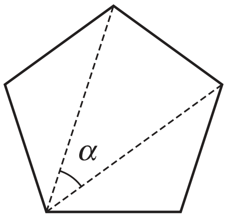
a) 6-kulmion **b)** 8-kulmion kulmien summa.

303. Laske kulman α suuruus, kun kuvio on säännöllinen

a) 6-kulmio **b)** 8-kulmio **c)** 5-kulmio.





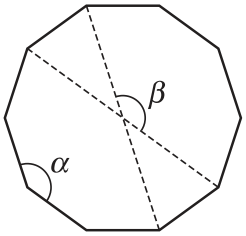


E1

304. Säännöllisen 10-kulmion sivun pituus on 5,0 cm. Laske

a) kulmien α ja β suuruudet

b) 10-kulmion pinta-ala.



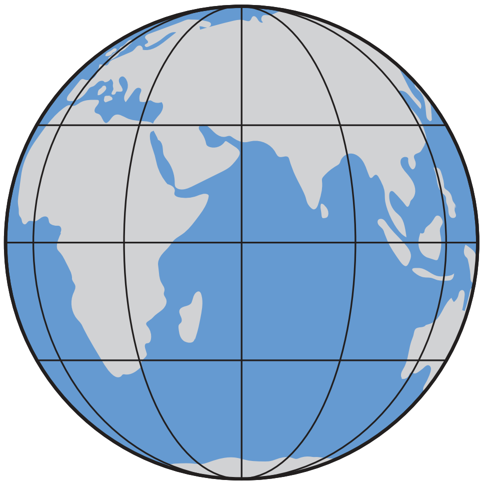
E2

305. Säännöllisen 16-kulmion ympärille piirretään ympyrä siten, että kärjet ovat ympyrän kehällä. Määritä monikulmion piirin pituus ympyrän säteen r avulla lausuttuna. Jos ympyrän kehän pituus korvataan monikulmion piirin pituudella, niin kuinka monen numeron tarkkuudella luvun π arvo saadaan tällä tavalla laskettua?

306. Maria valmistaa neliön muotoisesta kangaspalasta säännöllisen 8-kulmion muotoisen pöytäliinan leikkaamalla jokaisesta kärjestä pois tasakylkisen suorakulmaisen kolmion muotoiset palat. Pöytäliinan reunat kantataan kanttinauhalla. Kuinka paljon vähintään nauhaa tarvitaan, kun kangaspalan sivun pituus on 1,2 m?

307. Pentagon on Yhdysvaltain puolustusministeriön hallintorakennus. Sen ulkoreunat muodostavat säännöllisen 5-kulmion, jonka sivun pituus on 300 m. Laske Pentagonin pinta-ala hehtaareina.

4.4 Maapallo



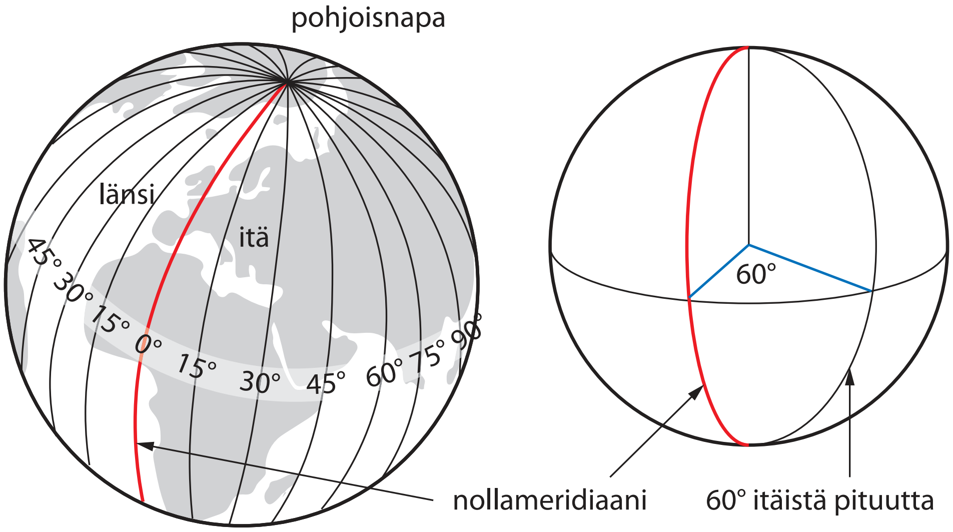
Maa on likimain pallon muotoinen planeetta. Maan säde päiväntasaajan kohdalta mitattuna on noin 6378 km ja napojen kohdalta mitattuna 6357 km. Maata tarkastellaan usein kuitenkin pallona, jonka säde on vakio.

Erilaisten paikkojen sijaintia maapallolla kuvataan kartan avulla. Maapallon pinnasta on kuitenkin mahdotonta saada täysin todenmukaista karttaa tasaiselle pinnalle. Ainoa oikea kartta muodostuu karttapallolle.

Maapallolla sijainnit ilmoitetaan pituus- ja leveyspiirien avulla. Pituus ja leveyspiirejä nimetään ilmansuuntien ja kulmien avulla. Kulman suuruus määräytyy tiettyjen maapallon säteiden väliin muodostuvista keskuskulmista.

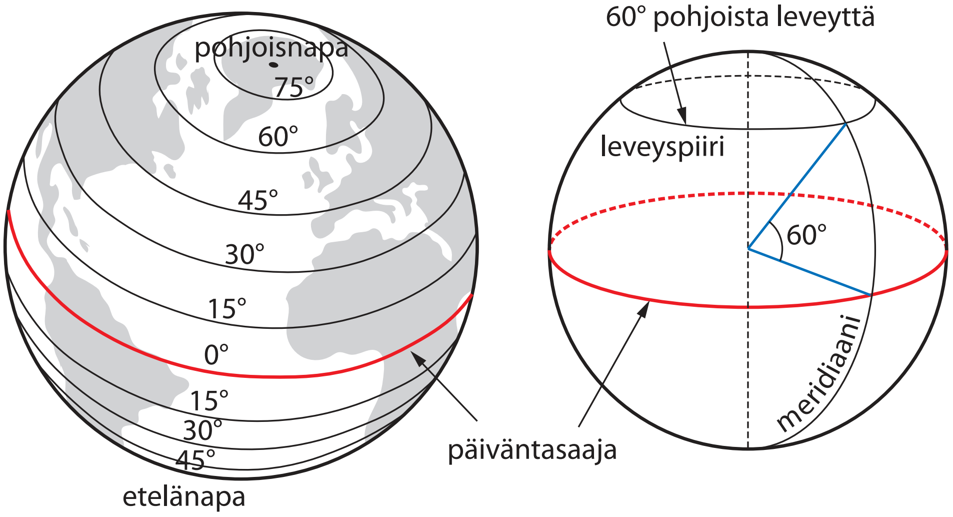
Pituuspiirit

- Pituuspiirit ovat pohjoisnavalta etelänavalle kulkevia puoliympyröitä, jotka ovat kaikki samankokoisia.
- Pituuspiirejä kutsutaan meridiaaneiksi.
- Nollameridiaani kulkee Lontoossa sijaitsevan Greenwichin observatorion kautta.
- Pituuspiirit jakautuvat itäisiin ja läntisiin pituuspiireihin sen mukaan, miten ne sijaitsevat nollameridiaaniin nähden.
- Pituuspiiriin liittyvä kulma annetaan astelukuna, joka on välillä 0°–180°.

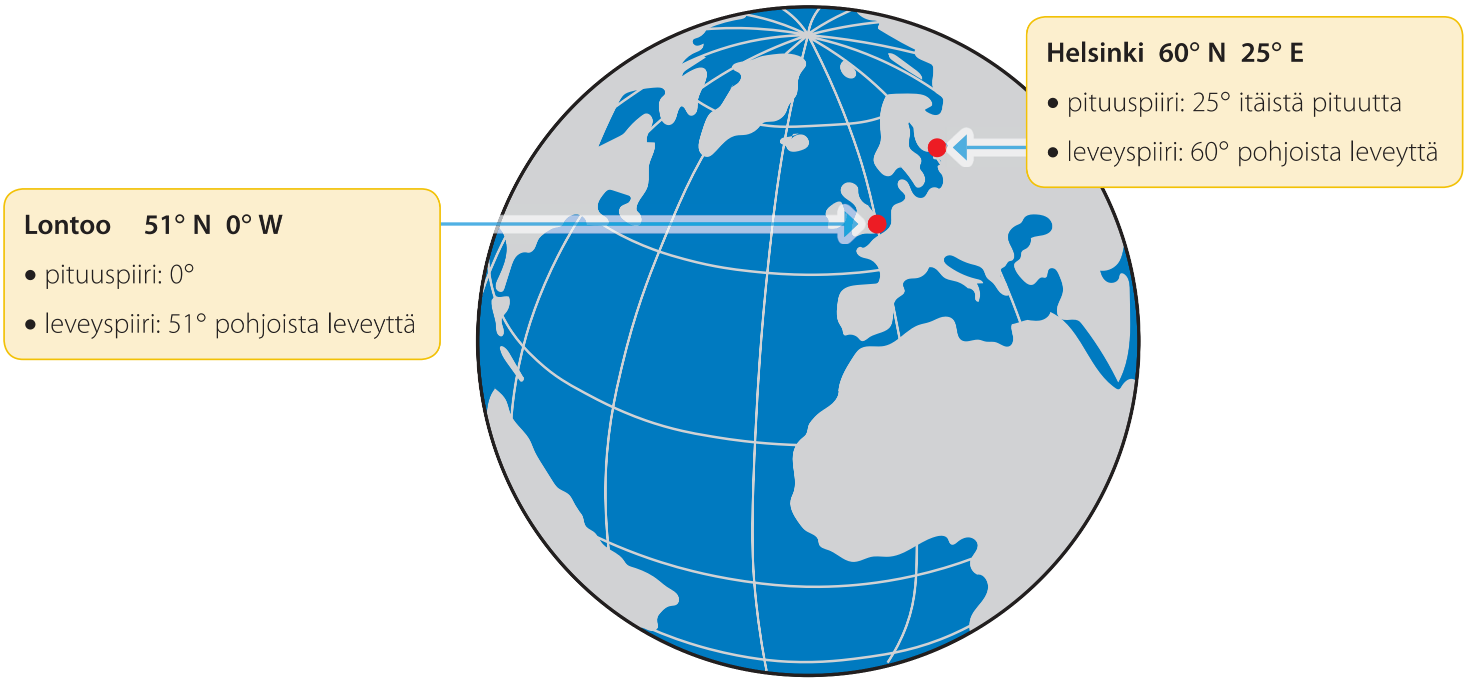


Leveyspiirit

- Leveyspiirit ovat ympyröitä, jotka kiertävät maapallon itä-länsisuunnassa.
- Leveyspiirit ovat erikokoisia toisiaan leikkaamattomia ympyröitä.
- Pisin leveyspiiri on päiväntasaaja eli ekvaattori.
- Leveyspiirit jakautuvat pohjoisiin ja eteläisiin leveyspiireihin sen mukaan, miten ne sijaitsevat päiväntasaajaan nähden.
- Leveyspiireihin liittyvä kulma annetaan astelukuna, joka on välillä 0°–90°.


pohjoisnapa
75°
60°
45°
30°
15°
0°
15°
30°
45°
etelänapa
päiväntasaaja
60° pohjoista leveyttä
leveyspiiri
60°
meridiaani

Pituus- ja leveyspiirit muodostavat siis maapallon pinnalle koordinaatiston, jonka avulla voidaan tarkastella eri paikkojen sijaintia sekä laskea esimerkiksi paikkojen välisiä etäisyyksiä.

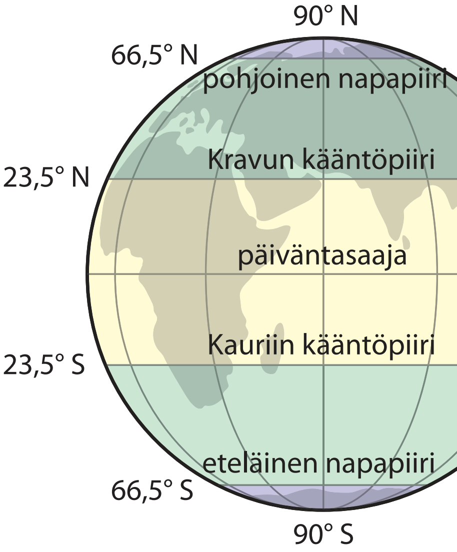


Helsinki 60° N 25° E
- pituuspiiri: 25° itäistä pituutta
- leveyspiiri: 60° pohjoista leveyttä

Lontoo 51° N 0° W
- pituuspiiri: 0°
- leveyspiiri: 51° pohjoista leveyttä

ESIMERKKI 1

Kravun kääntöpiiri on leveyspiiri, jonka sijainti on noin 23,5° pohjoista leveyttä. Kauriin kääntöpiiri on leveyspiiri, jonka sijainti on noin 23,5° eteläistä leveyttä. Kääntöpiirien välistä aluetta kutsutaan tropiikiksi.

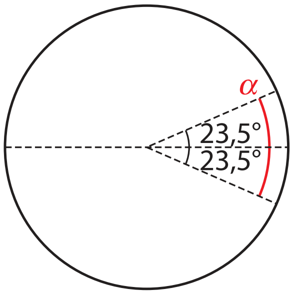

90° N
66,5° N
pohjoinen napapiiri
Kravun kääntöpiiri
23,5° N
päiväntasaaja
Kauriin kääntöpiiri
23,5° S
eteläinen napapiiri
66,5° S
90° S

a) Laske kääntöpiirien välinen etäisyys Maan pintaa pitkin mitattuna kymmenen kilometrin tarkkuudella, kun Maan ympärysmitta on 40 000 km.

b) Mille leveyspiirille päädytään, kun Kravun kääntöpiiriltä kuljetaan 4200 km suoraan pohjoiseen? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

RATKAISU

a) Etäisyys Maan pintaa pitkin saadaan laskemalla kaaren pituus, joka rajoittuu kääntöpiirien väliin.



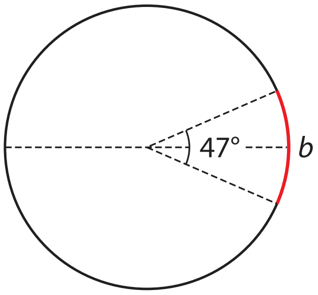
Piirretään tilanteesta mallikuva ja lasketaan kaarta vastaavan keskuskulman suuruus.

$\alpha = 23{,}5° + 23{,}5° = 47°$

Kaaren pituus

$b = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot p$

Lasketaan keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus.

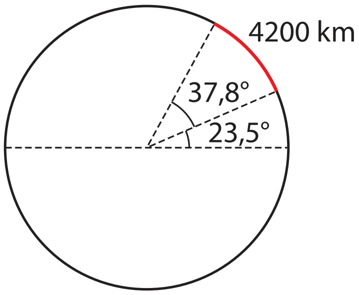


$$\begin{aligned} b &= \frac{47°}{360°} \cdot 40\,000 \text{ km} \\ &= 5222{,}2\ldots \text{ km} \\ &\approx 5220 \text{ km} \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin sen keskuskulman suuruus, joka vastaa Maan pinnalla 4200 kilometrin mittaista kaarta.

$$4200 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 40\,000$$

$$\alpha = 37{,}8°$$


4200 km
37,8°
23,5°

Koska matka kuljetaan suoraa pohjoiseen, kysytyn leveyspiirin asteluku saadaan, kun Kravun kääntöpiirin astelukuun lisätään laskettu asteluku.

$23{,}5° + 37{,}8° = 61{,}3° \approx 61°$

VASTAUS **a)** 5220 km **b)** 61° pohjoista leveyttä

ESIMERKKI 2

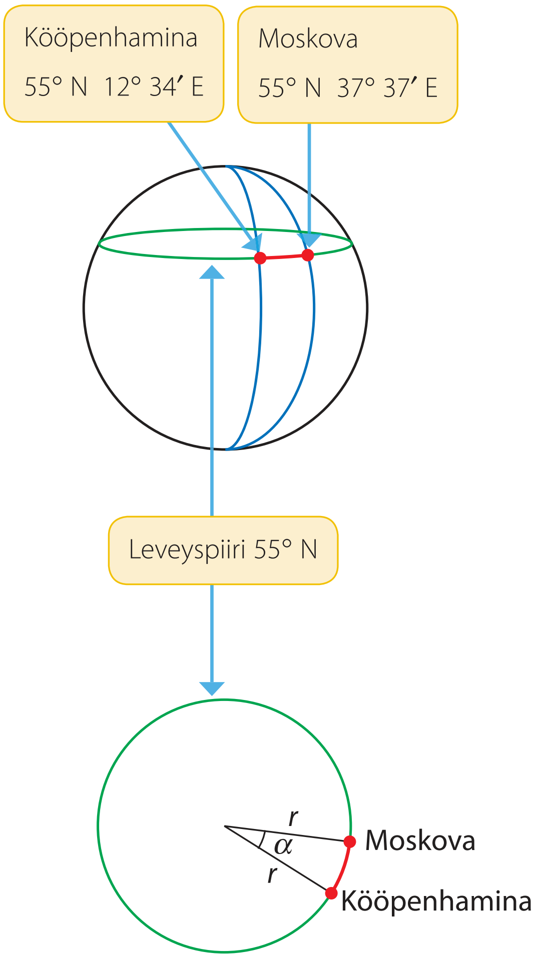
Moskova ja Kööpenhamina sijaitsevat likimain samalla leveyspiirillä 55° pohjoista leveyttä.

a) Laske Moskovan ja Kööpenhaminan välinen etäisyys leveyspiiriä pitkin mitattuna, kun Moskovan pituuspiiri on 37° 37′ E ja Kööpenhaminan pituuspiiri on 12° 34′ E. Maan säde on 6370 km.

b) Kööpenhaminasta kuljetaan 6800 km leveyspiiriä pitkin suoraan länteen. Mille pituuspiirille päädytään? Anna vastaus asteina ja kulmaminuutteina kulmaminuutin tarkkuudella.

RATKAISU

a) Kysytty etäisyys on leveyspiiriä pitkin kulkevan ympyrän kaaren pituus.



Kaaren pituuden laskemiseksi tarvitaan keskuskulma ja leveyspiiriä kuvaavan ympyrän säde. Keskuskulma saadaan pituuspiirien avulla.

Muunnetaan ensin pituuspiirejä kuvaavat kulmat asteiksi.

Pituus- ja leveyspiirit ilmoitetaan usein asteina ja kulmaminuutteina.

$1 \text{ kulmaminuutti} = 1' = \frac{1}{60}°$

- $37°37' = 37° + \frac{37}{60}° = \frac{2257}{60}° \approx 37{,}62°$
- $12°34' = 12° + \frac{34}{60}° = \frac{377}{30}° \approx 12{,}57°$

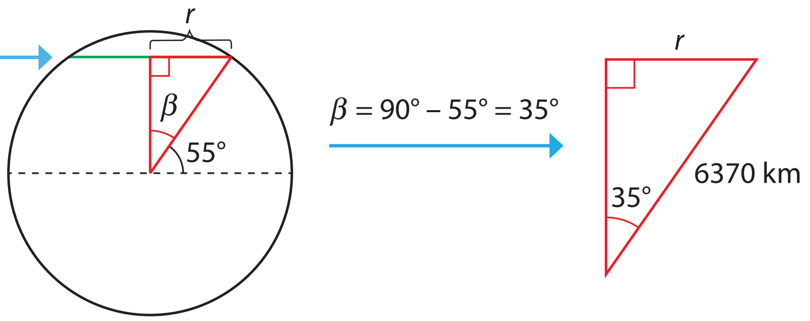
Kaarta vastaava keskuskulma

Laske tarkoilla arvoilla (murtoluvuilla).

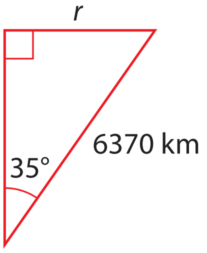
$$\alpha = \frac{2257}{60}° - \frac{377}{30}° = \frac{501}{20}° = 25{,}05°$$

Piirretään Maapallosta uusi poikkileikkauskuva.

Leveyspiiri 55° N



Leveyspiirin säde r saadaan ratkaistua poikkileikkausympyrän sisäpuolelle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

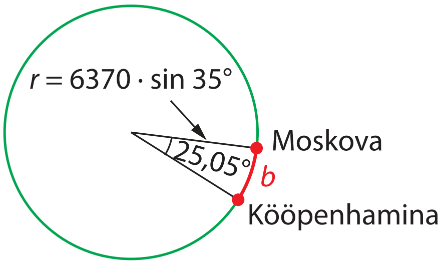


$$\sin\alpha = \frac{\text{vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$$

$$\sin 35^\circ = \frac{r}{6370}$$

$$r = 6370 \cdot \sin 35^\circ = 3653{,}681\ldots\ \text{(km)}$$

Lasketaan Moskovan ja Kööpenhaminan välistä matkaa kuvaavan kaaren pituus b.

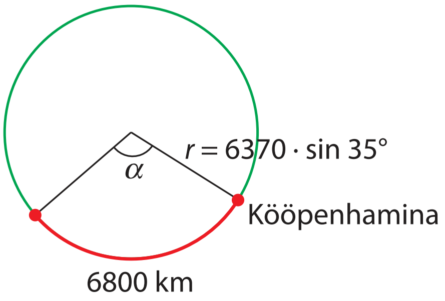


Kaaren pituus

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{25{,}05^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \cdot \sin 35^\circ \text{ km} \\ &= 1597{,}40\ldots \text{ km} \\ &\approx 1600 \text{ km} \end{aligned}$$

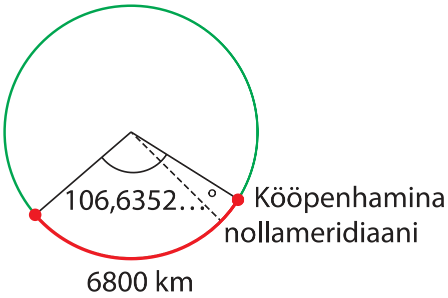
b) Matka kuljetaan pitkin samaa leveyspiiriä. Lasketaan kuljettua matkaa vastaavan keskuskulman suuruus.



$$6800 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \cdot \sin 35^\circ$$

$$\alpha = 106{,}6352\ldots^\circ$$

Kööpenhamina sijaitsee nollameridiaanista $\frac{311}{30}^\circ \approx 12{,}57^\circ$ itään. Koska kuljettua matkaa vastaavan kaaren keskuskulma on suurempi kuin 12,57°, matkan varrella siirrytään nollameridiaanin länsipuolelle.



Lasketaan pituuspiiriä vastaava keskuskulma ja muunnetaan se asteiksi ja kulmaminuuteiksi.

1 aste = 60 kulmaminuuttia

$1^\circ = 60'$

$$\begin{aligned} &106{,}6352\ldots^\circ - \frac{377}{30}^\circ \\ &= 94{,}0685\ldots^\circ \\ &= 94^\circ + 0{,}0685\ldots \cdot 60' \\ &= 94^\circ + 4{,}115\ldots' \\ &\approx 94^\circ\ 4' \end{aligned}$$

VASTAUS **a)** 1600 km **b)** Pituuspiirille 94° 4′ W.

Tehtävät

308. Pituus- ja leveyspiirit ilmoitetaan usein asteina ja kulmaminuutteina. Yksi aste vastaa 60 kulmaminuuttia eli 1° = 60′. Muunna seuraavat pituuspiirit asteiksi. Anna vastaus murtolukuna sekä likiarvona kahden desimaalin tarkkuudella.

a) 50° 38′ W **b)** 43° 15′ E **c)** 75° 23′ E

309. Muunna seuraavat leveyspiirit asteiksi ja kulmaminuuteiksi. Anna vastaus kulmaminuutin tarkkuudella.

a) 15,62° N **b)** 35,87° S **c)** 26,08° N

E1 **310.** Pohjoinen napapiiri on leveyspiiri, jonka sijainti on 66,5° pohjoista leveyttä. Ateena sijaitsee leveyspiirillä 23,7° pohjoista leveyttä.

a) Laske Ateenan ja pohjoisen napapiirin välinen etäisyys Maan pintaa pitkin mitattuna. Maan ympärysmitta on 40 000 km. Anna vastaus kymmenien kilometrien tarkkuudella.

b) Ateenasta kuljetaan 1500 km suoraan etelään. Mille leveyspiirille päädytään? Anna vastaus asteina yhden desimaalin tarkkuudella.

311. Tunis ja Oslo sijaitsevat samalla pituuspiirillä. Laske Oslon ja Tunisin välinen lyhin etäisyys Maan pintaa pitkin mitattuna, kun Tunisin leveyspiiri on 36° 48′ N ja Oslon leveyspiiri 59° 54′ N. Anna vastaus kilometrien tarkkuudella. Maan säde on 6380 km.

312. Philadelphian kaupunki Yhdysvalloissa sijaitsee pituuspiirillä 75° W ja leveyspiirillä 39° 58′ N. Samalla pituuspiirillä sijaitsee Perussa Andien vuoristossa Huancayon kaupunki.

a) Laske Philadelphian ja Huancayon välinen lyhin etäisyys Maan pintaa pitkin mitattuna kilometrin tarkkuudella, kun Huancayo sijaitsee leveyspiirillä 12° 5′ S. Maapallon säde on 6380 km.

b) Huancayosta siirrytään pitkin samaa pituuspiiriä 2000 km suoraan pohjoiseen. Mille leveyspiirille päädytään? Anna vastaus asteina ja kulmaminuutteina kulmaminuutin tarkkuudella.

E2 **313.** Oslo ja Helsinki sijaitsevat likimain samalla leveyspiirillä 60° N.

a) Laske Oslon ja Helsingin välinen etäisyys leveyspiiriä pitkin mitattuna. Anna vastaus kilometrin tarkkuudella. Oslon pituuspiiri on 10° 44′ E ja Helsingin pituuspiiri 24° 56′ E. Maan säde on 6370 km.

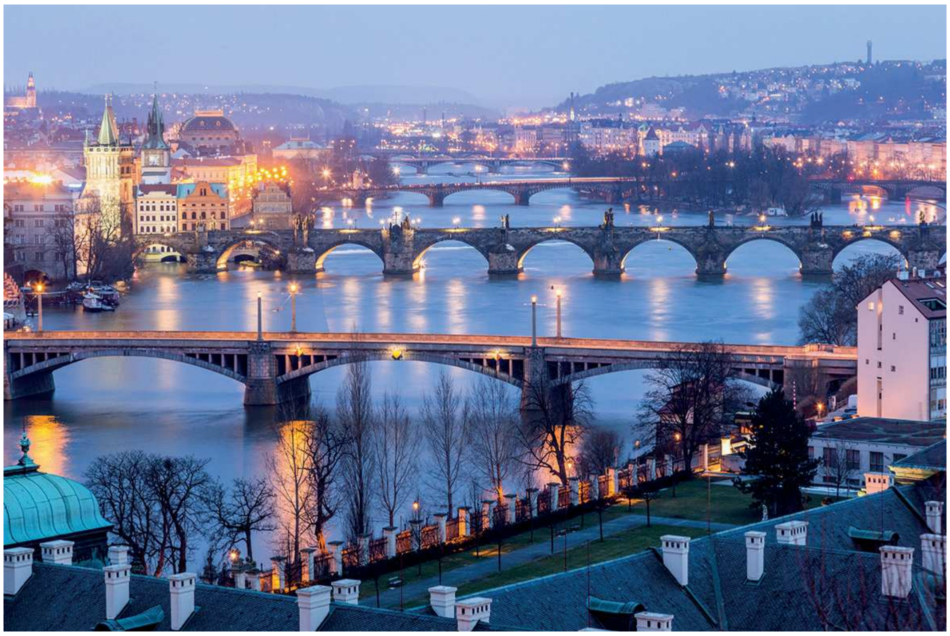
b) Helsingistä kuljetaan 5300 km leveyspiiriä pitkin suoraan länteen. Mille pituuspiirille päädytään? Anna vastaus asteina ja kulmaminuutteina kulmaminuutin tarkkuudella.

314. Peking ja Ankara sijaitsevat molemmat leveyspiirillä 39° pohjoista leveyttä. Laske Pekingin ja Ankaran välinen etäisyys leveyspiiriä pitkin mitattuna, kun Peking sijaitsee pituuspiirillä 116° 24′ E ja Ankara pituuspiirillä 32° 44′ E. Maan säde on 6380 km.

315. Tšekin pääkaupunki Praha sijaitsee leveyspiirillä 50° N. Likimain samalla leveyspiirillä sijaitsee Kanadassa Winnipegin kaupunki.

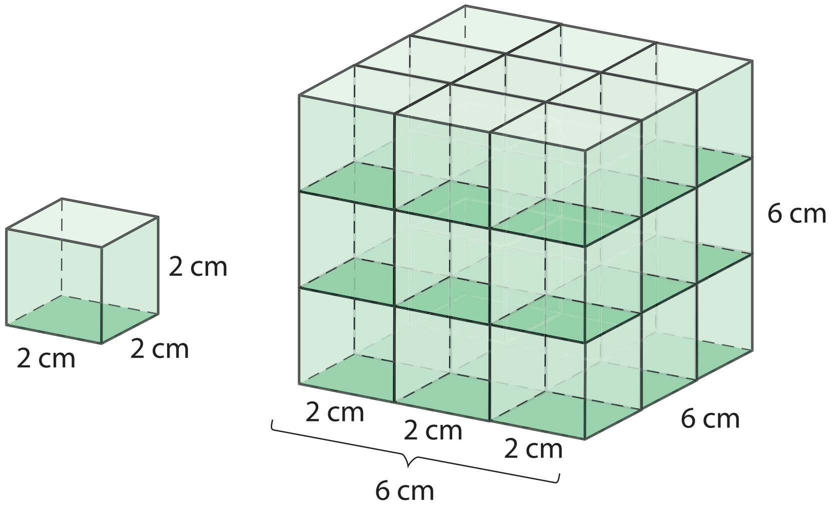
a) Laske Prahan ja Winnipegin välinen etäisyys leveyspiiriä pitkin mitattuna kilometrin tarkkuudella, kun Praha sijaitsee pituuspiirillä 14° 26′ E ja Winnipeg pituuspiirillä 97° 8′ W. Maan säde on 6380 km.

b) Prahasta kuljetaan 12 000 km leveyspiiriä pitkin suoraan itään. Mille pituuspiirille päädytään? Anna vastaus asteina ja kulmaminuutteina kulmaminuutin tarkkuudella.



4.5 Yhdenmuotoiset kappaleet

Tarkastellaan kahta kuutiota, joiden särmien pituudet ovat 2 cm ja 6 cm.



Kappaleet ovat yhdenmuotoisia, ja vastinjanojen suhde eli mittakaava on

$$k = \frac{2\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{3} = 1:3$$

Isompi kuutio sisältää $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kappaletta pienempiä kuutioita, joten isomman kuution tilavuus on 27-kertainen pienemmän kuution tilavuuteen verrattuna. Tilavuuksien suhde on siis

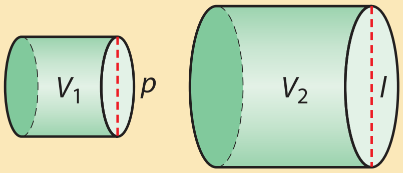
$$\frac{V_{\text{pieni kuutio}}}{V_{\text{iso kuutio}}} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = k^3$$

Tulos voidaan yleistää kaikille yhdenmuotoisille kappaleille.

Tilavuuksien suhde

Jos mittakaava on k, niin tilavuuksien suhde

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p}{l}\right)^3 = k^3$$



ESIMERKKI 1

Kahden yhdenmuotoisen juomapullon

a) mittakaava on 1 : 2. Laske isomman pullon tilavuus litroina, kun pienemmän tilavuus on 275 ml.

b) tilavuudet ovat 20 dl ja 2,5 dl. Kuinka moninkertainen suuremman pullon pinta-ala on pienempään verrattuna?

RATKAISU

a) Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_{\text{pieni}}}{V_{\text{iso}}} = k^3$$

$$\frac{275}{V_{\text{iso}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{275}{V_{\text{iso}}} = \frac{1}{8}$$

$$V_{\text{iso}} = 2200\ (\text{ml})$$

Isomman pullon tilavuus on 2200 ml = 2,2 l.

b) Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$k^3 = \frac{20\ \cancel{\text{dl}}}{2{,}5\ \cancel{\text{dl}}}$$

$$k = 2$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{20\ \text{dl}}}{A_{2{,}5\ \text{dl}}} = k^2$$

$$\frac{A_{20\ \text{dl}}}{A_{2{,}5\ \text{dl}}} = 2^2 = 4$$

Siis $A_{20\ \text{dl}} = 4 \cdot A_{2{,}5\ \text{dl}}$.

VASTAUS

a) 2,2 l

b) 4-kertainen

ESIMERKKI 2

Savanninorsun poikanen painaa 100 kg. Aikuisen savanninorsu-uroksen korkeus on 4,0 m ja massa 7500 kg. Laske poikasen korkeus, kun oletetaan, että norsu säilyttää kasvaessaan muotonsa ja tiheytensä.

RATKAISU

Tiheys ρ on massan m ja tilavuuden V osamäärä eli $\rho = \frac{m}{V}$.

Tilavuus on tällöin $V = \frac{m}{\rho}$.
Määritetään norsujen tilavuuksien suhde, kun tiheys on ρ.

Kun tiheys pysyy vakiona, massa ja tilavuus ovat suoraan verrannolliset. Tällöin tilavuuksien suhde on yhtä suuri kuin massojen suhde.

$$\frac{V_{\text{poikanen}}}{V_{\text{aikuinen}}} = \frac{\frac{m_{\text{poikanen}}}{\rho}}{\frac{m_{\text{aikuinen}}}{\rho}}$$

$$= \frac{m_{\text{poikanen}}}{\cancel{\rho}} \cdot \frac{\cancel{\rho}}{m_{\text{aikuinen}}}$$

$$= \frac{m_{\text{poikanen}}}{m_{\text{aikuinen}}}$$

$$= \frac{1\cancel{0}\cancel{0}\text{ kg}}{75\cancel{0}\cancel{0}\text{ kg}} = \frac{1}{75}$$

Mittakaava on sama kuin norsujen korkeuksien suhde. Merkitään poikasen korkeutta kirjaimella h.

$$\frac{h_{\text{poikanen}}}{h_{\text{aikuinen}}} = \frac{h}{4{,}0}$$

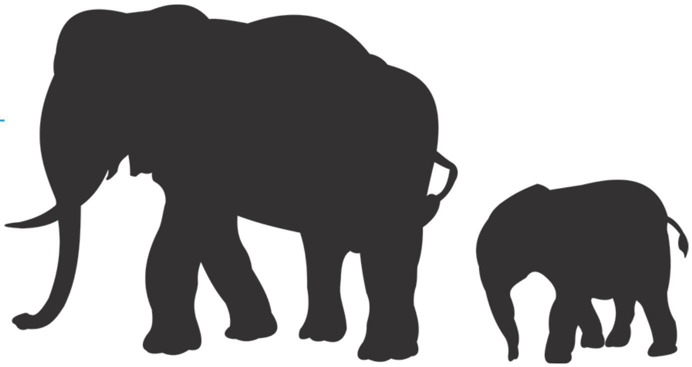
Massojen suhde on mittakaavan kuutio.

$$\left(\frac{h}{4{,}0}\right)^3 = \frac{1}{75}$$

$$h = 0{,}9485\ldots$$

$$h \approx 0{,}95\ \text{(m)}$$

VASTAUS 0,95 m



Tehtävät

316. Määritä mittakaava, kun yhdenmuotoisten säiliöiden tilavuudet ovat
a) 27 l ja 64 l **b)** 51,2 l ja 100 l **c)** 34,3 l ja 125 dl.

317. Yhdenmuotoisten vesikannujen tilavuudet ovat 1,0 l ja 2,5 l. Pienemmän kannun korkeus on 19 cm. Laske isomman kannun korkeus.

E1

318. Kahden yhdenmuotoisen akvaarion
a) mittakaava on 4 : 3. Laske isomman akvaarion tilavuus litroina, kun pienemmän tilavuus on 180 l.
b) tilavuudet ovat 40 l ja 320 l. Määritä mittakaava. Kuinka moninkertainen isomman akvaarion pinta-ala on pienempään verrattuna?

E2

319. Ruskeakarhun pennun massa syntyessään on 420 g. Aikuisen karhun massa on 200 kg ja pituus 250 cm. Laske pennun pituus, kun oletetaan, että karhu säilyttää kasvaessaan muotonsa ja tiheytensä.

320. Suorakulmaisen särmiön muotoisen veistoksen leveys on 2,00 m, pituus 1,00 m ja korkeus 3,00 m. Veistoksesta tehdään pienoismalli, jonka tilavuus on sadasosa alkuperäisen veistoksen tilavuudesta. Mitkä ovat pienoismallin mitat? [S1998, 6]

321. Jalallisen viinilasin sisätila on kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka tilavuus on 1,75 dl. Kuinka paljon lasissa on nestettä nestepinnan lasissa ulottuessa puoleenväliin lasin sisätilan korkeudesta? [S2002, 5]

322. Ilmapallon kutistuessa sen halkaisija lyheni 9,1 %. Kuinka monta prosenttia ilmapallon tilavuus supistui? [S1986, 5b]

5 Kertaus: Geometria

Tässä luvussa kerrataan

- kuvioiden yhdenmuotoisuus
- suorakulmaisen kolmion trigonometria
- Pythagoraan lause ja Pythagoraan lauseen käänteislause
- kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen
- geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa

5.1 Kurssin keskeiset asiat

- Kerrataan kurssin keskeiset käsitteet ja laskukaavat.
- Kaikki luvun tehtävät on tarkoitus ratkaista **ilman laskinta**.

5.2 Matemaattisia malleja

- Kerrataan matemaattisen mallin muodostamista ja mallin käyttöä erilaisissa tilanteissa.
- Kerrataan laskimen käyttöä.
- Kaikki luvun tehtävät on tarkoitus ratkaista **laskimen avulla**.

5.3 Monivalintatehtäviä

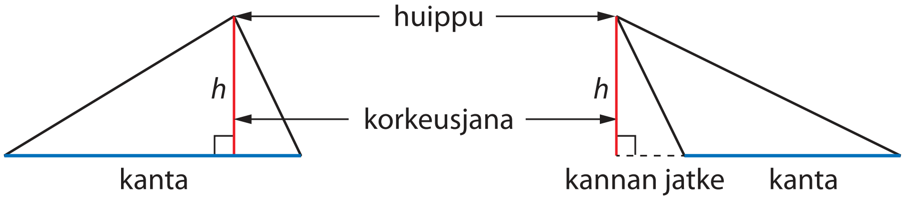
- Kerrataan kurssin asioita monivalintatehtävien avulla.
- Osa tehtävistä on tarkoitus ratkaista ilman laskinta ja osassa voi käyttää laskinta.

5.1 Kurssin keskeiset asiat

Monikulmioita

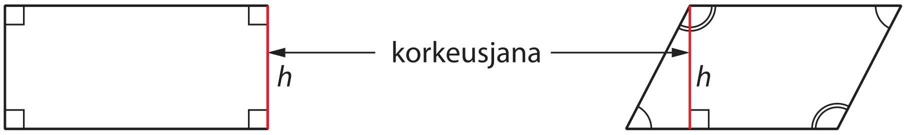
- **Kolmio** on monikulmio, jossa on kolme sivua ja kolme kulmaa. Kulmien summa on 180°.
    - **Suorakulmaisessa kolmiossa** on yksi 90°:n kulma.
    - **Tasasivuisen kolmion** kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat 60°.
    - **Tasakylkisen kolmion** kyljet ovat yhtä pitkiä ja kantakulmat ovat yhtä suuria.

- **Kolmion korkeus** on huipusta kantaa (tai sen jatketta) vastaan piirretyn kohtisuoran janan pituus.



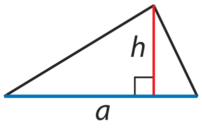
- **Nelikulmiossa** on neljä sivua ja neljä kulmaa. Kulmien summa on 360°.
    - **Suorakulmiossa** vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat suoria (neliö on suorakulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä).
    - **Suunnikkaan** yhdensuuntaiset sivut ovat yhtä pitkiä ja vastakkaiset kulmat yhtä suuria.
    - **Puolisuunnikkaassa** on kaksi yhdensuuntaista sivua.

- **Korkeusjana** on kohtisuorassa kantaa tai kannan jatketta vastaan. Jos nelikulmiossa on kaksi yhdensuuntaista sivua, korkeus on näiden sivujen välinen etäisyys.



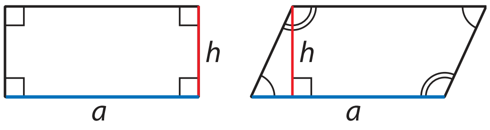
- Kolmioiden ja tavallisimpien nelikulmioiden **pinta-alat** lasketaan kannan ja korkeuden avulla.

Kolmion pinta-ala



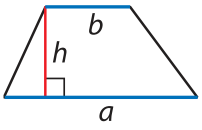
$$A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ah$$

Suorakulmion ja suunnikkaan pinta-ala



$$A = ah$$

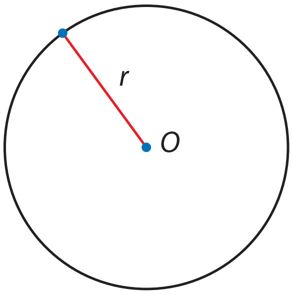
Puolisuunnikkaan pinta-ala



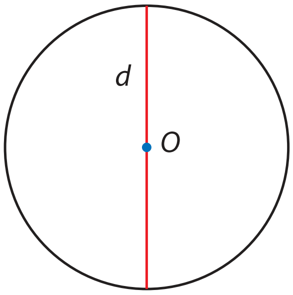
$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Ympyrä

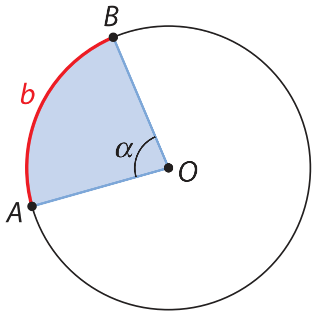
- **Ympyrä** on niiden tason pisteiden joukko, joiden etäisyys annetusta pisteestä *O* on vakio.
  - Piste *O* on ympyrän **keskipiste**.
  - Ympyrän **kehän** *p* etäisyyttä keskipisteestä sanotaan ympyrän **säteeksi** *r*.
  - Ympyrän **halkaisija** *d* on jana, joka yhdistää kaksi kehän pistettä ja kulkee ympyrän keskipisteen kautta.



$$d = 2r$$
$$p = 2\pi r = \pi d$$

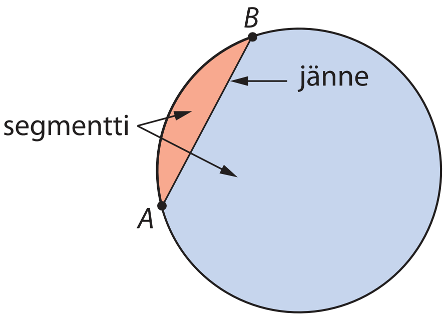


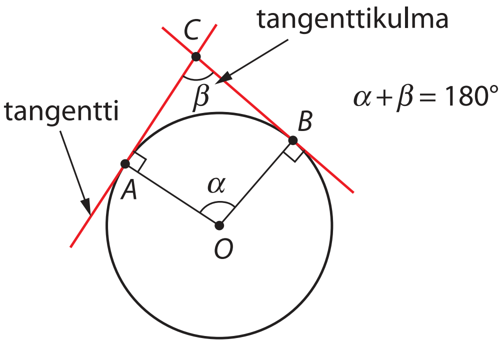
- Kaksi sädettä ja osa ympyrän kehää erottavat ympyrästä osan, jota kutsutaan **sektoriksi**.
  - Kulma α on sektorin **keskuskulma**.
  - Pisteet *A* ja *B* erottavat kehältä osan, jota sanotaan **kaareksi**. Kaaren pituutta merkitään usein kirjaimella *b*.



$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$
$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

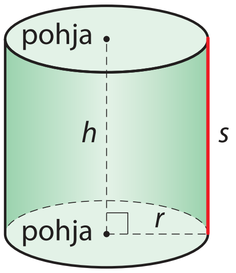
- **Jänne** on ympyrän kahta kehäpistettä yhdistävä jana.
  - Jänne jakaa ympyrän kahteen **segmenttiin**.
- **Tangentti** on suora, joka sivuaa ympyrän kehää yhdessä pisteessä.
  - Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä voidaan piirtää ympyrälle kaksi tangenttia.
  - **Tangenttikulma** on kahden tangentin väliin muodostuva kulma.
  - Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.





Avaruuskappaleita

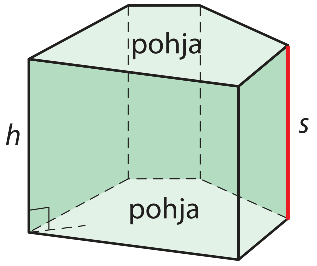
- **Lieriössä** on kaksi pohjaa ja niiden väliin jäävä vaippa.
  - **Pohjat** ovat samankokoiset, yhdenmuotoiset ja yhdensuuntaiset tasokuviot.
  - **Vaippa** muodostuu, kun pohjien reunojen vastinpisteet yhdistetään janoilla. Näitä janoja kutsutaan **sivujanoiksi** *s*.
  - Lieriön **korkeus** *h* on pohjien välinen kohtisuora etäisyys.



ympyrälieriö

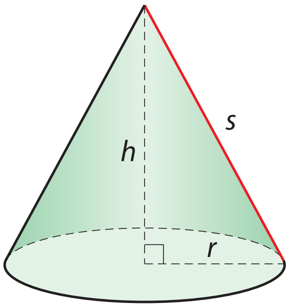
$A_{\text{vaippa}} = p_{\text{pohja}} \cdot h$

$V_{\text{lieriö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h$



särmiö

- **Kartiossa** on yksi pohja ja vaippa.
  - **Vaippa** muodostuu, kun pohjan reunapisteet yhdistetään pohjan ulkopuolella olevaan pisteeseen, **huippuun**.
  - Pohjan reunapisteen ja huipun yhdistävää janaa kutsutaan sivujanaksi *s*.
  - Kartion **korkeus** *h* on pohjan ja huipun välinen kohtisuora etäisyys.
  - **Suoran kartion** korkeusjanan toinen päätepiste on pohjan keskipiste.

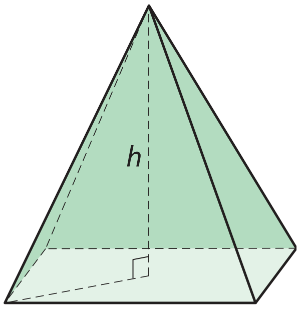


ympyräkartio

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_p \cdot h = \frac{A_p \cdot h}{3}$$

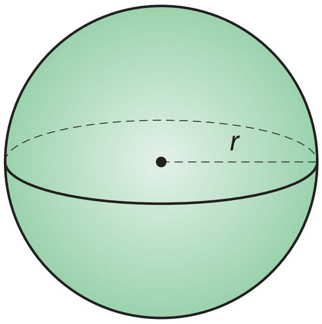
Suoralle ympyräkartiolle

$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$



pyramidi

- **Pallo** on pinta, joka muodostuu niiden avaruuden pisteiden joukkona, jotka ovat yhtä etäällä kiinteästä pisteestä, pallon **keskipisteestä**.
  - **Säde** *r* on pallopinnan pisteen ja keskipisteen yhdistävä jana.

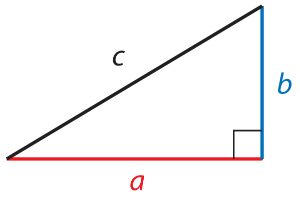


$A = 4\pi r^2$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pythagoraan lause ja trigonometriset funktiot

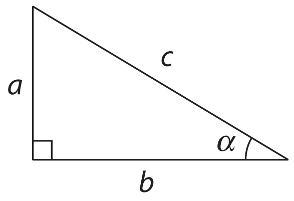
- Suorakulmaiselle kolmiolle on voimassa **Pythagoraan lause**.
  Sen mukaan kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö.
  - Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta kolmiosta voidaan ratkaista kolmas sivu, jos kaksi muuta sivua tunnetaan.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

- **Pythagoraan lauseen käänteislauseen** mukaan kolmio on suorakulmainen, jos sen sivujen pituuksille a, b ja c on voimassa ehto $\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2} = \boldsymbol{c^2}$.

- Suorakulmaiselle kolmiolle voidaan määrittää sivujen pituuksien suhteita. Näiden suhteiden arvoja kuvataan **trigonometristen funktioiden** avulla.
  - Tärkeimpiä trigonometrisia funktioita ovat sini, kosini ja tangentti.
  - Trigonometristen funktioiden avulla ratkaistaan suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia ja kulmien suuruuksia.

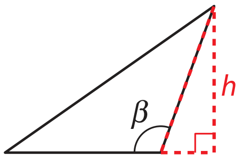


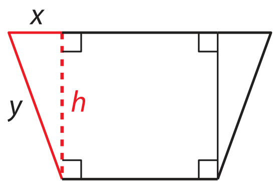
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

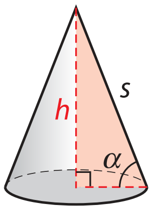
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

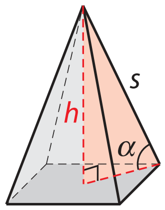
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

- Pythagoraan lausetta ja trigonometrisiä funktioita hyödynnetään usein kuvioiden ja kappaleiden **korkeusjanan** pituuden h määrittämisessä.









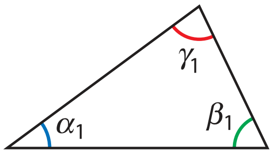
- Taso- ja avaruusgeometrian tehtävissä trigonometrian ja Pythagoraan lauseen avulla ratkaistaan
  - sivujen, särmien ja lävistäjien pituuksia
  - sivujen, tahkojen ja lävistäjien välisiä kulmia
  - ympyrään tai sen osiin liittyviä pituuksia ja kulmia
  - janojen pituuksia ja kulmia koordinaatistossa.

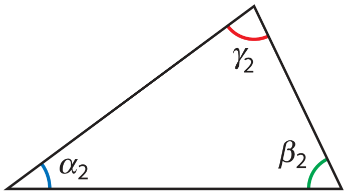
Yhdenmuotoisuus

- Kaksi tasokuviota K_1 ja K_2 ovat **yhdenmuotoiset** eli $K_1 \sim K_2$, kun kuvioiden
  - vastinjanojen suhde on vakio
  - vastinkulmat ovat yhtä suuret.

- Kaksi kuviota on yhdenmuotoisia, jos toinen on saatu toisesta
  - pienentämällä tai suurentamalla
  - kiertämällä
  - peilaamalla.

- **Kolmioiden kk-lauseen** mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos kolmioissa on kaksi yhtä suurta vastinkulmaa.





Jos $\alpha_1 = \alpha_2$ ja $\beta_1 = \beta_2$, niin $\gamma_1 = \gamma_2$.

↔

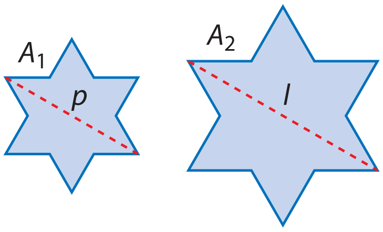
Kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

- Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on vakio.
  Tätä vakiota kutsutaan **yhdenmuotoisuussuhteeksi** eli **mittakaavaksi**.
  - Mittakaavaa merkitään usein kirjaimella k.
  - Mittakaava k ilmoitetaan siten, että suhteen osoittajana on pituus esimerkiksi piirroksessa ja nimittäjänä pituus luonnossa.

$$k = \frac{\text{pituus piirroksessa}}{\text{pituus luonnossa}}$$

- Yhdenmuotoisten **kuvioiden pinta-alojen suhde** eli **pintasuhde** on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{p}{l}\right)^2 = k^2$$



Tehtävät

1. Suorakulmion $ABCD$ erisuuntaisten sivujen suhde on $3:4$.

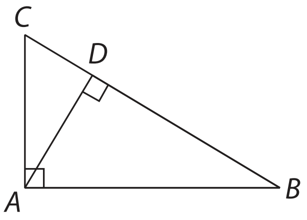
- **a)** Laske sivujen pituudet, kun suorakulmion lävistäjä on 10 cm.
- **b)** Pyramidin korkeus on 4 cm ja sen pohjana on suorakulmio $ABCD$. Laske pyramidin tilavuus.

2. Neliöpohjaisen pyramidin pohjasivun pituus on 8 cm.
Pyramidin korkeus on 3 cm.

- **a)** Laske sivutahkon korkeus.
- **b)** Laske pyramidin vaipan ala.

3. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusana on jana BC. Piste D sijaitsee janalla BC siten, että jana AD on kohtisuorassa janaa BC vastaan.

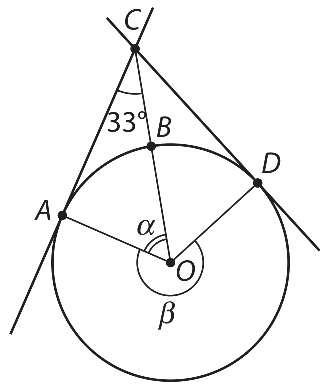
- **a)** Osoita, että kolmiot ABC ja ADC ovat yhdenmuotoiset.
- **b)** Janan BD pituus on 4 ja janan AC pituus on $\sqrt{5}$.
  Laske janan CD pituus.

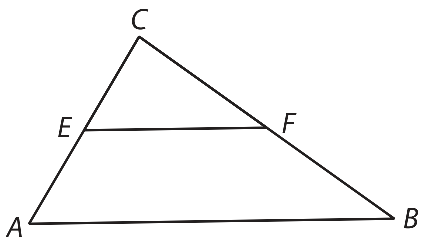


4. Suorakulmaiselle kolmion terävät kulmat ovat α ja β.
Kolmiossa $\tan\alpha = \frac{2}{3}$.

- **a)** Määritä tarkat arvot lausekkeille $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$.
- **b)** Laske summa $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$.
- **c)** Määritä tarkat arvot lausekkeille $\sin\beta$ ja $\tan\beta$.
- **d)** Suorakulmaisen kolmion lyhyemmän kateetin pituus on 4 cm. Laske pidemmän kateetin pituus.
- **e)** Laske kolmion pinta-ala.

5. Tangentit sivuavat ympyrää pisteissä A ja D. Määritä kuvan kulmien α ja β suuruudet.





6. Kolmiot EFC ja ABC ovat yhdenmuotoiset. Kolmion EFC korkeus on puolet kolmion ABC korkeudesta.

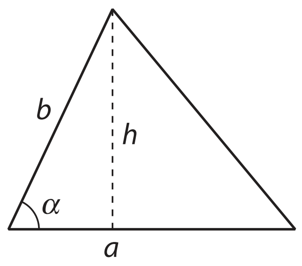
a) Mikä on kolmion EFC pinta-alan suhde kolmion ABC pinta-alaan?

b) Kannan AB pituus on 8 cm. Laske kannan EF pituus.

7. Kolmion vierekkäiset sivut ovat pituudeltaan a ja b. Niiden välinen kulma on α. Esitä lauseke kirjaimia a, b ja α käyttäen kolmion

a) korkeudelle h

b) pinta-alalle A.



8. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on kolme kertaa niin pitkä kuin lyhyempi kateetti. Pidemmän kateetin pituus on $4\sqrt{2}$. Laske lyhyemmän kateetin ja hypotenuusan pituudet.

9. Neliön sisällä on suurin mahdollinen ympyrä. Ympyrän kehän pituus on 16π. Määritä

a) ympyrän kehän pituuden ja neliön piirin suhde

b) ympyrän ja neliön pinta-alojen suhde

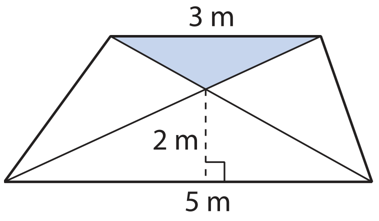
c) ympyrän halkaisijan ja neliön lävistäjän pituuksien suhde.

10. Kuvan puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 3 m ja 5 m.

a) Laske sinisen kolmion korkeus.

b) Laske puolisuunnikkaan pinta-ala.

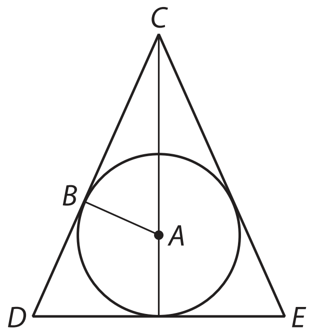
c) Laske sinisen kolmion ja puolisuunnikkaan pinta-alojen suhde.



11. Tasakylkisen kolmion CDE sisään on piirretty suurin mahdollinen ympyrä. Kannan DE pituus on 8 ja kyljen DC pituus on 5. Määritä

a) ympyrän säde

b) kolmion BAC pinta-ala.



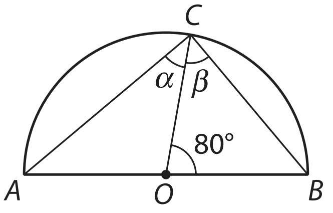
12. Kuution särmän pituus on a. Kuution särmän pituus puolittuu. Kuinka paljon kuution

a) tilavuus pienenee

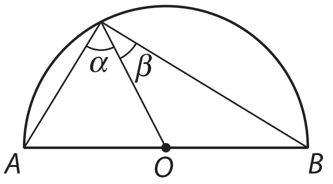
b) pinta-ala pienenee?

13. Jana AB on puoliympyrän halkaisija.

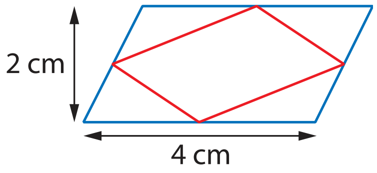
a) Määritä kulmat α ja β. Mikä on niiden summa?



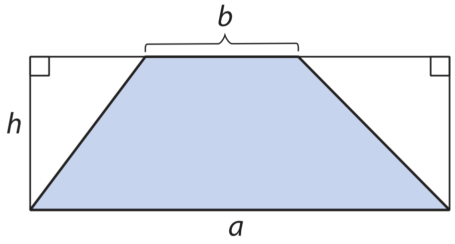
b) Määritä kulmien α ja β summa. Perustele vastauksesi.



14. Suunnikkaan sisälle piirretään pienempi suunnikas, jonka kärjet ovat alkuperäisen suunnikkaan sivujen keskipisteissä. Laske pienen suunnikkaan pinta-ala käyttämällä kuvioon merkittyjä pituuksia. [S2015, 2]



15. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat a ja b. Sivujen välinen etäisyys on h. Johda alla olevan kuvan avulla kaava puolisuunnikkaan pinta-alalle.



16. Suoran pyramidin pohja on neliö, jonka lävistäjän pituus on 2. Pyramidin sivusärmän pituus on $\sqrt{5}$. Määritä pyramidin

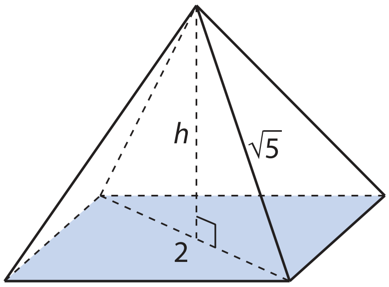
a) korkeus h

b) pohjaneliön sivun pituus

c) tilavuus

d) sivutahkon korkeus

e) vaipan pinta-ala.



17. Suoran ympyrälieriön tilavuus on 48π. Lieriön korkeus on 12. Laske lieriön

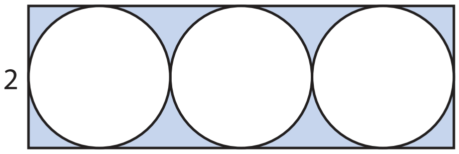
a) pohjaympyrän säteen pituus

b) vaipan pinta-ala.

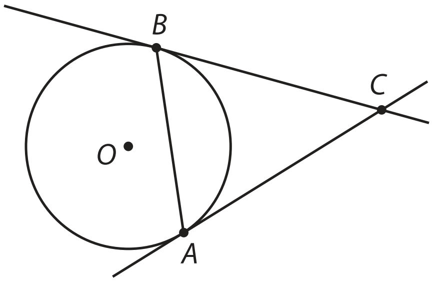
18. Kuvan suorakulmion korkeus on 2.

a) Muodosta lauseke väritetyn alueen pinta-alalle.

b) Kuinka suuri osa kuviosta on väritetty?



19. Pisteestä C piirretyt tangentit sivuavat ympyrää pisteissä A ja B. Ympyrän keskipisteen O etäisyys janasta AB on 1. Janan BC pituus on $2\sqrt{3}$. Laske kolmion BAC pinta-ala, kun ympyrän säde on 2.

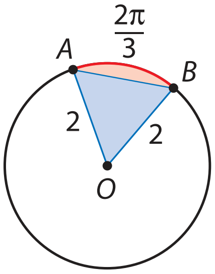


20. Punaisella merkityn kaaren AB pituus on $\frac{2\pi}{3}$.

a) Laske kaarta vastaavan keskuskulman suuruus.

b) Laske sinisen kolmion korkeus.

c) Laske punaisen segmentin pinta-ala.



21. Kuution särmän pituus on 2. Kuution sisällä on suurin mahdollinen pallo. Laske pallon ja kuution

a) pinta-alojen suhde

b) tilavuuksien suhde.

22. Tasakylkisen kolmion ABC kärkipisteet ovat $A(-2, 3)$, $B(0, 5)$ ja $C(2, 1)$. Kolmion kanta on jana AB.

a) Määritä kannan keskipisteen D koordinaatit.

b) Määritä pisteiden C ja D välinen etäisyys.

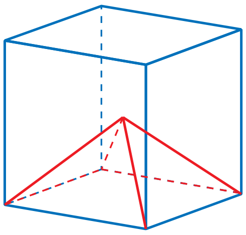
c) Laske janan AB pituus $|AB|$.

d) Laske kolmion pinta-ala.

23. Ympyrän keskipiste on $O(-1, 2)$. Ympyrän säteen pituus on $\sqrt{5}$.

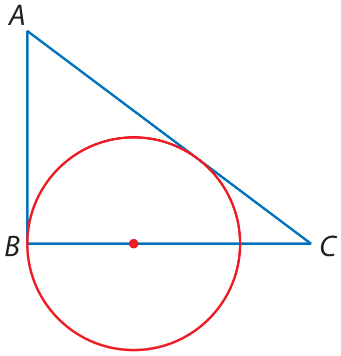
a) Pisteet C ja D sijaitsevat ympyrän kehällä. Molemmat pisteet sijaitsevat lisäksi y-akselilla. Määritä pisteet.

b) Kun ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä $A(x, 2)$ piirretään tangentit ympyrälle, ne sivuavat kehää pisteissä C ja D. Pisteiden C ja D etäisyys pisteestä A on $2\sqrt{5}$. Määritä piste A.



24. Kuution sisällä on pyramidi, jonka pohja yhtyy kuution pohjaan ja jonka korkeus on puolet kuution särmän pituudesta. Määritä pyramidin ja kuution tilavuuksien suhde. Kuution särmän pituus on s. [S2014, 7]

25. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusan pituus on 10. Kateetin AB pituus on 6. Ympyrän keskipiste sijaitsee kateetilla BC, ja piste B on ympyrän kehällä. Hypotenuusa sivuaa ympyrää. Määritä ympyrän säteen tarkka arvo.



Lisämateriaali: Yhdenmuotoiset kappaleet s. 182

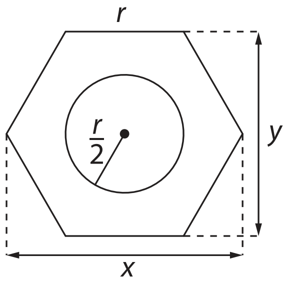
26. Taikinasta leivotaan pallonmuotoisia munkkeja, joiden pinta sokeroidaan. Tarvittavan sokerin määrä on suoraan verrannollinen pallon pinta-alaan. Vaihtoehtona on leipoa 24 pientä tai 3 isoa munkkia. Laske sokerin kokonaismäärien suhde näille kahdelle vaihtoehdolle. [S2014, 11]

27. Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista säännöllistä kuusikulmiota, jonka sivun pituus on r.

a) Johda leveyden x lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

b) Johda korkeuden y lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

c) Laske kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala, kun ympyrän säde on $\frac{r}{2}$. [S2012, 9]



5.2 Matemaattisia malleja

Teknisen apuvälineen käyttöä tulee harjoitella samalla tavalla kuin matemaattisten tehtävien ratkaisua: erilaisia tehtäviä on ratkaistava riittävä määrä, jotta toiminnot tulevat tutuiksi. Tällä kurssilla teknistä apuvälinettä on opeteltu käyttämään seuraavissa tilanteissa:

① Tarkasteltavista tilanteista **piirretään mallikuvia**.
- monikulmioiden piirtäminen (kolmiot, nelikulmiot)
- ympyrän ja sektorin piirtäminen
- ympyrän tangenttiin liittyvien kuvioiden piirtäminen
- avaruuskappaleiden (lieriö, kartio, pallo) piirtäminen
- kuvioiden piirtäminen koordinaatistoon

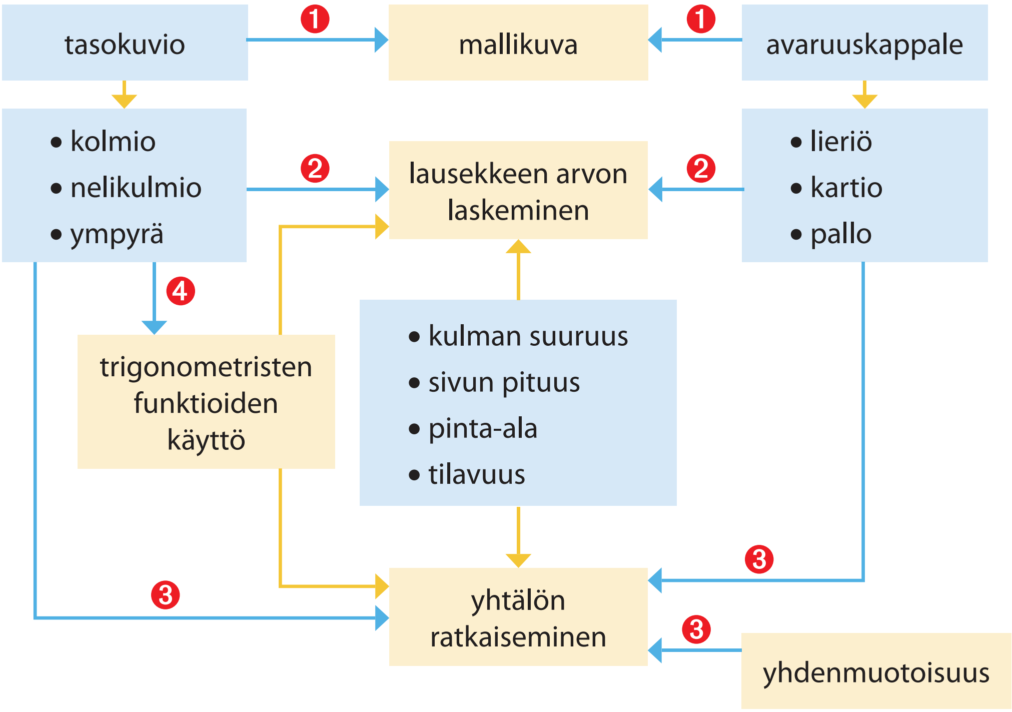
Geometrian tehtävissä lasketaan usein välituloksia, joita käytetään varsinaisen kysytyn asian ratkaisemiseen.

② Laskuissa tulee pyrkiä käyttämään tarkkoja arvoja joko **kopioimalla lausekkeita** tai **sijoittamalla arvoja laskimen muistiin**.

③ Tarvittavia kulmia ja pituuksia **ratkaistaan** usein **yhtälöiden** avulla laskimen ratkaisetoiminnoilla. Yhtälöt muodostetaan yleensä geometrisiin kuvioihin liittyvien laskukaavojen avulla.

Teknisen apuvälineen **asetuksista** on tarkistettava, että kulman yksikkönä on asteet.

④ Trigonometrisia funktioita käytetään apuna sekä kulmien että sivujen pituuksien ratkaisemisessa. Kulmien suuruuksia ratkaistaan usein **käänteisfunktioiden** ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ja $\tan^{-1}$) avulla.


tasokuvio
①
mallikuva
①
avaruuskappale
• kolmio
• nelikulmio
• ympyrä
②
lausekkeen arvon laskeminen
②
• lieriö
• kartio
• pallo
④
trigonometristen funktioiden käyttö
• kulman suuruus
• sivun pituus
• pinta-ala
• tilavuus
③
③
yhtälön ratkaiseminen
③
yhdenmuotoisuus

ESIMERKKI 1

Maastosta rajataan joen reunaan rajoittuva suorakulmaisen kolmion muotoinen alue. Kolmion toinen kateetti kulkee pitkin joen reunaa 50,0 m. Alueen muut sivut rajataan aidalla, jota tarvitaan 160,0 metriä.

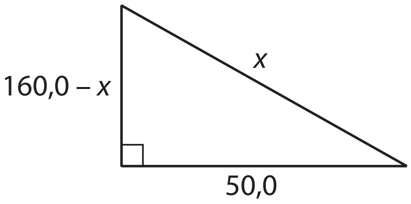
a) Laske kolmion sivujen pituudet.

b) Tontista otettiin ilmakuva. Ilmakuvassa tontin pinta-ala oli 72,1875 cm^2. Laske ilmakuvan mittakaava.

RATKAISU

a) Toisen kateetin ja hypotenuusan yhteispituus on 160,0 m.

- Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella x.
- Toisen kateetin pituus metreinä on tällöin $160{,}0 - x$.



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan x.

$$50{,}0^2 + (160{,}0 - x)^2 = x^2$$

$$x = \frac{1405}{16} = 87{,}8125 \quad \text{(m)}$$

Toisen kateetin pituus on $160{,}0\text{ m} - 87{,}8125\text{ m} = 72{,}1875\text{ m} \approx 72{,}2\text{ m}$.

b) Lasketaan ensin maastosta rajatun alueen pinta-ala.

Kolmion pinta-ala:
$A = \dfrac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$

$$A = \frac{50{,}0\text{ m} \cdot 72{,}1875\text{ m}}{2} = 1804{,}6875\text{ m}^2 = 18\,046\,875\text{ cm}^2$$

Merkitään mittakaavaa kirjaimella k. Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Pinta-alojen suhde:
$\dfrac{A_1}{A_2} = k^2$

$$\frac{72{,}1875\text{ cm}^2}{18\,046\,875\text{ cm}^2} = k^2$$

$$k = -0{,}002 \quad \text{tai} \quad k = 0{,}002$$

Mittakaava on aina positiivinen luku, joten

$$k = 0{,}002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500} = 1:500.$$

VASTAUS **a)** 50,0 m; 72,2 m ja 87,8 m **b)** 1 : 500

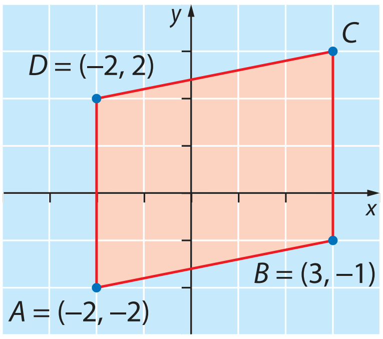
ESIMERKKI 2

Koordinaatistoon on piirretty suunnikas $ABCD$. Laske suunnikkaan

a) sivujen pituudet

b) kulmien suuruudet

c) korkeus yhden desimaalin tarkkuudella, kun jana AB on suunnikkaan kanta.



RATKAISU

a) Jana AD on y-akselin suuntainen. Janan pituus saadaan y-koordinaattien erotuksena.

$$|AD| = |2-(-2)| = |4| = 4$$

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) etäisyys:
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Lasketaan janan AB pituus päätepisteiden koordinaattien avulla.

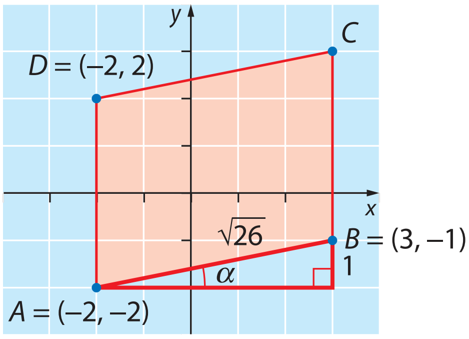
$$|AB| = \sqrt{(3-(-2))^2+(-1-(-2))^2} = \sqrt{26}$$

Kolmion hypotenuusan pituus on $\sqrt{26}$.
Kulman α vastaisen kateetin pituus on $|-1-(-2)| = 1$.

b) Täydennetään suunnikkaan alapuolelle suorakulmainen kolmio ja merkitään kolmion toista terävää kulmaa kirjaimella α. Ratkaistaan kulma α sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\alpha = 11{,}309...^\circ$$



Suunnikkaan kulma A ja kulma α muodostavat yhdessä 90 asteen kulman. Kulman A suuruus on

$$90^\circ - \alpha = 90^\circ - 11{,}309\ldots^\circ = 78{,}690\ldots^\circ \approx 79^\circ.$$

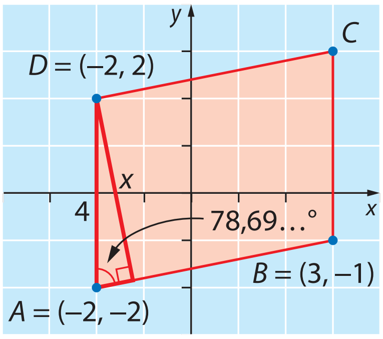
Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten kulma C on 79°. Suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180°, joten kulma B on

$$180^\circ - 78{,}690\ldots^\circ = 101{,}309\ldots^\circ \approx 101^\circ.$$

c) Piirretään kuvaan suunnikkaan korkeusjanan avulla suorakulmainen kolmio. Merkitään suunnikkaan korkeutta kirjaimella x. Ratkaistaan korkeus sinin avulla.

$$\sin 78{,}69...^\circ = \frac{x}{4}$$

$$x = 3{,}9223... \approx 3{,}9$$



VASTAUS **a)** 4 ja $\sqrt{26}$ **b)** 79° ja 101° **c)** 3,9

ESIMERKKI 3

Kuun ympärysmitta on noin 10 900 km.

a) Kuinka monta prosenttia Kuun pinta-ala on Maan pinta-alasta? Maan säde on 6380 km.

b) Neil Armstrong käveli Kuun pinnalla vuonna 1969. Missä kulmassa hän näki Maan? Kuun ja Maan keskipisteiden välinen etäisyys on 384 400 km.

c) Pituuspiirit ovat Maan pinnalla kulkevia ympyröitä, joiden kehän pituus on sama kuin Maan ympärysmitta. Kuinka pitkän matkan pituuspiiristä Armstrong pystyi Kuun pinnalta näkemään?

RATKAISU

a) Merkitään Kuun sädettä kirjaimella r_K. Kuun ympärysmitta on sama kuin ympyrän kehän pituus.

$$\begin{aligned} 2\pi r_K &= 10\,900 \\ r_K &= 1734{,}788... \quad \text{(km)} \end{aligned}$$

Kuun pinta-ala:

$$A_K = 4\pi \cdot (1734{,}788...\ \text{km})^2 = 3{,}7818... \cdot 10^7\ \text{km}^2$$

Maan pinta-ala:

$$A_M = 4\pi \cdot (6380\ \text{km})^2 = 5{,}115... \cdot 10^8\ \text{km}^2$$

Verrataan Kuun pinta-alaa Maan pinta-alaan.

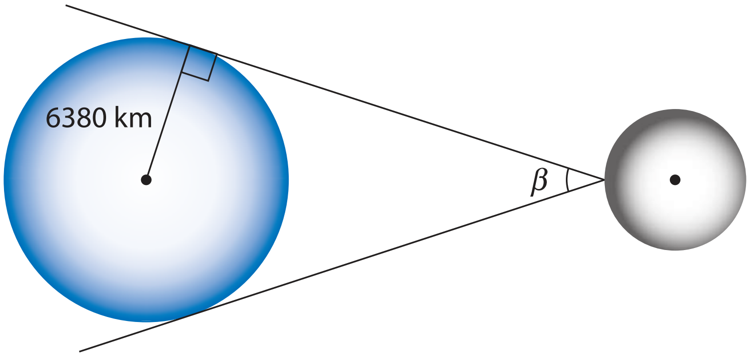
$$\frac{A_K}{A_M} = \frac{3{,}7818... \cdot 10^7\ \text{km}^2}{5{,}115... \cdot 10^8\ \text{km}^2} = 0{,}07393... \approx 7{,}39\ \%$$

Kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia keskenään. Pinta-alojen suhde voidaan tällöin laskea myös säteiden avulla:

$$\frac{A_K}{A_M} = \left(\frac{r_K}{r_M}\right)^2$$

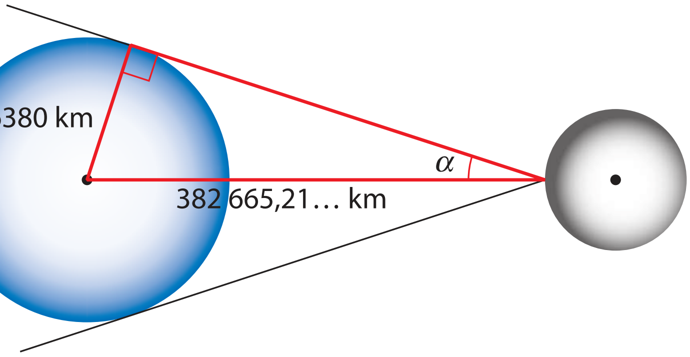
b) Piirretään mallikuva.

- Kysytty kulma on tangenttien väliin muodostuva tangenttikulma β.
- Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.



Muodostetaan kuvioon suorakulmainen kolmio.

- Kolmion hypotenuusan pituus:
  384 400 km – 1734,78… km = 382 665,21… km
- Kolmion toinen kateetti on sama kuin Maan säde.
- Kolmion terävä kulma α on puolet tangenttikulmasta: $\beta = 2\alpha$.



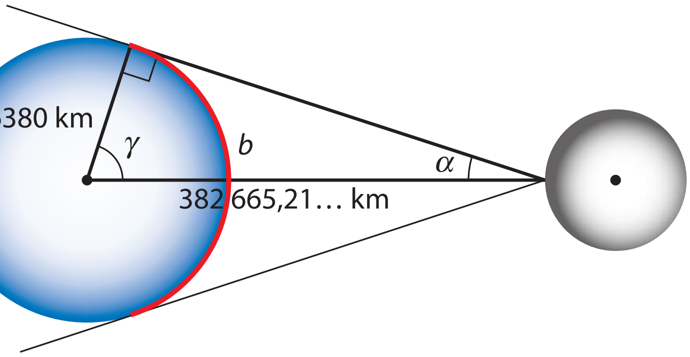
Ratkaistaan kulma α sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{6380}{382\,665{,}21...}$$

$$\alpha = 0{,}9553...°$$

Tangenttikulma $\beta = 2\alpha = 2 \cdot 0{,}9553…° = 1{,}910…° \approx 1{,}91°$.

c) Pituuspiiristä nähdään se osa ympyrän kaarta b, joka jää tangenttisuorien väliin.



- Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma:
  $\gamma = 180° - 90° - 0{,}9553…° = 89{,}0446…°$.
- Kaarta vastaavan keskuskulman suuruus:
  $2 \cdot 89{,}0446…° = 178{,}089…°$.

Lasketaan keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus.

$$b = \frac{178{,}089...°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6380 \text{ km} = 19\,830{,}60... \text{ km} \approx 19\,800 \text{ km}$$

VASTAUS **a)** 7,39 % **b)** 1,91° **c)** 19 800 km

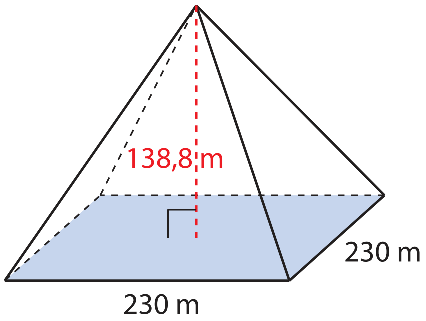
ESIMERKKI 4

Maailman seitsemän ihmettä olivat rakennuksia ja monumentteja, joita antiikin aikaan pidettiin suurina nähtävyyksinä. Kheopsin pyramidi ja Halikarnassoksen mausoleumi olivat kaksi maailman seitsemästä ihmeestä. Kheopsin pyramidin pohjana on neliö, jonka sivun pituus on 230 m. Pyramidin korkeus on nykyisin 138,8 m. Jo tuhoutuneen Halikarnassoksen mausoleumin alaosa oli suora särmiö, jonka pohjana olevan suorakulmion mitat olivat 38 m × 32 m. Särmiön korkeus oli 32,2 m. Särmiön yläpuolella oli pyramidi, jonka pohjana oli yhtä suuri suorakulmio kuin alaosassa. Laske pyramidiosan korkeus, kun Halikarnassoksen mausoleumin tilavuus oli 1,71 % Kheopsin pyramidin tilavuudesta.

RATKAISU

Pyramidin tilavuus:
$$V = \frac{A_p \cdot h}{3}$$

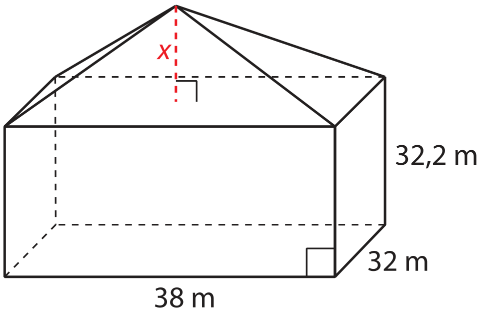
Kheopsin pyramidin tilavuus:



$$V_{\text{Kheops}} = \frac{230\text{ m} \cdot 230\text{ m} \cdot 138{,}8\text{ m}}{3}$$
$$= 2\,447\,506{,}6\ldots\text{ m}^3$$

Mausoleumin alaosa oli suora särmiö.
Lasketaan särmiön tilavuus.

$$V_{\text{alaosa}} = 38\text{ m} \cdot 32\text{ m} \cdot 32{,}2\text{ m} = 39\,155{,}2\text{ m}^3$$



Mausoleumin yläosa oli pyramidi, jonka pohjan pinta-ala on

$$A_p = 38\text{ m} \cdot 32\text{ m} = 1216\text{ m}^2.$$

Merkitään pyramidiosan korkeutta kirjaimella x. Pyramidiosan tilavuus on

$$V_{\text{yläosa}} = \frac{1216 \cdot x}{3}.$$

Mausoleumin kokonaistilavuus saadaan alaosan ja yläosan tilavuuksien summana.

$$V_{\text{Mausoleumi}} = V_{\text{alaosa}} + V_{\text{yläosa}} = 39\,155{,}2\text{ m}^3 + \frac{1216 \cdot x}{3}$$

Mausoleumin tilavuus on 1,71 % Kheopsin pyramidin tilavuudesta.

$$V_{\text{Mausoleumi}} = 0{,}0171 \cdot V_{\text{Kheops}}$$
$$39\,155{,}2 + \frac{1216x}{3} = 0{,}0171 \cdot 2\,447\,506{,}6\ldots$$
$$x = 6{,}654\ldots \approx 6{,}7 \quad (\text{m})$$

VASTAUS Halikarnassoksen pyramidiosan korkeus on noin 6,7 m.

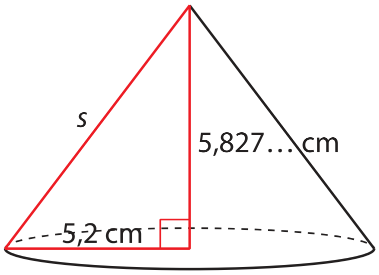
ESIMERKKI 5

Suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on 5,2 cm. Kartion tilavuus on 165 cm^3.

a) Laske kartion vaipan pinta-ala.
b) Laske kartion huippukulman suuruus.
c) Kartion sisälle asetetaan suurin mahdollinen pallo. Laske pallon tilavuus desilitroina.

RATKAISU

a) Vaipan pinta-alan laskemiseen tarvitaan kartion korkeus *h* sekä kartion sivujanan pituus *s*.



Ratkaistaan korkeus *h* tilavuuden avulla.

Ympyräkartion tilavuus:
$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

$$165 = \frac{\pi \cdot 5{,}2^2 \cdot h}{3}$$
$$h = 5{,}827...$$

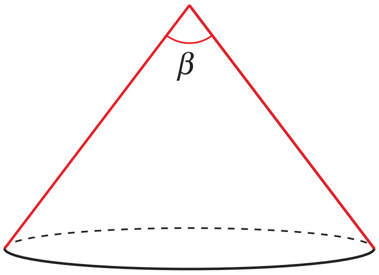
Ratkaistaan sivujanan pituus *s* Pythagoraan lauseella.
$$5{,}2^2 + 5{,}827...^2 = s^2$$
$$s = \pm 7{,}809...$$

Sivujanan pituus aina positiivinen, joten $s = 7{,}809\ldots$ cm.

Ympyräkartion vaipan pinta-ala:
$A = \pi rs$

Lasketaan kartion vaipan pinta-ala.
$$A = \pi \cdot 5{,}2 \text{ cm} \cdot 7{,}809... \text{ cm} = 127{,}584... \text{ cm}^2 \approx 130 \text{ cm}^2$$

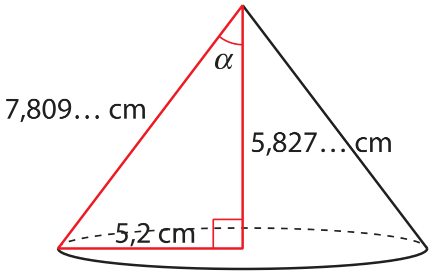
b) Kartion huippukulma on sivujanojen väliin muodostuva kulma. Merkitään huippukulmaa kirjaimella β.



Piirretään kartiolle korkeusjana. Korkeusjana puolittaa huippukulman. Merkitään kartion sisälle muodostuneen suorakulmaisen kolmion toista terävää kulmaa kirjaimella α.
$$\beta = 2\alpha$$

Ratkaistaan kulman α suuruus trigonometristen funktioiden avulla.

Koska suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan kaikkien sivujen pituudet, kulman suuruus voidaan ratkaista minkä tahansa trigonometrisen funktion avulla.

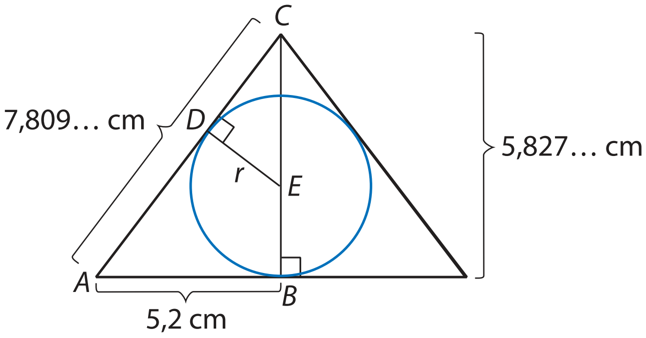


$$\tan\alpha = \frac{5{,}2}{5{,}827...}$$
$$\alpha = 41{,}74...^\circ$$

Huippukulman suuruus:
$$\beta = 2\alpha = 2 \cdot 41{,}74...^\circ = 83{,}49...^\circ \approx 83^\circ$$

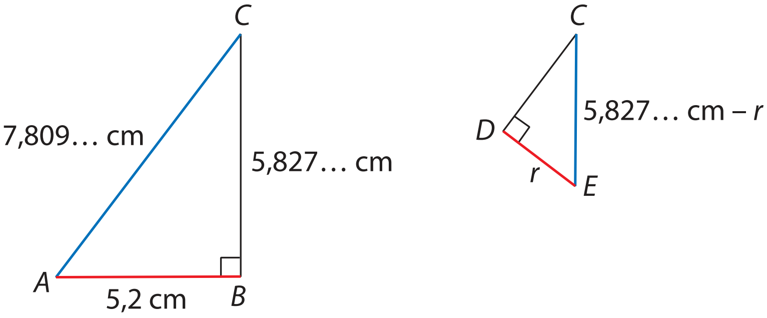
c) Suurin mahdollinen pallo sijaitsee kartion sisällä siten, että pallo sivuaa kartion vaippaa ja pohjaa.

Piirretään mallikuva poikkileikkauksesta. Merkitään pallon sädettä kirjaimella r. Tasakylkisen kolmion sivut ovat ympyrän tangentteja.



Kuvioon muodostuvat kolmiot ABC ja EDC ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa on 90 asteen kulma
- kulma C on yhteinen.



Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r.

$$\frac{5{,}2}{r} = \frac{7{,}809...}{5{,}827... - r}$$

$$r = 2{,}329...$$

Pallon tilavuus:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2{,}329...\ \text{cm})^3 = 52{,}92...\ \text{cm}^3$$

Muutetaan tilavuus desilitroiksi.

$$52{,}92\ldots\ \text{cm}^3 = 0{,}05292\ldots\ \text{dm}^3 = 0{,}05292\ldots\ \text{l} = 0{,}5292\ldots\ \text{dl} \approx 0{,}53\ \text{dl}$$

VASTAUS **a)** 130 cm^2 **b)** 83° **c)** 0,53 dl

Tehtävät

E1 **28.** Kolme suoraa tietä erottavat kartalta suorakulmaisen kolmion muotoisen alueen. Kolmion hypotenuusan pituus on 13,25 cm ja kateettien yhteispituus on 18,25 cm.

a) Laske kartalle muodostuvat kolmion kateettien pituudet.

b) Suorakulmaisen kolmion muotoisen alueen pinta-ala luonnossa on 437,5 a. Laske kartan mittakaava.

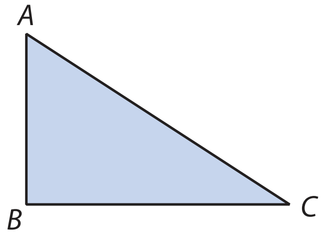
29. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC kateetin AB pituus on 4,4 cm ja hypotenuusan AC pituus 8,1 cm.

a) Laske kateetin BC pituus.

b) Laske kolmion terävien kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.

c) Laske kolmion pinta-ala 0,1 neliösenttimetrin tarkkuudella.

[K2015, 4]



30. Tasakylkisen kolmion kylki on 90 m ja kanta 40 m.

a) Laske kolmion huippukulma asteen tarkkuudella.

b) Laske kolmion pinta-ala neliömetrin tarkkuudella.

[S2013, 3]

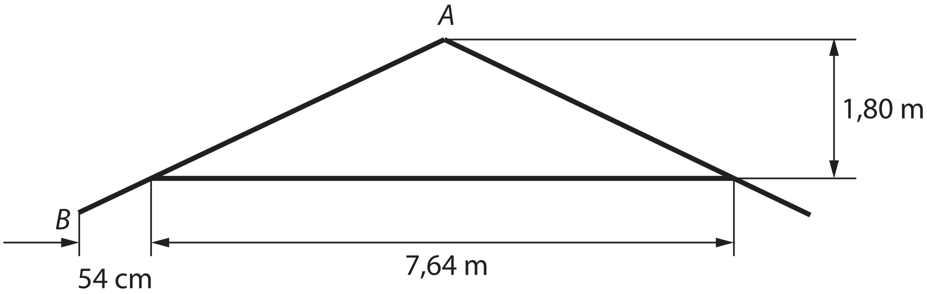
31. Tasakylkisen kolmion kanta sijaitsee x-akselilla. Kannan päätepisteet ovat $(-6, 0)$ ja $(8, 0)$.

a) Laske kolmion korkeusjanan pituus, kun kolmion pinta-ala on 35.

b) Missä koordinaatiston pisteessä kolmion huippu sijaitsee?

32. Omakotitalon räystäskouruja puhdistettaessa käytettiin tikkaita, joiden pituutta voidaan säätää. Kun tikkaat oli asetettu viiden metrin pituisiksi ja sijoitettu pystysuoraa seinää vasten siten, että tikkaiden alapää osui maahan 150 cm:n etäisyydelle seinästä, jäi tikkaiden yläpää tasan metrin liian alas. Kuinka paljon tikkaita tuli pidentää, kun niiden alapään paikkaa ei haluttu muuttaa? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. [S2006, 5]

33. Talon harja on 1,80 metriä korkeammalla kuin sivuseinien yläreunat. Räystään kohtisuora etäisyys seinästä on 54 cm. Päätyseinän pituus on 7,64 m. Talon harja on keskellä kattoa. Määritä lappeen pituus *AB* senttimetrin tarkkuudella. [S2007, 6]



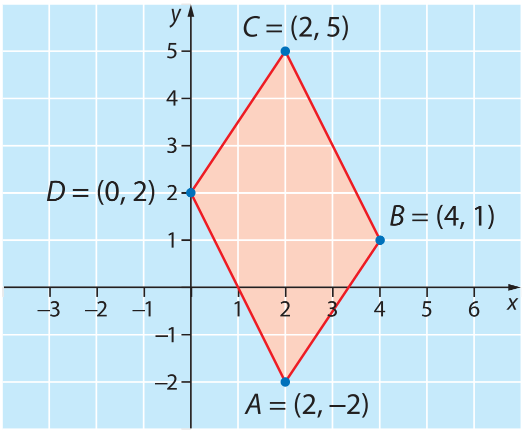
34. Liito-oravan vaakasuora siirtymä suoraviivaisessa liidossa on parhaimmillaan 3,3-kertainen korkeuden vähenemiseen verrattuna.

a) Huippukuntoinen liito-orava aikoo liitää 60 metriä leveän aukion yli. Kuinka korkealta puusta sen täytyy ponnistaa, jotta se laskeutuisi aukion toisella puolella olevaan puuhun yhden metrin korkeudelle? Anna vastaus metrin tarkkuudella.

b) Kuinka suuressa kulmassa vaakatasoon nähden a-kohdan liito-orava liitää? Anna vastaus asteen tarkkuudella. [S2014, 6]

35. Lintubongari tarkkaili lintuja järven rannassa sijaitsevasta lintutornista 5,0 metrin korkeudella maanpinnasta. Vastarannalla 65,0 metrin päässä lintutornista oli 90 cm korkea puupino. Puupinon takana, 3,0 metrin päässä puupinosta, oli linnunpesä 50 cm:n korkeudella maanpinnasta. Näkikö lintubongari tornista linnunpesän?

E2 **36.** Koordinaatistoon on piirretty suunnikas *ABCD*.



a) Laske suunnikkaan erisuuntaisten sivujen pituudet.
b) Laske suunnikkaan kulmien suuruudet.
c) Jana *AD* on suunnikkaan kanta. Laske suunnikkaan korkeus yhden desimaalin tarkkuudella.

37. Suunnikkaan *ABCD* kärkipisteet ovat $A = (1, -2)$, $B = (6, -1)$, $C = (7, 2)$ ja $D = (2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala sekä kulmien suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella. [K2006, 10]

38. Suunnikkaan *ABCD* erisuuntaisten sivujen pituudet ovat $|AD| = 4{,}5$ cm ja $|AB| = 6{,}8$ cm. Suunnikkaan terävän kulman *A* suuruus on 60°.
a) Piirrä mallikuva ja laske suunnikkaan pinta-ala.
b) Suunnikkaan sisälle piirretään tasasivuinen kolmio, jonka yksi sivu on suunnikkaan sivu *AD*. Kuinka monta prosenttia kolmion pinta-ala on suunnikkaan pinta-alasta?

39. Tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituusero on 5,0 cm. Laske puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet, kun puolisuunnikkaan korkeus on 4,0 cm ja pinta-ala on 60,0 cm^2.

40. LED-TV:n suorakulmaisen kuvaruudun leveyden ja korkeuden suhde on 16 : 9. Kuvaruudun lävistäjän pituus on 40 tuumaa; yksi tuuma on 2,54 senttimetriä.
a) Määritä kuvaruudun leveys ja korkeus millimetrin tarkkuudella.
b) Määritä kuvaruudun pinta-ala neliösenttimetrin tarkkuudella.
[K2015, 12]

41. Vuonna 2016 maailman suurin lentokone oli Antonov An-225. Lentokoneen pituus oli 84,0 m. Lentokoneesta rakennettiin pienoismalli mittakaavassa 70 : 3.

a) Laske lentokoneen pienoismallin pituus senttimetrin tarkkuudella.

b) Pienoismallissa siipien kärkiväki oli 3,79 m. Laske oikean lentokoneen siipien kärkiväli.

E3 **42.** Merkuriuksen ympärysmitta on noin 15 300 km.

a) Kuinka monta prosenttia Merkuriuksen pinta-ala on Maan pinta-alasta? Maan säde on 6380 km.

b) Missä kulmassa Merkuriuksen pinnalta näkee Auringon? Auringon säde on 695 700 km. Merkuriuksen ja Auringon keskipisteiden välinen etäisyys on 57 900 000 km.

c) Kuinka pitkän osan Auringon ympärysmitasta voi nähdä Merkuriuksen pinnalta?

43. Ympyrän keskipiste sijaitsee koordinaatiston pisteessä $A(2, 5)$. Pisteet $B(0, 6)$ ja $C(1, 3)$ ovat ympyrän kehällä.

a) Laske ympyrän pinta-alan tarkka arvo.

b) Ympyrän kaaren päätepisteet ovat B ja C. Laske kaarta vastaavan keskuskulman suuruus asteen tarkkuudella, kun keskuskulman suuruus on alle 180°.

c) Jänne BC jakaa ympyrän kahteen segmenttiin. Laske suuremman segmentin pinta-ala. Anna vastaus tarkkana arvona sekä likiarvona yhden desimaalin tarkkuudella.

E4 **44.** Louvren taidemuseon edessä sijaitsevan lasipyramidin korkeus on 21,64 m. Pyramidin pohja on neliö, jonka sivun pituus on 35,42 m. Pyramidin vaippa on valmistettu 673 lasinpalasta. Samasta lasimäärästä valmistetaan suorakulmaisen särmiön muotoinen rakennus, jonka pohja on sama neliö kuin Louvren pyramidin pohja. Pohjaa lukuun ottamatta kaikki särmiön tahkot valmistetaan lasista. Kuinka monta prosenttia särmiön tilavuus on Louvren lasipyramidin tilavuudesta?

45. Ojan poikkileikkaus on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka korkeus on 55 cm. Ojan pohjan leveys on 15 cm.

a) Maanpinnan tasolla leveys on 95 cm. Kuinka monta kuutiometriä maata on poistettu, kun ojan pituus on 104 m?

b) Ojaa levennetään pohjasta. Levennystyössä ojasta poistetaan maata yhteensä 5,0 m^3. Laske ojan pohjan leveys ja ojan reunan kaltevuuskulma vaakatasoon nähden, kun ojan poikkileikkaus on edelleen tasakylkinen puolisuunnikas. Ojan syvyys ja leveys maanpinnan tasolla eivät muutu.

46. Ympyrälieriön muotoiseen purkkiin pakataan kolme palloa. Pallot juuri ja juuri mahtuvat purkkiin.

a) Piirrä mallikuva purkin ja sen sisällä olevien pallojen poikkileikkauksesta purkin pituussuunnassa.

b) Kuinka paljon purkkiin jää tyhjää tilaa, kun yhden pallon säde on 3,80 cm?

c) Purkki päällystetään paperilla. Kuinka paljon paperia kuluu purkin päällystämiseen?

47. Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on yhtä suuri kuin kuution särmän pituus. Kartion sivujana on kolmasosan lyhyempi kuin kuution korkeus. Kuinka monta prosenttia kartion pinta-ala on kuution pinta-alaa pienempi? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

E5 **48.** Suoran ympyräkartion korkeus on 7,4 cm. Kartion tilavuus on 234 cm^3.

a) Laske kartion kokonaispinta-ala.

b) Laske kartion pohjan ja sivusärmän välisen kulman suuruus.

c) Kartion sisälle asetetaan suurin mahdollinen pallo. Laske pallon tilavuus senttilitroina.

49. Neliöpohjaisen suoran pyramidin pohjasärmän pituus on 12,4 cm ja sivusärmän pituus 14,5 cm.

a) Laske pyramidin vaipan pinta-ala.

b) Pyramidin sisälle asetetaan pallo niin, että pallo sivuaa kaikkia pyramidin tahkoja. Laske pallon pinta-ala, kun pyramidin korkeus on 11,5 cm.

5.3 Monivalintatehtävät

Monivalintatehtävät 1–19 on tarkoitus ratkaista ilman teknistä apuvälinettä. Tehtävissä 20–38 voit käyttää teknistä apuvälinettä.

Vastausvaihtoehdoista vain yksi on oikein. Monivalintatehtävät on tarkoitettu nopeaan kertaamiseen. Niiden avulla on helppo huomata, jos kirjan jokin osa-alue vaatii vielä lisää harjoittelua.

1. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 42°. Kantakulma on tällöin

- **a)** 138°
- **b)** 69°
- **c)** 48°.

2. Suorakulmaisen kolmion terävistä kulmista toinen on 25° suurempi kuin toinen. Suurempi kulma on tällöin

- **a)** 57,5°
- **b)** 65°
- **c)** 45,5°.

3. Suunnikkaan terävä kulma on 38°. Tylppä kulma on siis

- **a)** 284°
- **b)** 142°
- **c)** 112°.

4. Suorakulmion kannan ja korkeuden suhde on 1 : 4. Mitkä ovat näiden sivujen pituudet, kun suorakulmion piiri on 90 cm?

- **a)** 9 cm ja 36 cm
- **b)** 7 cm ja 28 cm
- **c)** 10 cm ja 40 cm

5. Ympyrän pinta-ala on 36. Mikä on ympyrän säteen tarkka arvo?

- **a)** $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$
- **b)** $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$
- **c)** $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$

6. Ympyräsektorin keskuskulma on 30°. Mikä on tämän sektorin kaaren pituus, kun ympyrän halkaisija on 20?

- **a)** $\frac{10\pi}{3}$
- **b)** $\frac{5\pi}{3}$
- **c)** $\frac{2\pi}{3}$

7. Kolmio on suorakulmainen, jos sen sivujen pituudet ovat

- **a)** $\sqrt{3}$, 2 ja $\sqrt{5}$
- **b)** 2, $\sqrt{5}$ ja 7
- **c)** $\sqrt{3}$, 2 ja $\sqrt{7}$.

8. Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala on 27π. Mikä on kartion sivujanan pituus, kun pohjaympyrän säde on 9?

a) 6
b) 3π
c) 3

9. Pallon pinta-ala on 64π. Pallon säde on tällöin

a) 4
b) 8
c) 16.

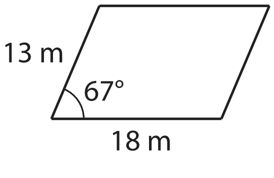
10. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 8 ja lyhyemmän kateetin pituus 3. Mikä on pidemmän kateetin pituus?

a) $\sqrt{55}$
b) $\sqrt{61}$
c) $5\sqrt{11}$

11. Suorakulmaisessa kolmiossa kulman β viereisen sivun pituus on 2 ja hypotenuusan pituus on 5. Mikä on suhteen $\sin \beta$ tarkka arvo?

a) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
c) $\frac{\sqrt{21}}{5}$

12. Mikä on suunnikkaan korkeus?



a) $18\text{ m} \cdot \cos 67°$
b) $13\text{ m} \cdot \sin 67°$
c) 13 m

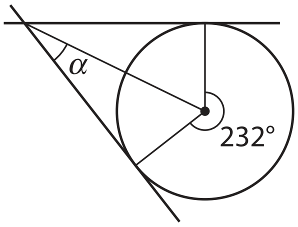
13. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 10. Mikä on kolmion korkeus?

a) $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
b) $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
c) $10 \cdot \sin 30°$

14. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys on 4 cm. Yhdensuuntaisista sivuista lyhyemmän pituus on 5 cm. Mikä on pidemmän sivun pituus, kun puolisuunnikkaan pinta-ala on 28 cm^2?

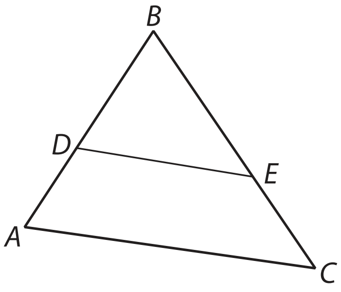
a) 14 cm
b) 9 cm
c) 7 cm

15. Kuinka suuri on kulma α?



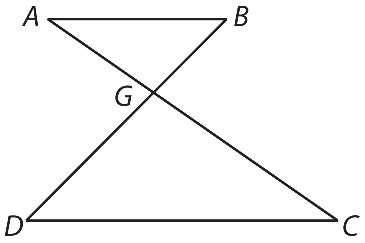
a) 26°
b) 64°
c) 32°

16. Kolmiossa *ABC* janat *AC* ja *DE* ovat yhdensuuntaiset. Janan *AC* pituus on 12,0 cm. Janan *AD* pituus on 4,0 cm ja janan *DB* pituus on 6,0 cm. Laske janan *DE* pituus.



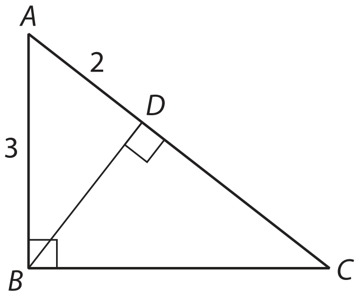
a) 10 cm
b) 8,0 cm
c) 7,2 cm

17. Janan *AB* pituus on 2,0 m ja kolmion *ABG* korkeus on 1,0 m. Laske kolmion *CDG* pinta-ala, kun janat *AB* ja *DC* ovat yhdensuuntaiset ja janan *DC* pituus on 3,0 m.



a) 2,25 m^2
b) 4,5 m^2
c) 2,0 m^2

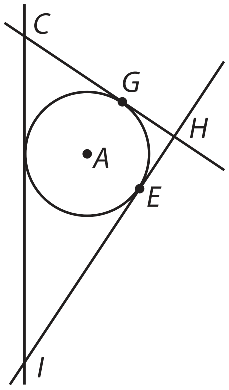
18. Määritä suorakulmaisen kolmion *BCD* pidemmän kateetin *CD* pituus.



a) $\sqrt{5}$
b) 5
c) 2,5

19. Suorakulmaisen kolmion *CHI* kaikki sivut ovat ympyrän tangentteja. Kateetit *CH* ja *HI* sivuavat ympyrää pisteissä *G* ja *E*. Kuinka suuri on ympyrän säde, kun janan *CG* pituus on 2, janan *EI* pituus on 3 ja hypotenuusan *CI* pituus on 5?

a) 1
b) 2
c) 3

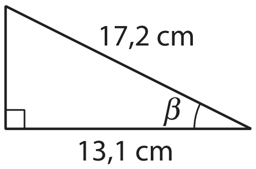


20. Suorakulmaisen kolmion kateettien suhde on 3 : 4. Mitkä ovat kateettien pituudet, kun hypotenuusan pituus on 10 m?

a) 3 m ja 4 m
b) 4 m ja 7 m
c) 6 m ja 8 m

---

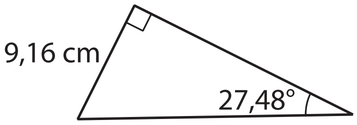
21. Kuinka suuri on kulma β?



a) 49,6°
b) 40,4°
c) 37,3°

22. Mikä on hypotenuusan pituus?

a) 19,9 cm
b) 10,3 cm
c) 17,6 cm



23. Ympyräsektorin kaaren pituus on 75,2 mm ja ympyrän säde on 15,0 mm. Kuinka suuri on tämän sektorin keskuskulma asteen tarkkuudella?

a) 73°
b) 163°
c) 287°

24. Suorakulmion mitat ovat 11,5 cm ja 15,5 cm. Kuinka suuren kulman suorakulmion lävistäjä muodostaa lyhyemmän sivun kanssa?

a) 47,9°
b) 36,6°
c) 53,4°

25. Suoran ympyräkartion sivujanan pituus on kaksi kertaa niin suuri kuin pohjaympyrän säteen pituus. Mikä on säteen pituus, kun kartion vaipan ala on 319 cm^2?

a) 7,13 cm
b) 10,1 cm
c) 12,6 cm

26. Suoran särmiön pohja on neliö, jonka sivun pituus on 5,3 cm. Särmiön korkeus on 9,4 cm. Kuinka suuren kulman pohjan lävistäjä muodostaa avaruuslävistäjän kanssa?

a) 39°
b) 51°
c) 32°

27. Suoran pyramidin pohja on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 3,10 dm. Mikä on pyramidin tilavuus, kun sen korkeus on 4,9 dm?

a) 6,8 dm^3
b) 20,4 dm^3
c) 7,8 dm^3

28. Suoran ympyräkartion sisällä on suurin mahdollinen pallo. Kartion korkeus on 12 cm ja pohjaympyrän säde on 4,2 cm. Mikä on pallon säde?

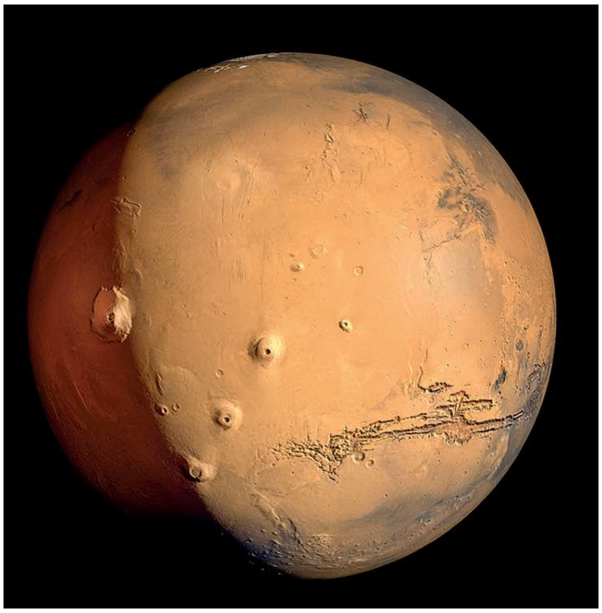
a) 3,9 cm
b) 3,6 cm
c) 3,0 cm

29. Kuumailmapallossa oleva henkilö katsoo kiikarilla merelle. Kuinka kauas hän voi kiikarillaan nähdä, kun kuumailmapallo on 2755 m:n korkeudessa? Maapallon säde on 6370 km.

a) 187,3 km:n päähän
b) 187,4 km:n päähän
c) 9820 km:n päähän

30. Mars-planeetan kiertorata Auringon ympäri on likimain ympyrän muotoinen. Kiertoaika Auringon ympäri on 686,96 d ja kiertonopeus 24,077 km/s. Mikä on planeetan etäisyys Auringon pinnasta, kun Auringon säde on 696 000 km?

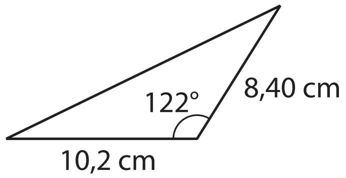
a) 454 000 000 km
b) 453 000 000 km
c) 227 000 000 km



31. Suorakulmaisen kolmion kateettien suhde on 2 : 5. Kolmion pienin kulma asteen tarkkuudella on siis

a) 22°
b) 24°
c) 68°.

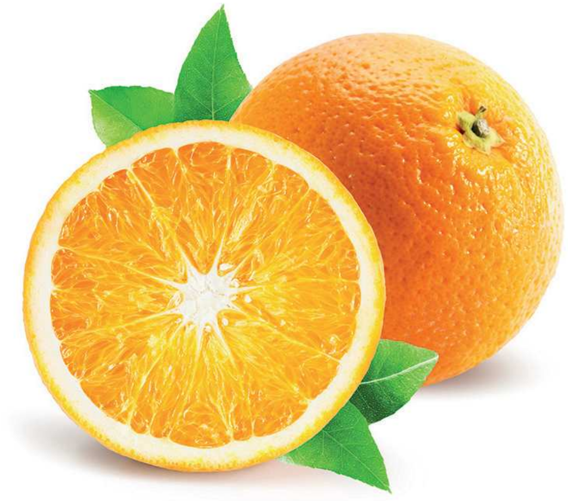
32. Mikä on kolmion pinta-ala?



a) 72,6 cm^2
b) 42,8 cm^2
c) 36,3 cm^2

33. Appelsiinin kuoren paksuus on 2,1 mm. Kuoren pinta-ala on 265,9 cm^2. Mikä on kuoritun appelsiinin halkaisija?

- **a)** 5,0 cm
- **b)** 90 mm
- **c)** 88 mm



34. Kuution avaruuslävistäjän pituus on 5,89 cm. Kuution tilavuus on siis

- **a)** 204 cm^3
- **b)** 14,3 cm^3
- **c)** 39,3 cm^3.

35. Kuution sisällä on suurin mahdollinen ympyrälieriö. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kuution tilavuudesta?

- **a)** 79 %
- **b)** 50 %
- **c)** 27 %

36. Kartan mittakaava on 1 : 400 000. Kuinka monta senttimetriä 4,20 km:n pituinen juoksurata on kartalla?

- **a)** 2,10 cm
- **b)** 1,05 cm
- **c)** 1,35 cm

37. Teltta on pystytetty käyttäen apuna puoliympyrän muotoisia, ristikkäin asetettuja, kaaria. Yhden kaaren pituus on 3,8 m. Mikä on teltan tilavuus, kun pystytettynä teltta on puolipallon muotoinen?

- **a)** 7,4 m^3
- **b)** 3,7 m^3
- **c)** 0,93 m^3

38. Suoran pyramidin pohja on neliö, jonka sivun pituus on 25 cm. Pyramidin korkeus on 18 cm. Pyramidin sivutahkona on tasakylkinen kolmio. Kuinka suuri on tämän kolmion korkeusjanan ja pohjan välinen kulma?

- **a)** 55°
- **b)** 44°
- **c)** 35°

39. Kolmion kylkien pituudet ovat 5,0 cm ja 6,0 cm. Huipusta piirretty korkeusjana jakaa kannan suhteessa 4 : 5. Laske korkeusjanan pituus.

- **a)** 1,1 cm
- **b)** 2,3 cm
- **c)** 5,4 cm

Vastaukset

1.1 Monikulmioita

1. a) 65° b) 115°
c) 70° d) 55°

2. $\alpha = 70^\circ$ ja $\beta = 20^\circ$

3. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ ja $\gamma = 60^\circ$
b) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$ ja $\gamma = 150^\circ$

4. a) 50°, 50° ja 80°
b) 20° ja 70°

5. a) 12 cm, 16 cm ja 20 cm
b) 96 cm^2

6. a) 5 cm ja 12 cm
b) 1,0 cm ja 8,0 cm

7. a) 5 cm, 5 cm ja 8 cm
b) 12 cm

8. 108 cm^2

9. 24 cm

10. a) 100°, 100°, 80° ja 80°
b) 80° ja 100°

11. 5 cm

12. 2 cm ja 6 cm

13. –

14. –

15. –

16. –

17. –

18. a) 5,4 % b) 4,0 m

19. 1739 €

20. a) 4 kertaa b) 240 kg

21. $\alpha = 71^\circ$ ja $\beta = 109^\circ$

22. a) 20 cm, 20 cm ja 24 cm
b) 16 cm

23. 2 cm ja 10 cm

24. –

25. Maaleihin kuluu rahaa 476,10 € (purkkeja on ostettava yhdeksän, koska vajaata purkkia ei voi ostaa).

Ympyrä

26. a) 8π b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $2\pi^2$

27. a) 49π b) $\dfrac{\pi}{25}$ c) $\dfrac{\pi^3}{16}$

28. a) $p = 20\pi$ ja $A = 100\pi$
b) $d = \dfrac{12}{\sqrt{\pi}}$

29. –

30. –

31. –

32. a) 82,9 cm b) 547 cm^2

33. a) 22 cm^2 b) 134 mm^2

34. $p = 15$ cm ja $A = 16\ \text{cm}^2$

35. a) 410,9 cm b) 13 440 cm^2

36. a) 24 cm b) 450 cm^2

37. 7850 cm^2

38. 8,0 cm

39. a) 17 cm b) 4,01 m

40. 28,3 m

41. 3,0 km

42. a) 21,5 % pienempi
b) 27,3 % suurempi

43. –

44. –

45. –

46. a) 3,6 cm ja 5,2 cm^2
b) 8,14 m ja 6,31 m^2

47. a) 63 cm^2 b) 7,4 cm

48. a) 380 cm^2 b) 31 cm

49. 48 cm^2

50. 988 cm^2

51. 9,5 cm^2

52. 207 m^2

53. 15 dm^2

54. 47 cm

55. 27 % suurempi

56. Halkaisija on 26,0 cm, ja ympärysmitta on 81,7 cm.

57. 17 cm^2

58. 32,5 m

59. 120 mm

Avaruuskappaleita

60. 2,0 cm

61. 1,0 cm × 1,0 cm × 2,0 cm

62. –

63. –

64. –

65. a) 180 cm^2
b) 7300 $\text{cm}^2 = 0{,}73\ \text{m}^2$
c) 15 000 $\text{cm}^2 = 1{,}5\ \text{m}^2$
d) 2800 $\text{cm}^2 = 28\ \text{dm}^2$

66. 32 m^2

67. a) 660 cm^2
b) 15 000 $\text{cm}^2 = 1{,}5\ \text{m}^2$

68. 1220 cm^2

69. a) 1020 cm^2 b) 21,3 cm

70. a) 1,1 dm
b) 4,0 cm × 20,0 cm × 30,0 cm

71. 16 cm

72. 10 cm

73. 42 cm

74. sivujanan pituus 2,10 dm ja pohjaympyrän säde 1,05 dm

75. a) 170 cm^3
b) 12 000 $\text{cm}^3 = 12\ \text{dm}^3$
c) 490 cm^3
d) 6500 $\text{cm}^3 = 6{,}5\ \text{dm}^3$

76. a) 1,3 l b) 2,1 l

77. 22 g

78. 2,0 %

79. 118 cm^2

80. 117 litraa

81. 600 000 litraa

82. 20,2 %

83. 2200 $\text{cm}^3 = 2{,}2\ \text{dm}^3$

84. 34 g

85. 2,0 g

86. 3,3 cm × 6,3 cm

87. 6,7 cm

88. 8,29 cm

89. 67 %

90. 166 litraa

91. 245 m^2

92. 2340 kg

93. **a)** pinta-ala välillä 14,7 dm^2 – 15,6 dm^2 ja tilavuus välillä 5,31 dm^3 – 5,79 dm^3
b) 9,1 %

94. 31 mm

95. 4,7 cm

96. 1,8 dl

2.1 Suorakulmaisen kolmion geometriaa

97. **a)** $x = 8$ **b)** $x = \sqrt{15}$

98. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{10}$

99. **a)** $x = 8$ **b)** $x = \sqrt{3}$

100. $a = 7$

101. 5

102. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

103. Koska $3^2 = (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2$, kolmio on suorakulmainen.

104. **a)** On, koska $10^2 = 6^2 + 8^2$.
b) Ei, koska $5^2 \neq 2^2 + 1^2$.

105. 1 ja 4

106. 6 ja 8

107. **a)** 266 m **b)** 4,4 m

108. $p \approx 8{,}4$ m ja $A \approx 3{,}0\ \text{m}^2$

109. 157 mm yläreunasta

110. 1,9 m ja 4,1 m

111. Kone, joka lentää suoraan kaupungista A kaupunkiin C, saapuu 7,7 min aikaisemmin.

112. **a)** 1070 m **b)** 330 m

113. **a)** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\alpha = 2$
b) $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

114. $\sin\alpha = \dfrac{5}{7}$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{24}}{7}$, $\tan\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{24}}$

115. 10 ja $3\sqrt{10}$

116. **a)** 7,4 cm **b)** 47°

117. **a)** 65 cm ja 21 cm
b) 680 cm^2

118. 25,9° ja 64,1°

119. 4,6 cm ja 4,9 cm

120. **a)** 720 m **b)** 970 m
c) 1700 m

121. 3,7 m

122. **a)** 57,0 m **b)** 43,1°

123. 36 m

124. 4,40°

125. 8 min 49 s

126. 1,9 km

127. 30 m

128. **a)** 300 m **b)** 72 m

129. **a)** $x \approx 15{,}6$ (m)
b) $x \approx 22$ (cm)
c) $x \approx 5{,}3$ (cm)

130. **a)** 7,4 cm **b)** 59° ja 31°
c) 17 cm^2

131. 51 m

132. **a)** 1,3 km **b)** 25°

133. 60 cm ja 80 cm

Suorakulmainen kolmio ja monikulmiot

134. **a)** 4,0 cm **b)** 12 cm^2

135. 48 cm^2

136. 24 cm

137. **a)** 3,4 cm **b)** 7,5 mm

138. 25,6 cm^2

139. **a)** 3,52 m^2 **b)** 4,19 cm^2
c) 4,9 m^2 **d)** 7,2 cm^2

140. **a)** 78° **b)** 81,1°

141. 19,5 % (20 %)

142. 6,93 cm^2

143. **a)** 17 cm^2
b) 69°, 69° ja 42°

144. 56,84 m

145. 23 cm

146. 15,5 cm

147. 35,4 %

148. **a)** 2,0 m
b) 73°, 73°, 107° ja 107°

149. 4300 $\text{cm}^2 = 43\ \text{dm}^2$

150. 684 cm^2

151. **a)** 0,34 cm **b)** 2,0 cm^2
c) 73 %

152. 39°, 60° ja 81°

153. 569 cm^2

154. **a)** 310 cm^2 **b)** 72 cm
c) 24°

155. **a)** 8,0 m^2 **b)** 80,6 cm^2

156. 25,1 cm

157. 39,5°

158. 4,4 m^2

159. 5,7 cm^2

Ympyrän sekantti ja tangentti

160. –

161. 17,8 mm

162. **a)** 19 cm **b)** 35 cm^2

163. 340 cm^2

164. **a)** 82° **b)** 148 cm

165. 1210 m

166. 69 cm

167. 1560 m

168. 4,5 %

169. 26,3 %

170. 110 cm^2

171. 329 cm^2

172. –

173. –

174. **a)** $\alpha \approx 133°$ (130°)
b) $|OC| \approx 298$ mm

175. **a)** 219 mm **b)** 119 mm

176. 30°

177. 1,7 m

178. 31°

179. 21°

180. 25,5 km

181. 4,3 %

182. **a)** 39 cm **b)** 34 cm

183. vähintään 138 metrin korkeudelta

184. **a)** 147° **b)** 210 cm
c) 206 cm **d)** 276 cm

185. **a)** 18,3 cm **b)** 501 cm^2

186. 940 metrin korkeuteen

187. 11 cm^2

188. 183 cm

2.4 Avaruusgeometriaa

189. **a)** 11 cm **b)** 14,1 cm

190. **a)** 7,8 dm **b)** 5,2 dm

191. **a)** 53° **b)** 61°

192. **a)** 4,8 dm **b)** 1,52 m

193. **a)** 6,79 dm **b)** 9,23 dm
c) 42,6°

194. 35,3°

195. $\beta \approx 13{,}3°$

196. 7,5 m^2

197. 150 cm^2

198. **a)** 3,20 dm **b)** 45,1°

199. 37 m^2

200. $A \approx 33{,}8$ ja $V \approx 20{,}9$

201. **a)** 4,1 kg **b)** 34 g

202. 0,77 kg = 770 g

203. 1500 g

204. 15,3 litraa

205. 1,2 %

206. **a)** $x \approx 110$ cm,
$\alpha \approx 38°$ ja $\beta \approx 52°$
b) $x \approx 1{,}4$ m,
$\alpha \approx 71°$ ja $\beta \approx 76°$

207. **a)** 1981 m^2 **b)** 40,83°
c) 9050 m^3

208. Suurin mahdollinen korkeus on 13,4 cm, jolloin palkin tilavuus on 40,2 dm^3.

209. 6,1 dl

210. $V \approx 334$ cm^3, $A \approx 208$ cm^2

2.5 Geometriaa koordinaatistossa

211. **a)** (6, –3) **b)** (–3, –7)
c) (7, 3) **d)** (–3, 3)

212. **a)** 4 **b)** 5
c) $\sqrt{41}$ **d)** 10

213. **a)** $A = 25\pi$
b) sisäpuolella

214. **a)** $C(5, 1)$ **b)** $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
c) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

215. **a)** $D(-4, 5)$
b) $\sqrt{113}$ ja $\sqrt{53}$ **c)** $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

216. **a)** – **b)** (3, 4)
c) $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ **d)** 16

217. $A(3, 0)$ ja $B(9, 0)$

218. 7

219. 22

220. 1800 a

221. **a)** (–1, 6), (4, 6), (4, –2) ja (–1, –2)
b) 62,5 %

222. 4,7 dl

223. **a)** 622 cm^2 **b)** 2,8 l

224. Kartion K_1 tilavuus on 120 % suurempi kuin kartion K_2.

225. 14° ja 76°

226. **a)** 63° ja 63° **b)** 160

227. 68°

228. **a)** (–2, 1) **b)** $A = 13\pi$
c) 90°

229. **a)** keskipiste $\left(6\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ ja säde $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
b) sisäpuolella **c)** 80°

230. **a)** $B(1, -4)$ **b)** $C(2, 3)$
c) $A = 25$

231. **a)** (5, –6) **b)** $\sqrt{130}$ **c)** 63

232. **a)** – **b)** 16π

233. **a)** $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$ **b)** $A = \frac{45\pi}{4}$

234. **a)** 104,5°, 48,1° ja 27,4°
b) $A = 29{,}0$

235. **a)** $\sqrt{13}$ **b)** on
c) (–4, –6) **d)** kyllä

3.1 Kuvioiden yhdenmuotoisuus

236. **a)** 36 cm **b)** 4 cm

237. –

238. **a)** 20 cm **b)** 6 m

239. 4 cm

240. **a)** – **b)** sivu *CB*
c) 44 cm

241. 22,8 m

242. 60 m

243. Eivät ole.

244. 22 cm

245. Joona näkee Millan.

246. 160 m

247. 21°

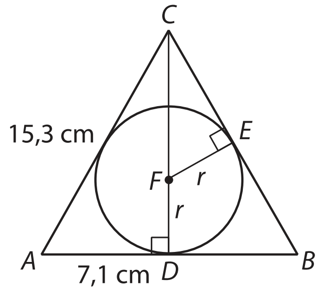
248. 220 m

249. 5,9 ha

250. 37 %

251. $\frac{3}{2}$

252. **a)**



b) 13,6 cm **c)** 4,30 cm

253. 8,0 m

254. 37,5 %

255. **a)** 20 cm **b)** 6,0 m

256. 2,3 m

257. 12 cm

258. hypotenuusan pituus 6,5 cm,
kärjen etäisyys 2,8 cm

259. 47 %

3.2 Yhdenmuotoisuussuhde

260. **a)** 350 m **b)** 102 m
c) 5700 m

261. **a)** 4,0 m × 6,0 m **b)** 1440 €

262. **a)** 4 cm **b)** 7,5 mm

263. **a)** 1 : 25 000 **b)** 1 : 200 000
c) 1 : 30 000

264. **a)** 4-kertainen
b) 9-kertainen

265. **a)** suurennos **b)** 18 cm^2

266. pituus 26,8 cm,
siipien kärkiväli 25,9 cm

267. **a)** 7,0 cm **b)** 1 : 25 000

268. **a)** 1 : 3 000 000
b) 1260 km

269. 1 h 4 min

270. **a)** 370 km^2 **b)** 1 : 250 000

271. **a)** 2,1 cm **b)** 0,36 cm^2

272. **a)** 1 : 3750 **b)** 52 a

273. 22,8 m^2

274. 460 m^2

275. 20 cm^2

276. 1 : 28 300

277. **a)** 10 m **b)** 150 000 €

278. **a)** 6 : 5 **b)** 2 : 1

279. 19,3 cm ja 12,8 cm

280. **a)** 7,28 cm^2 **b)** 0,10 cm^2

281. 9,5 m × 6,8 m

Yksikkömuunnokset

282.

mm	cm	dm	m	km
570 000	57 000	5700	570	0,57
32 000	3200	320	32	0,032
6,3 · 10^4	6300	630	63	0,063
2,5 · 10^6	250 000	25 000	2500	2,5

283. **a)** 4800 mm **b)** 24 km

284.

mm^2	cm^2	dm^2	m^2	a
5,7 · 10^8	5,7 · 10^6	57 000	570	5,7
320 000	3200	32	0,32	0,0032
6,3 · 10^4	630	6,3	0,063	0,00063
2,5 · 10^8	2,5 · 10^6	25 000	250	2,5

285. **a)** 520 000 mm^2
b) 3 700 000 cm^2
c) 0, 3051 m^2
d) 0, 901 ha

286.

mm^3	cm^3	dm^3	m^3	dl
4,2 · 10^9	4,2 · 10^6	4200	4,2	42 000
8,5 · 10^7	85 000	85	0,085	850
3,7 · 10^9	3,7 · 10^6	3,7 · 10^3	3,7	37 000
6,4 · 10^6	6400	6,4	0,0064	64

287.

ml	cl	dl	l	cm^3
6800	680	68	6,8	6800
5600	560	56	5,6	5600
1,3 · 10^4	1300	130	13	1,3 · 10^4
720	72	7,2	0,72	720

288. **a)** 8,1 · 10^5 cm^3
b) 105 cl
c) 90 530 cm^3
d) 2800 ml

289. **a)** 0,05402 km
b) 8,7 · 10^5 cm^2
c) 0,741 l
d) 93 000 mm^3

290. **a)** 5,6 · 10^4 m^2
b) 7010 m^3
c) 0,35 ha
d) 6150 ml

291. **a)** 335 s **b)** 3,75 min
c) 108 s **d)** 3,4 min

292. **a)** 9,7 min **b)** 7,1 min
c) 977 s **d)** 363 s

293. **a)** 5 min 15 s
b) 4 min 54 s
c) 12 min 18 s
d) 7 min 27 s

Erilaisia kulmia

294. **a)** $\alpha = 129°$, $\beta = 180°$
b) $\alpha = 38°$, $\beta = 142°$

295. **a)** $\alpha = 30°$, $\beta = 80°$,
$\gamma = 150°$
b) $\alpha = 60°$, $\beta = 70°$,
$\gamma = 120°$

296. **a)** $x = 132°$, $y = 48°$
b) $x = 25°$, $y = 27°$

297. $\alpha = 97°$

298. **a)** Eivät ole. **b)** Ovat.

299. **a)** $\alpha = 65°$, $\beta = 70°$
b) $\alpha = 65°$, $\beta = 55°$

300. **a)** $\alpha = 37°$ **b)** 75°

301. $\alpha = 140°$, $\beta = 65°$

Säännölliset monikulmiot

302. **a)** 720° **b)** 1080°

303. **a)** 30° **b)** 36° **c)** 45°

304. **a)** $\alpha = 144°$, $\beta = 144°$
b) 190 cm^2

305. Piiri on 6,24289… r.
Luvun π likiarvossa on
kaksi oikeaa numeroa.

306. 4,0 m

307. 15 ha

4.4 Maapallo

308. a) $\frac{1519}{30}^\circ \approx 50{,}63^\circ$
b) $\frac{173}{4}^\circ = 43{,}25^\circ$
c) $\frac{4523}{60}^\circ \approx 75{,}38^\circ$

309. a) $15^\circ\ 37'$ b) $35^\circ\ 52'$
c) $26^\circ\ 5'$

310. a) 4760 km b) $10{,}2^\circ$ N

311. 2572 km

312. a) 5796 km b) $5^\circ\ 53'$ N

313. a) 789 km b) $70^\circ\ 25'$ W

314. 7240 km

315. a) 7985 km b) $177^\circ\ 55'$ W

Yhdenmuotoiset kappaleet

316. a) 3 : 4 b) 4 : 5 c) 7 : 5

317. 26 cm

318. a) 427 l
b) mittakaava 1 : 2,
pinta-ala 4-kertainen

319. 32 cm

320. leveys 43,1 cm,
pituus 21,5 cm,
korkeus 64,6 cm

321. 0,219 dl

322. 25 %

Kurssin keskeiset asiat

1. a) 6 cm ja 8 cm
b) 64 cm^3

2. a) 5 cm b) 80 cm^2

3. a) – b) 1

4. a) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$
b) 1
c) $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\tan\beta = \frac{3}{2}$
d) 6 cm
e) 12 cm^2

5. $\alpha = 57^\circ$ ja $\beta = 246^\circ$

6. a) $\frac{1}{4}$ b) 4 cm

7. a) $h = b \cdot \sin\alpha$
b) $A = \frac{ab\sin\alpha}{2}$

8. lyhyempi kateetti 2,
hypotenuusa 6

9. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$
c) $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

10. a) 1,2 m b) 12,8 c) $\frac{9}{64}$

11. a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{3}$

12. a) $\frac{7}{8}a^3$ b) $\frac{9}{2}a^2$

13. a) $\alpha = 40^\circ$ ja $\beta = 50^\circ$,
$\alpha + \beta = 90^\circ$
b) $\alpha + \beta = 90^\circ$

14. 4 cm^2

15. –

16. a) $h = 2$ b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{4}{3}$ d) $\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
e) 6

17. a) 2 b) 48π

18. a) $12 - 3\pi$ b) $\frac{4-\pi}{4}$

19. $3\sqrt{3}$

20. a) 60° b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

21. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$

22. a) $D(-1, 4)$
b) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
c) $|AB| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
d) $A = 6$

23. a) (0, 4) ja (0, 0)
b) $A(4, 2)$

24. 1 : 6

25. Säde on 3.

26. 2 : 1

27. a) $x = 2r$
b) $y = 2r\sqrt{\frac{3}{4}} = r\sqrt{3}$
c) $A = 3\sqrt{\frac{3}{4}}r^2 - \frac{\pi}{4}r^2$
$= r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Matemaattisia malleja

28. a) 7,00 cm ja 11,25 cm
b) 3 : 10 000

29. a) 6,8 cm
b) $32{,}9^\circ$ ja $57{,}1^\circ$
c) 15,0 cm^2

30. a) 26° b) 1755 m^2

31. a) 5 b) (1, 5) ja (1, –5)

32. 96 cm

33. 482 cm

34. a) 19 m b) 17°

35. Ei näe.

36. a) $\sqrt{13}$ ja $2\sqrt{5}$
b) 60° ja 120°
c) 3,1

37. pinta-ala 14,
kulmien suuruudet
$60{,}3^\circ$ ja $119{,}7^\circ$

38. a) 27 cm^2 b) 33 %

39. 12,5 cm ja 17,5 cm

40. a) korkeus 49,8 cm,
leveys 88,6 cm
b) 4411 cm^2

41. a) 360 cm b) 88,4 m

42. a) 14,6 % b) $1{,}38^\circ$
c) 2 170 000 km

43. a) 5π
b) 90°
c) $\frac{15\pi}{4} + \frac{5}{2} \approx 14{,}3$

44. 71 %

45. a) 31 m^3
b) pohjan leveys 32 cm,
kaltevuuskulma 60°

46. **a)** –
b) 345 cm^3 **c)** 635 cm^2

47. 69,5 %

48. **a)** 250 cm^2 **b)** 53°
c) 88 cl

49. **a)** 325 cm^2 **b)** 171 cm^2

5.3 Monivalintatehtävät

1. b
2. a
3. b
4. a
5. c
6. b
7. c
8. c
9. a
10. a
11. c
12. b
13. a
14. b
15. a
16. c
17. a
18. c
19. a
20. c
21. b
22. a
23. c
24. c
25. a
26. b
27. a
28. c
29. a
30. c
31. a
32. c
33. c
34. c
35. a
36. b
37. b
38. a
39. b

Hakemisto

A
avaruuslävistäjä 108

H
halkaisija 23, 39
huippu 9, 37
huippukulma 10
hypotenuusa 10

J
janan pituus 121
jänne 39, 91

K
kaari 27
kanta 9
kantakulma 10
kartio 37
kateetti 10
kehä 23
kehäpiste 97
keskuskulma 27
kk-lause 140
kolmion kulmien summa 9
kolmion pinta-ala 9
korkeusjana 9
kosini 65
kulmanpuolittaja 98
kylki 10

L
leveyspiirit 176
lieriö 37

M
mittakaava 150
monikulmion kulmien summa 171

N
neliö 13
neljäkäs 13

P
pallo 39
pii (π) 23
pituuspiirit 175
pohja 37
puolisuunnikas 13
pyramidi 38
Pythagoraan lause 59

R
ristikulmat 166

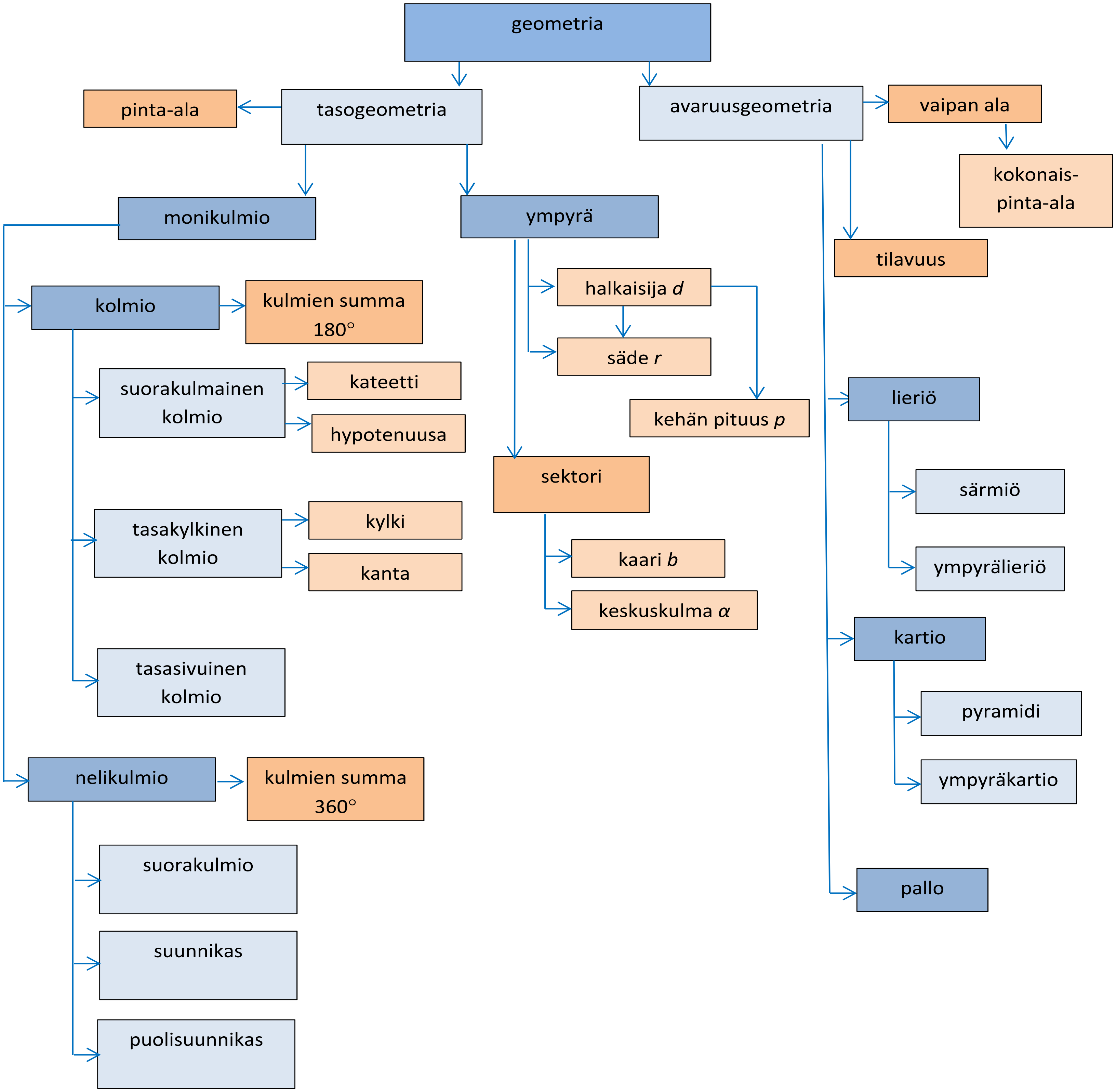
S
samankohtaiset kulmat 166
segmentti 91
sekantti 91
sektori 27
sini 65
sivujana 37
suora kartio 37
suora lieriö 37
suorakulmainen kolmio 10
suorakulmainen särmiö 38
suorakulmio 13
suunnikas 13
säde 23, 39
särmiö 38
särmä 40
säännöllinen monikulmio 171

T
tahko 40
tangentti 65, 97
tangenttikulma 97
tasakylkinen kolmio 10
tasakylkinen puolisuunnikas 13
tasasivuinen kolmio 10
tasogeometria 9
trigonometrinen funktio 64

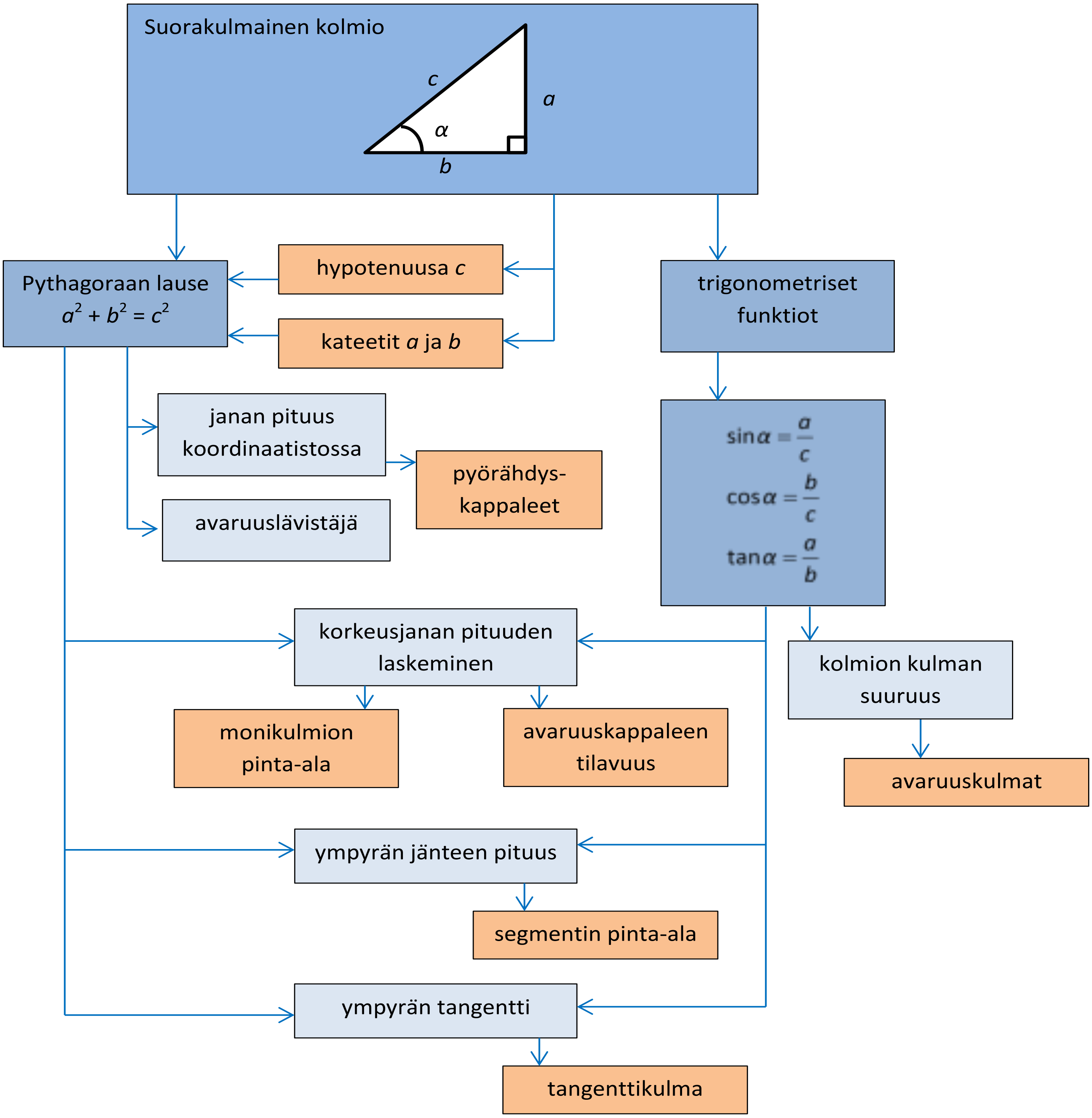
V
vaippa 37
vastinosat 138
vieruskulmat 166

Y
yhdenmuotoisuus 137
yhdenmuotoisuussuhde 150
yhtenevyys 137
ympyrä 23
ympyrän halkaisija 23
ympyrän pinta-ala 23
ympyrän tangentti 97

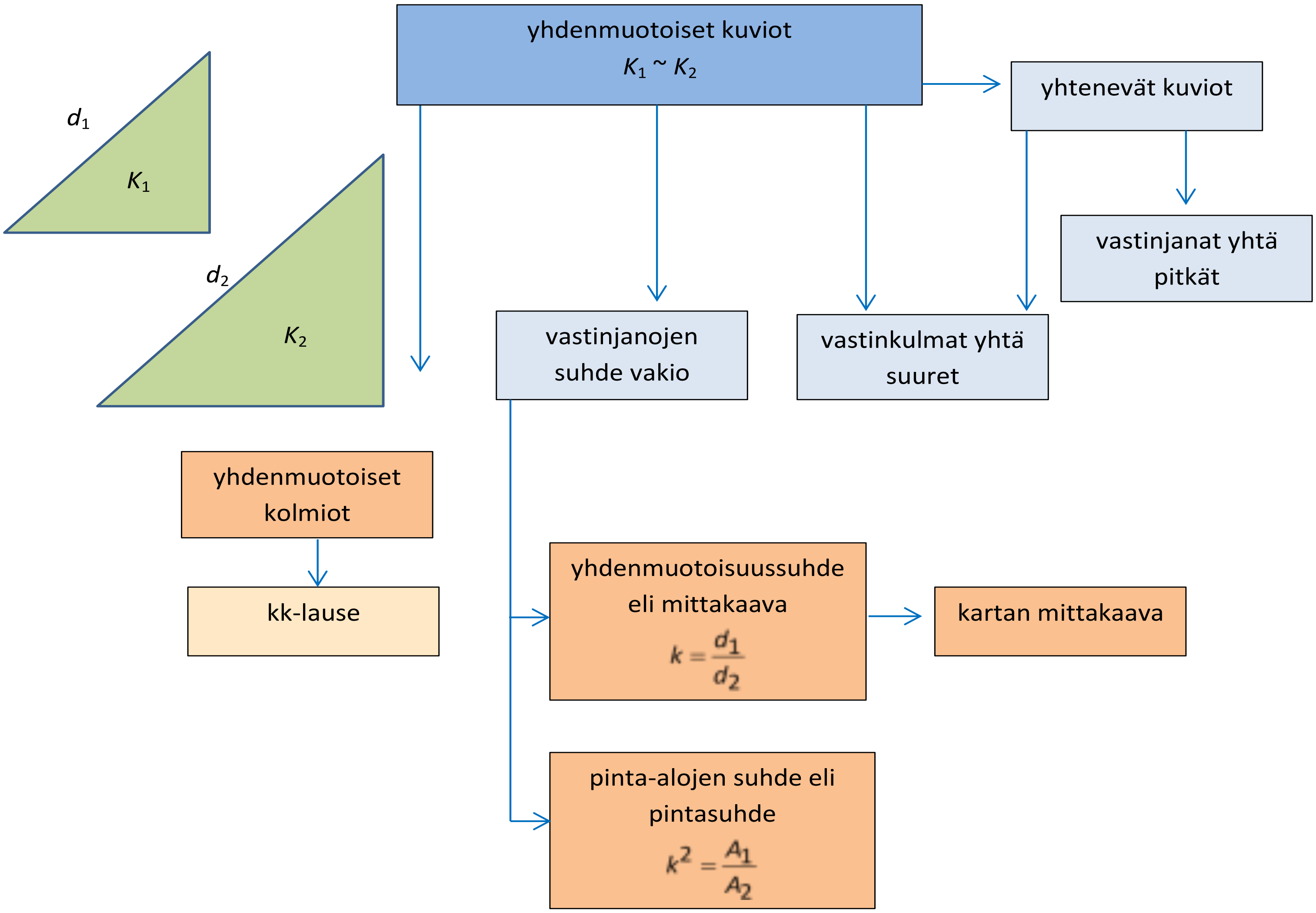
1. Kertausta geometriasta


geometria
tasogeometria
pinta-ala
avaruusgeometria
vaipan ala
kokonais-pinta-ala
tilavuus
monikulmio
ympyrä
kolmio
kulmien summa 180°
halkaisija *d*
säde *r*
kehän pituus *p*
suorakulmainen kolmio
kateetti
hypotenuusa
sektori
kaari *b*
keskuskulma *α*
tasakylkinen kolmio
kylki
kanta
tasasivuinen kolmio
lieriö
särmiö
ympyrälieriö
kartio
pyramidi
ympyräkartio
nelikulmio
kulmien summa 360°
suorakulmio
suunnikas
puolisuunnikas
pallo

2. Kuvioita ja kappaleita


Suorakulmainen kolmio
c
a
α
b
Pythagoraan lause
$a^2 + b^2 = c^2$
hypotenuusa *c*
kateetit *a* ja *b*
trigonometriset funktiot
janan pituus koordinaatistossa
pyörähdys-kappaleet
avaruuslävistäjä
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$
korkeusjanan pituuden laskeminen
kolmion kulman suuruus
monikulmion pinta-ala
avaruuskappaleen tilavuus
avaruuskulmat
ympyrän jänteen pituus
segmentin pinta-ala
ympyrän tangentti
tangenttikulma

3. Yhdenmuotoisuus


yhdenmuotoiset kuviot
$K_1 \sim K_2$
yhtenevät kuviot
vastinjanat yhtä pitkät
d_1
K_1
d_2
K_2
vastinjanojen suhde vakio
vastinkulmat yhtä suuret
yhdenmuotoiset kolmiot
kk-lause
yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava
$k = \frac{d_1}{d_2}$
kartan mittakaava
pinta-alojen suhde eli pintasuhde
$k^2 = \frac{A_1}{A_2}$

Vinkkejä tehtävien ratkaisuun

7. Kolmion piiri on sivujen yhteenlaskettu pituus

10 a) Tasakylkinen puolisuunnikas on nelikulmio, jonka kulmien summa on 360°.
b) Jos kulmien suhde on 4:5, niin kulmien suuruudet ovat esimerkiksi $4x$ ja $5x$.

12. Jos sivujen suhde on 1:3, niin sivujen pituudet ovat x ja $3x$.

16. Joissakin kolmioissa korkeusjana piirretään kannan jatkeelle.

18. Suhdetta muodostettaessa se arvo, johon verrataan, merkitään aina nimittäjään.

19. Kun pinta-ala kasvaa 5 %, niin se on 100 % + 5 % = 105 % eli ala 1,05-kertaistuu.

22. Merkitse kolmion kyljen pituutta esimerkiksi kirjaimella x.

23. Jos sivujen suhde on 1:5, niin sivujen pituudet ovat esimerkiksi x ja $5x$.

33. a) Laske ensin koko suorakulmion ala.
b) Laske ensin koko neliön ala

37. Laske ensin säde.

42. Merkitse neliön sivun pituutta jollakin kirjaimella, esimerkiksi a.

53. Laske ensin ympyrän kehän pituus ja pinta-ala.

54. Laske ensin sektorin säde.

57. Kysytty pinta-ala saadaan kahden sektorin pinta-alojen erotuksena.

59. Levyn pinta-ala saadaan kahden ympyrän pinta-alojen erotuksena.

68. Alareunan etäisyys lampun yläosasta (32,3 cm) on kartion sivujanan pituus.

71. Merkitse sivujanan pituutta esim. kirjaimella x ja muodosta vaipan alan lauseke sen avulla. Koska tuutin vohvelin ala eli kartion vaipan ala on annettu, voit muodostaa yhtälön ja ratkaista siitä kirjaimen x.

72. Merkitse leveyttä kirjaimella x, jolloin korkeus on $0{,}4x$. Muodosta yhtälö.

74. Puoliympyrän säde on kartion sivujana. Koska puoliympyrän ala tunnetaan, sen säde voidaan ratkaista yhtälön avulla ($A(\text{puoliympyrä}) = 0{,}5 \cdot \pi r^2$). Puoliympyrän sektorin kaaren pituus on kartion pohjan kehän pituus.

79. Ratkaise tilavuuden avulla pallon säde muodostamalla yhtälö tilavuuden avulla.

81. Uima-allas on suoran särmiön muotoinen. Särmiön pohja on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 1,0 m ja 3,0 m. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen etäisyys eli puolisuunnikkaan korkeus on uima-altaan pituus. Särmiön korkeus on altaan leveys eli 12 m.

82. Harjakattoinen talo muodostuu kahdesta suorasta särmiöstä, joista toinen on kolmiopohjainen (särmiön pohja on talon päätykolmio). Sen korkeus on 1,62 m ja kanta 14,0 m. Tämän särmiön korkeus on talon pituus eli 22,0 m.

84. Laske ensin renkaan tilavuus. Massan saat sitten tiheyden ja tilavuuden tulona.

87. Merkitse korkeutta kirjaimella x. Suuaukon sisähalkaisija on tällöin $1{,}5x$ eli kartion pohjaympyrän säde on $0{,}75x$. Muodosta säteen ja korkeuden avulla tilavuuden lauseke ja muodosta yhtälö.

89. Merkitse kuulan sädettä kirjaimella *a*. Tällöin lieriön pohjaympyrän säde on myös *a* ja lieriön korkeus on 4*a*. Laske sitten kuulien tilavuuden lauseke ja lieriön tilavuuden lauseke.

110. Sivujen pituuksille on voimassa Pythagoraan lause

112. Kohtisuoruuden avulla saadaan suorakulmainen kolmio.

121. Piirrä mallikuva sivulta katsottuna. Merkitse annetut tiedot kuvaan.

124. Piirrä mallikuva sivulta katsottuna: henkilö katsoo lentokonetta.

125. Laske ensin rinteen pituus.

126. Piirrä mallikuva, johon merkitset kulmat ja etäisyydet.

128. Piirrä mallikuva sivulta katsottuna. Kirjaimella *x* kannattaa merkitä a- kohdassa kysyttyä asiaa eli etäisyyttä tornista lopputilanteessa. Määritä lauseke tornin korkeudelle alkutilanteessa ja lopputilanteessa.

132. Piirrä mallikuva ja merkitse siihen annetut tiedot. Pääilmansuunnat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

139. a) Korkeusjana piirretään kolmion sisälle
b) Korkeusjana piirretään kannan jatkeelle. Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan korkeus.
c) Korkeusjana piirretään kolmion sisälle.
d) Korkeusjana piirretään suunnikkaan ulkopuolelle, kannan jatkeelle.

140. a) Kolmio on tasakylkinen.
b) Piirrä tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeusjana, jolloin muodostuu suorakulmainen kolmio

145. Piirrä aluksi mallikuva tilanteesta, kun keinu on levossa. Määritä ylätangon etäisyys maanpinnasta.

148. Piirrä mallikuva puolisuunnikkaasta ja merkitse lähtöarvot kuvaan.

151. a) Määritä puolisuunnikkaan sivujen pituudet. Korkeus saadaan Pythagoraan lauseella.
b) Määritä ensin kolmion korkeus.
c) Laske ensin koko pään pinta-ala. Käytä edellisten kohtien tuloksia apuna.

152. Kolmion pinta-alan avulla saadaan kolmion korkeus. Korkeusjanan avulla muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka avulla voidaan laskea kulmia.

154. Merkitse janan FC pituutta kirjaimella x.

155. a) Piirrä korkeusjana kannan jatkeelle.
b) Piirrä korkeusjana sopivaan kohtaan ja määritä korkeusjanan pituus Pythagoraan lauseella.

158. Piirrä mallikuva yhdestä puolisuunnikkaan muotoisesta pöydästä ja merkitse lähtöarvot kuvaan. Laske pöydän kulmien suuruudet.

159. Piirrä mallikuva, johon merkitset lävistäjät. Merkitse pidemmän lävistäjän puolikkaan pituutta kirjaimella x.

164. b) Piirrä kuva ympyrästä. Merkitse annetut tiedot kuvaan. Tutki kolmiota, joka muodostuu sektorin sisään.

167. Piirrä mallikuva. Laske ensin sektorin keskuskulman suuruus.

168. Määritä yhden palan keskuskulman suuruus. Laske poisleikatun alan suuruus segmentin pinta-alana.

170. Piirrä mallikuva. Piirin pituus tarkoittaa säteiden ja kaaren pituuden summaa.

177. Piirrä mallikuva. Merkitse lähtöarvot kuvaan. Säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan.

179. Hallin poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on 55 m.

181. Piirrä mallikuva, jossa ympyrällä on kaksi tangenttia. Lasketaan tangenttien sivuamispisteiden välinen kaaren pituus.

183. Piirrä mallikuva ja merkitse lähtöarvot kuvaan. Pasilan linkkitornin huipun ja Tallinnassa olevan paikan välinen suora on ympyrän tangenttina.

186. Piirrä mallikuva, jossa kuumailmapallon sijaintipaikasta taivaalla piirretään kaksi tangenttia. Laatokan pituus on muodostuvan sektorin kaaren pituus.

188. Määritä vaijerin kaarevaa osaa vastaava ympyrän keskuskulman suuruus.

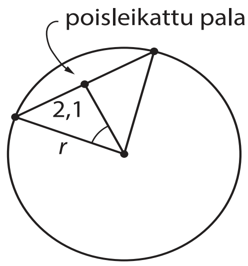
194. Laske pohjan lävistäjän pituus Pythagoraan lauseen avulla. Sen jälkeen kysytty kulma voidaan ratkaista sivun pituuden ja pohjan lävistäjän avulla sinin avulla.

197. Laske yhden tahkona toimivan kolmion ala: kolmion korkeus voidaan laskea Pythagoraan lauseella, koska kun kolmio puolitetaan jostain kärkipisteestä, muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota. Näistä kolmioista tunnetaan hypotenuusa ja toinen kateetti.

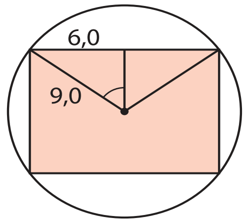
199. Ratkaise ensin pohjaympyrän säde tilavuuden ja korkeuden avulla muodostamalla yhtälö. Vaipan alan laskemiseen tarvitaan sivujanan pituus, joka saadaan selville pohjaympyrän säteen ja korkeuden avulla käyttämällä Pythagoraan lausetta.

203. Pohjan pinta-alan laskemiseen tarvitaan kolmio kanta ja korkeus. Määritä ne trigonometrian avulla käyttäen kyljen pituutta ja kantakulmaa.

205. Kun juustosta leikataan pala pois, muodostuu lieriö, jonka pohjana on ympyräsegmentti. Segmentin pinta-alan laskemiseen tarvitaan tietää keskuskulma, jonka muodostavat jänteen päätepisteistä keskipisteeseen piirretyt säteet. Jänteen puolikkaan ja säteen avulla tarvittava kulma voidaan määrittää käyttäen trigonometriaa.



208. Palkin korkeuden puolikas voidaan määrittää Pythagoraan lauseen avulla. Palkin pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.



209. Laske vaipan alan ja säteen avulla sivujanan pituus. Sitä tarvitaan, jotta kartion korkeus voidaan määrittää Pythagoraan lauseen avulla.

210. Laske ensin annetun kulman ja hypotenuusan pituuden avulla kolmion kateettien pituudet. Toinen kateeteista tulee olemaan kartion korkeus, toinen taas pohjaympyrän säde.

213. b) Laske annetun pisteen ja ympyrän keskipisteen etäisyys.

215. Piirrä mallikuva.

217. Piirrä säteet kehän pisteisiin.

218. Piirrä mallikuva. Täydennä kuvio suorakulmioksi.

220. Piirrä mallikuva. Täydennä kuvio suorakulmioksi.

221. c) Vertaa kolmion pinta-alaa suorakulmion pinta-alaan (pinta-alojen suhde).

223. a) Piirrä mallikuva (hahmottele lieriö kuvaan) ja laske tarvittavat arvot.
b) Muista, että 1 dm^3= 1l

224. Suuremman kartion tilavuutta verrataan pienemmän kartion tilavuuteen (tilavuuksien suhde).

226. a) Piirrä tasakylkisen kolmion sisälle suorakulmainen kolmio korkeusjanan avulla. Laske kantakulmat.

227. Piirrä mallikuva ja määritä syntyneestä kolmiosta kysytty kulma koordinaatistoa apuna käyttäen.

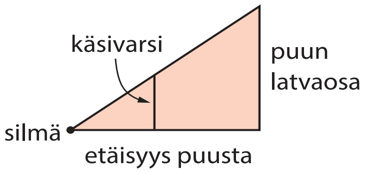
229. Piirrä mallikuva.
b) Määritä annetun pisteen ja ympyrän keskipisteen etäisyys.
c) Tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan, jolloin muodostuu suorakulmainen kolmio.

232. a) Laske sivujen pituudet ja tutki, päteekö Pythagoraan lause.

234. Piirrä mallikuva koordinaatistoon. Määritä muodostuvan kolmion kulmat trigonometristen funktioiden avulla.

235. Piirrä mallikuva.
b) Laske annetun pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä.
d) Tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan. Tutki, onko muodostuva kolmio suorakulmainen.

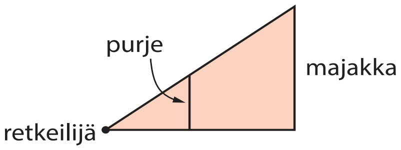
241. Muodosta kuvan avulla yhtälö.



243. Laske vastinosien suhteet – suhteiden pitäisi olla yhtä suuret.

244. Viiri ja punainen osa ovat yhdenmuotoisia. Muodosta punaisen osan kyljen ja koko viirin kyljen suhde. Muodosta viirin kannan (x) ja punaisen osan kannan suhde. Merkitse suhteet yhtä suuriksi.

246. Muodosta kuvan avulla yhtälö.



248. Neliö erottaa suorakulmaisen kolmion sisältä kaksi suorakulmaista kolmiota, jotka molemmat ovat yhdenmuotoisia ison suorakulmion kanssa. Merkitse neliön sivun pituutta kirjaimella x. Lausu toisen pikkukolmion kateetit kirjaimen x avulla. Muodosta verrantoyhtälö pikkukolmion sivujen pituuksien ja ison suorakulmion sivujen pituuksien avulla.

249. Kolmiot ABC, ABD ja BCD ovat yhdenmuotoisia. Merkitse janan BD pituutta kirjaimella x. Etsi vastinsivut ja muodosta verrantoyhtälö.

251. Janat AB ja AC ovat ympyrän tangentteja. Tällöin kolmion ABC sisään muodostuva pieni kolmio on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa. Ympyrän säde r on pienen kolmion kateetti. Muodosta vastinosien avulla verrantoyhtälö.

254. Ympyrälieriön yläpohja rajoittaa pienen ympyräkartion, joka on yhdenmuotoinen alkuperäisen kartion kanssa. Merkitse pohjan sädettä kirjaimella r. Etsi vastinosat ja lausu kaikki tilavuuksien laskemiseen tarvittavat pituudet kirjaimen r avulla.

264. a) Merkitse pienemmän pullon korkeutta kirjaimella *a* ja määritä isomman pullon korkeus. Niiden avulla voit määritellä mittakaavan, jonka neliö on pinta-alojen suhde.

266. 1 cm pienoismallissa on 250 cm todellisuudessa. Muunna koneen mitat senttimetreiksi, jolloin mallin mitat on helppo laskea jakolaskulla.

270. a) Merkitse todellista pinta-alaa neliösenttimetreinä kirjaimella *x*. Muodosta verrantoyhtälö, jossa merkitset mittakaavan neliön yhtä suureksi kuin pintasuhteen.

275. Poisleikattu kolmio ja alkuperäinen kolmio ovat yhdenmuotoiset. Määritä niiden mittakaava. Määritä verrannon avulla pikkukolmion pinta-ala. Tällöin puolisuunnikkaan pinta-ala voidaan laskea (tunnetaan ison ja pienen kolmion pinta-alat).

276. Määritä vanhan kartan ja uuden kartan pintasuhde. Sen perusteella voi määritellä vanhan kartan ja uuden kartan mittakaavan. Merkitse kirjaimella *x* sitä pituutta, joka on uudessa kartassa 1 cm matka luonnossa. Muodosta verranto uuden ja vanhan kartan mittakaavalle.

279. Laske ensin pituus suuremmassa mallissa muodostamalla verranto mittakaavan avulla. Kun olet laskenut mitan suuremmassa mallissa, muodosta toinen verranto: suuren ja pienen mallin mittakaava on 3:2.

296. a) Mieti, mikä on kulman *y* ristikulma.
b) Kulmat 128°, 25° ja nimeämätön kulma muodostavat yhdessä oikokulman.

297. Lisää kuvaan apusuora, joka on yhdensuuntainen suorien *s* ja *t* kanssa ja joka kulkee kulman *a* kärkipisteen kautta. Tämä suora jakaa kulman *a* kahteen osaan.

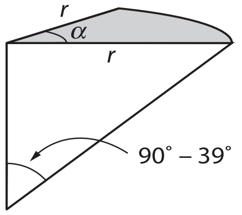
299. a) Etsi kuviosta samankohtaisia kulmia.
b) Mikä kulma on samankohtainen kulman *β* kanssa? Mikä kulma on samankohtainen 120° kulman kanssa?

301. Suora s rajoittaa kolmion, jonka kolmas kulma voidaan määrittää. Piirrä lisäksi apusuora, joka on yhdensuunainen suorien s ja t kanssa ja joka kulkee kulman β kärkipisteen kautta.

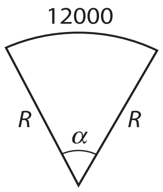
311. Laske leveyspiirien erotus. Näin saat sektorin keskuskulman. Säteenä on 6380 km. Sektorin kaaren pituus on paikkojen välinen etäisyys.

312 b) Annettu etäisyys 2000 km on sektorin kaaren pituus. Tämän sektorin kulma voidaan laskea Maan säteen avulla. Kun kulma on määritetty, voidaan laskea leveyspiiri, jonne päädytään. Huomaa, että lähtöpiste sijaitsee päiväntasaajan eteläpuolella, mutta päätepiste päiväntasaajan pohjoispuolella.

314. Määritä ensin säde r sille isoympyrälle, jonka leveyspiiri 39° pohjoista leveyttä muodostaa. Laske sitten pituuspiirien erotus a, jolloin saat sektorin keskuskulman. Tämän sektorin säde on edellä laskettu. Paikkojen välinen etäisyys on sektorin kaaren pituus.



315. b) Kohdassa a on ratkaistu säde R sille isoympyrälle, joka on paikkojen leveyspiiri. R on sektorin säde, joka muodostuu, kun kuljetaan Prahasta 12 000 km itään. Tämän sektorin kaaren pituus on 12 000 km. Sektorin keskuskulma a voidaan ratkaista yhtälön avulla.



220. Piirrä mallikuva. Täydennä kuvio suorakulmioksi.

221. b) Vertaa kolmion pinta-alaa suorakulmion pinta-alaan (pinta-alojen suhde).

223. a) Piirrä mallikuva (hahmottele lieriö kuvaan) ja laske tarvittavat arvot.
b) Muista, että 1 dm^3= 1l

224. Suuremman kartion tilavuutta verrataan pienemmän kartion tilavuuteen (tilavuuksien suhde).

226. a) Piirrä tasakylkisen kolmion sisälle suorakulmainen kolmio korkeusjanan avulla. Laske kantakulmat.

227. Piirrä mallikuva ja määritä syntyneestä kolmiosta kysytty kulma koordinaatistoa apuna käyttäen.

229. Piirrä mallikuva.
b) Määritä annetun pisteen ja ympyrän keskipisteen etäisyys.
c) Tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan, jolloin muodostuu suorakulmainen kolmio.

232. a) Laske sivujen pituudet ja tutki, päteekö Pythagoraan lause.

234. Piirrä mallikuva koordinaatistoon. Määritä muodostuvan kolmion kulmat trigonometristen funktioiden avulla.

235. Piirrä mallikuva.
b) Laske annetun pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä.
d) Tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan. Tutki, onko muodostuva kolmio suorakulmainen.

1 Kertausta geometriasta

1.1 Monikulmiota

1.

a) Kolmion kulmien summa on 180°. Koska tiedetään kaksi kulmaa, kulma x voidaan laskea.

$$\begin{aligned} 180° &= x + 35° + 80° \\ x &= 180° - 35° - 80° \\ x &= 65° \end{aligned}$$

b) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria, joten suunnikkaassa on kaksi 65°:n kulmaa ja kaksi x kulmaa. Suunnikkaan kulmien summa on 360°, joten voidaan laskea:

$$\begin{aligned} 360° &= 65° + 65° + x + x \\ 2x &= 360° - 65° - 65° \\ 2x &= 230° \qquad \qquad |:2 \\ x &= 115° \end{aligned}$$

c) Tasakylkisen kolmien kantakulmat ovat yhtä suuret, joten kolmiossa on kaksi x kulmaa. Kolmion kulmien summa on 180°, joten voidaan laskea:

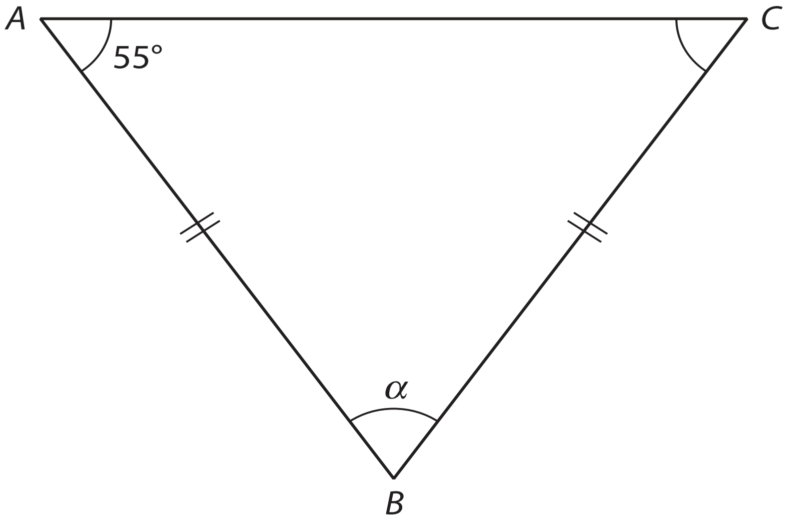
$$\begin{aligned}180^\circ &= 40^\circ + x + x\\ 2x &= 180^\circ - 40^\circ\\ 2x &= 140^\circ \qquad \Big|:2\\ x &= 70^\circ\end{aligned}$$

d) Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat keskenään yhtä suuria, samoin kannan vastaiset kulmat, joten puolisuunnikkaassa on kaksi 125°:n kulmaa ja kaksi x kulmaa. Tasakylkisen puolisuunnikkaan kulmien summa on 360°, joten voidaan laskea:

$$\begin{aligned}360^\circ &= 125^\circ + 125^\circ + x + x\\ 2x &= 360^\circ - 125^\circ - 125^\circ\\ 2x &= 110^\circ \qquad \Big|:2\\ x &= 55^\circ\end{aligned}$$

2.

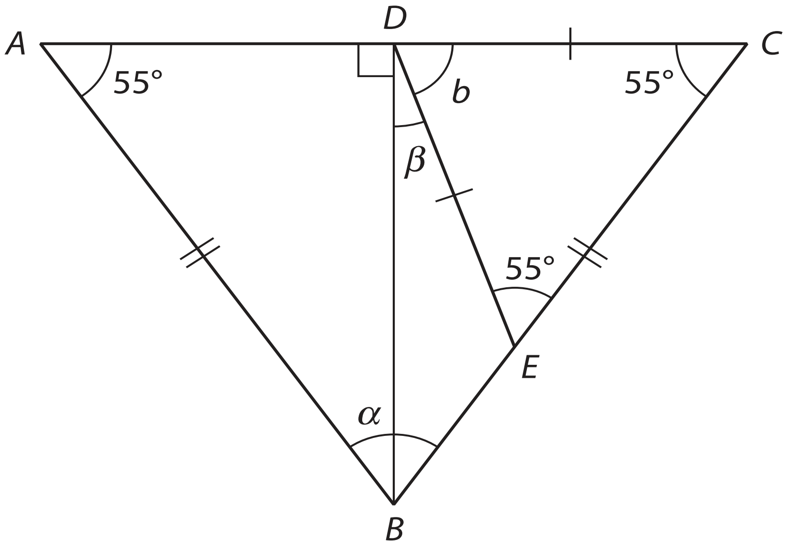
Kolmio *ABC* on tasakylkinen kolmio. Tasakylkisen kulmien summa on 180°.



Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$\begin{aligned} 55° + 55° + \alpha &= 180° \\ \alpha &= 180° - 55° - 55° \\ \alpha &= 70° \end{aligned}$$

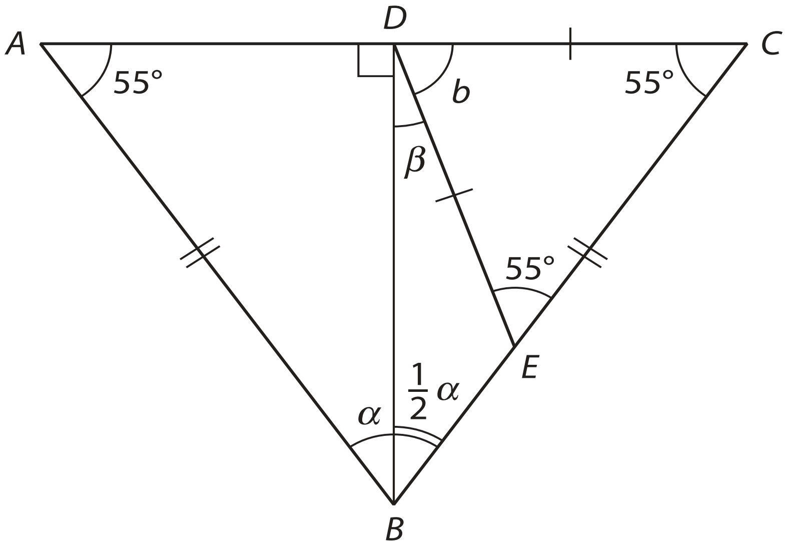
Tarkastellaan tasakylkistä kolmiota *EDC*.



Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan b.

$$\begin{aligned} b+55^\circ+55^\circ &= 180^\circ \\ b &= 180^\circ-55^\circ-55^\circ \\ b &= 70^\circ \end{aligned}$$

Tarkastellaan kolmiota *DBC*.


A
D
C
55°
b
55°
β
55°
E
$\frac{1}{2}\alpha$
α
B

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä β.

$$\frac{1}{2}\alpha+\beta+70^\circ+55^\circ=180^\circ$$

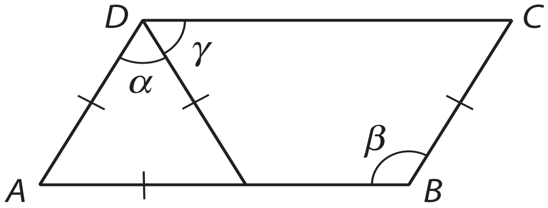
$$\beta=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\cdot70^\circ\right)-70^\circ-55^\circ$$

$$\beta=180^\circ-35^\circ-70^\circ-55^\circ$$

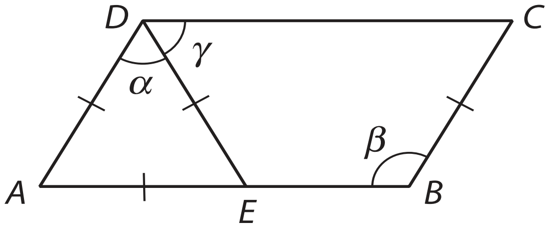
$$\beta=20^\circ$$

3.

a) Piirretään suunnikas *ABCD*.



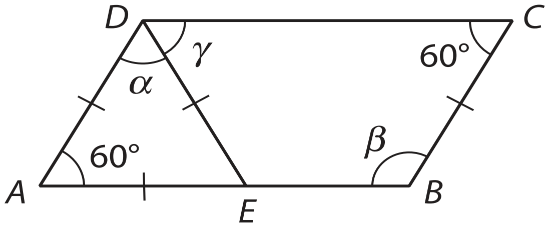
Tarkastellaan suunnikkaan sisällä olevaa tasasivuista kolmiota *AED*.



Tasasivuisen kolmion kulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$\begin{aligned} \alpha+\alpha+\alpha &= 180^\circ \\ 3\alpha &= 180^\circ \qquad |:3 \\ \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$

Tarkastellaan suunnikasta *ABCD*. Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.



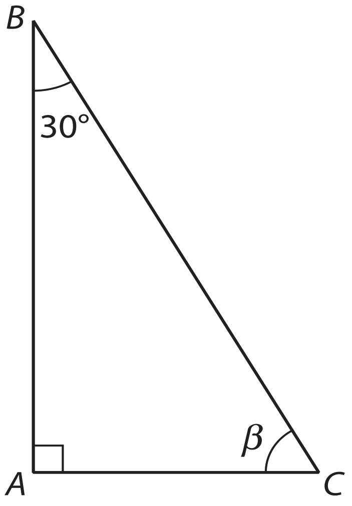
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä β.

$$\begin{aligned} \gamma+\alpha+\beta+60°+60° &= 360° && \mid \gamma+\alpha=\beta \\ \beta+\beta &= 360°-60°-60° \\ 2\beta &= 240° && \mid :2 \\ \beta &= 120° \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea γ.

$$\begin{aligned} \alpha+\gamma &= \beta \\ \gamma &= \beta-\alpha \\ \gamma &= 120°-60° \\ \gamma &= 60° \end{aligned}$$

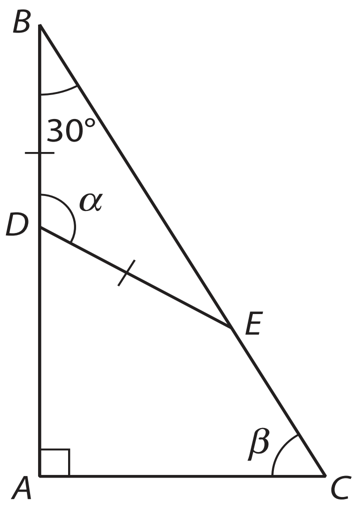
b) Piirretään suorakulmainen kolmio *ABC*.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä β.

$$
\begin{aligned}
90° + 30° + \beta &= 180° \\
\beta &= 180° - 90° - 30° \\
\beta &= 60°
\end{aligned}
$$

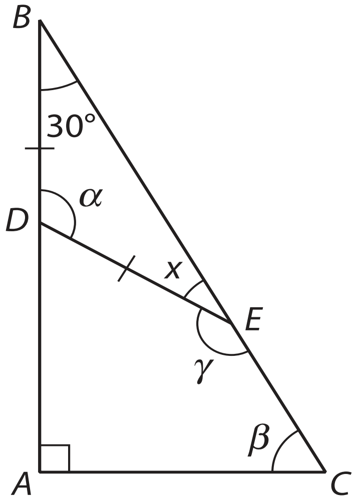
Tarkastellaan suorakulmaisen kolmion sisällä olevaa tasasivuista kolmiota *BDE*.



Tasasivuisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$
\begin{aligned}
30° + \alpha + 30° &= 180° \\
\alpha &= 180° - 30° - 30° \\
\alpha &= 120°
\end{aligned}
$$

Kulma γ ja kulma x muodostavat oikokulman.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan γ.

$$
\begin{aligned}
x + \gamma &= 180° \quad \Big| \, x = 30° \\
\gamma &= 180° - 30° \\
\gamma &= 150°
\end{aligned}
$$

4.

a) Merkataan kantakulmia α:lla, tällöin huippukulmaa kuvaava lauseke on $\alpha + 30°$. Kolmion kumien summa on 180°. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + \alpha + 30° &= 180° \\ 3\alpha &= 180° - 30° \\ 3\alpha &= 150° \qquad \bigg| :3 \\ \alpha &= 50° \end{aligned}$$

Kantakulmat ovat 50° ja huippukulma on $50° + 30° = 80°$.

b) Merkataan suorakulmaisen kolmion teräviä kulmia $2x$ ja $7x$. Suorakulmaisessa kolmiossa yksi kulma on 90°. Kolmion kulmien summa on 180°. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 2x + 7x + 90° &= 180° \\ 2x + 7x &= 180° - 90° \\ 9x &= 90° \qquad \bigg| :9 \\ x &= 10° \end{aligned}$$

Terävät kulmat ovat $2 \cdot 10° = 20°$ ja $7 \cdot 10° = 70°$.

5.

a) Muodostetaan yhtälö ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 3x + 4x + 5x &= 48\,\text{cm} \\ 12x &= 48\,\text{cm} && \big| :12 \\ x &= 4\,\text{cm} \end{aligned}$$

Sivut ovat $3 \cdot 4\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$, $4 \cdot 4\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$ ja $5 \cdot 4\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$.

b) Kolmion pinta-ala voidaan laskea kaavalla:

$$A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{16\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} = 96\,\text{cm}^2.$$

6.

a) Merkataan kolmion lyhyempää kateettia kirjaimella x, tällöin pidempää kateettia kuvaa lauseke x + 7 cm.

Muodostetaan piirin yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} x+(x+7\,\text{cm})+13\,\text{cm} &= 30\,\text{cm} \\ x+x &= 30\,\text{cm}-7\,\text{cm}-13\,\text{cm} \\ 2x &= 10\,\text{cm} \qquad \big|:2 \\ x &= 5\,\text{cm} \end{aligned}$$

Kateettien pituudet ovat 5 cm ja 5 cm + 7 cm = 12 cm.

b) Kolmion pinta-ala on 4,0 cm^2. Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{x\cdot(x+7)}{2}=4 \qquad \Big| \cdot 2$$

$$x\cdot(x+7)=8$$

$$x^2+7x=8$$

$$x^2+7x-8=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2}$$

$$x=\frac{-7\pm9}{2}$$

$$x=\frac{-7+9}{2}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-7-9}{2}=-8$$

Koska sivun pituus on aina positiivinen, $x = 1$ (cm).

Kateettien pituudet ovat 1 cm ja 1 cm + 7 cm = 8 cm.

7.

a) Tasakylkisen kolmion kylkien pituudet ovat yhtä suuret. Merkataan sivun pituutta kirjaimella x, tällöin kantaa kuvaa lauseke $x + 3$ cm.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} x+x+(x+3\,\text{cm}) &= 18\,\text{cm} \\ x+x+x &= 18\,\text{cm}-3\,\text{cm} \\ 3x &= 15\,\text{cm} \qquad \Big| :3 \\ x &= 5\,\text{cm} \end{aligned}$$

Kolmion sivut ovat 5 cm, 5 cm ja 5 cm + 3cm = 8cm.

b) Merkataan kannan pituutta kirjaimella x, tällöin korkeus on $6x$. Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} \frac{x\cdot(6x)}{2} &= 12 \qquad \Big| \cdot 2 \\ 6x^2 &= 24 \qquad \Big| :6 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Koska kannan pituus on aina positiivinen, $x = 2$ (cm).

Korkeus on $6\cdot 2\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

8.

Merkataan erisuuntaisia sivuja $3x$ ja $4x$. Muodostetaan piirin yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 3x+4x+3x+4x &= 42\text{ cm} \\ 14x &= 42\text{ cm} \quad \left|:14\right. \\ x &= 3\text{ cm} \end{aligned}$$

Suorakulmion erisuuntaiset sivut ovat:

- $3\cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$
- $4\cdot 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

$9\,\text{cm}\cdot 12\,\text{cm} = 108\,\text{cm}^2.$

9.

Merkataan suorakulmion lyhyempää sivua kirjaimella x, tällöin pidempää sivua kuvaa lauseke $x + 2$ cm. Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$x^2 + 2x = 35$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 12}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 12}{2} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 12}{2} = -7$$

Koska sivun pituus on aina positiivinen, $x = 5$ (cm). Pidemmän sivun pituus on tällöin 5 cm + 2 cm.

Lasketaan piiri.

$$5\text{ cm} + 7\text{ cm} + 5\text{ cm} + 7\text{ cm} = 24\text{ cm}$$

10.

a) Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat yhtä suuria, samoin kannan vastaiset kulmat. Merkataan kantakulmia kirjaimella x, tällöin kannan vastaisia kulmia kuvaa lauseke $x + 20°$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} x + x + (x + 20°) + (x + 20°) &= 360° \\ x + x + x + x &= 360° - 20° - 20° \\ 4x &= 320° \qquad \mid :4 \\ x &= 80° \end{aligned}$$

Kantakulmat ovat 80° ja kannan vastaiset kulmat ovat 80° + 20° = 100°.

b) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria. Merkataan kulmia $4x$ ja $5x$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 4x + 5x + 4x + 5x &= 360° \\ 18x &= 360° \qquad \mid :18 \\ x &= 20° \end{aligned}$$

Suunnikkaan kulmat ovat $4 \cdot 20° = 80°$ ja $5 \cdot 20° = 100°$.

11.

Merkataan korkeutta kirjaimella *h*. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan sen avulla korkeus *h*.

$$\begin{aligned} \frac{4+8}{2}\cdot h &= 30 && \Big|:\frac{4+8}{2} \\ h &= \frac{4+8}{2}:30 \\ h &= \frac{2}{12}\cdot 30 \\ h &= \frac{60}{12} = 5 \end{aligned}$$

Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus on 5 cm.

12.

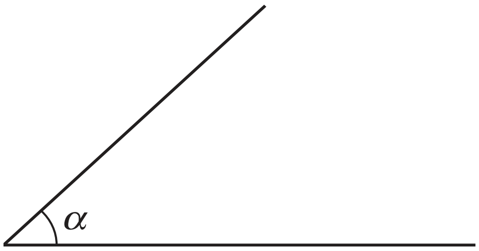
Merkataan yhdensuuntaisia sivuja x ja $3x$. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned}
\frac{x+3x}{2}\cdot 3 &= 12 && \Big| : \frac{3}{2} \\
x+3x &= 12 : \frac{3}{2} \\
4x &= 12\cdot\frac{2}{3} \\
4x &= 8 && \Big| : 4 \\
x &= 2 \text{ (cm)}
\end{aligned}$$

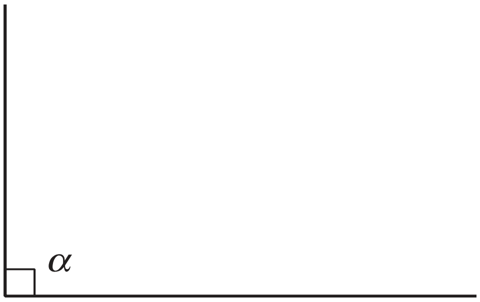
Yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 2 cm ja $3\cdot 2\text{ cm} = 6\text{ cm}$.

13.

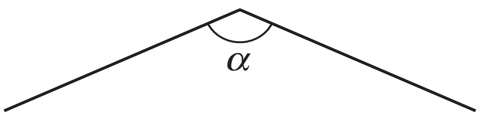
a)



b)

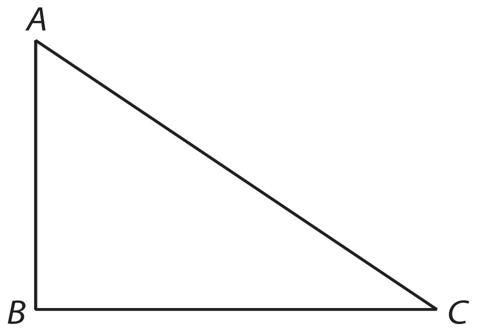


c)

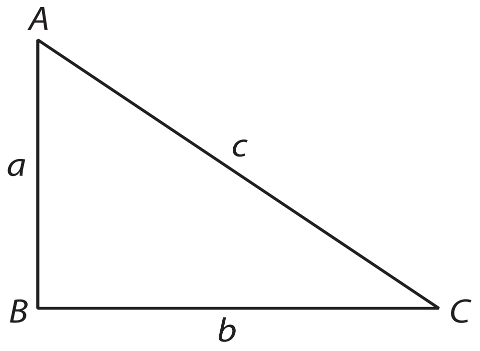


14.

a)

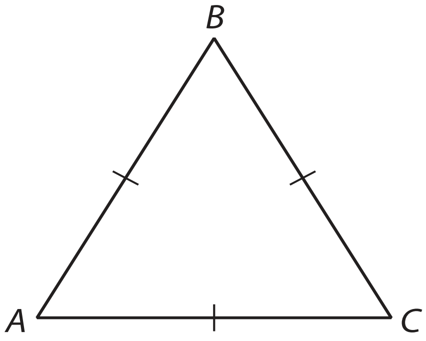


b)

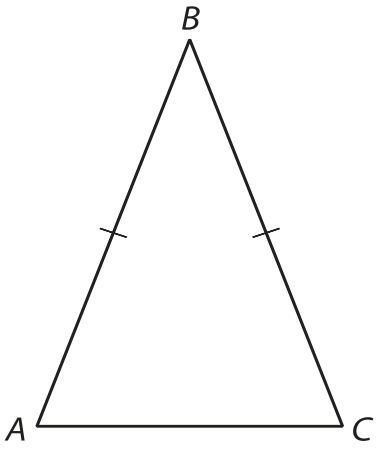


15.

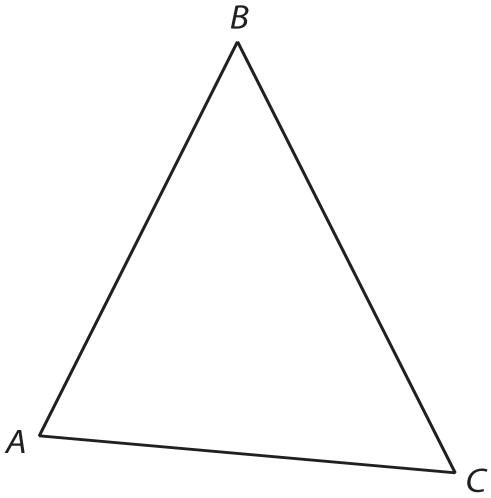
a)



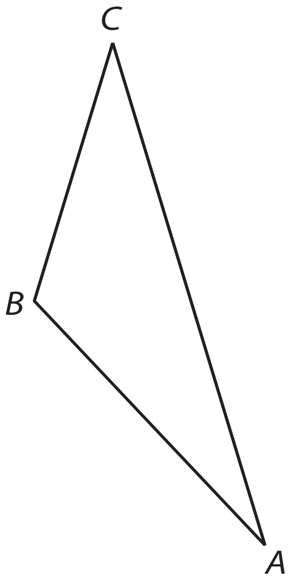
b)



c)

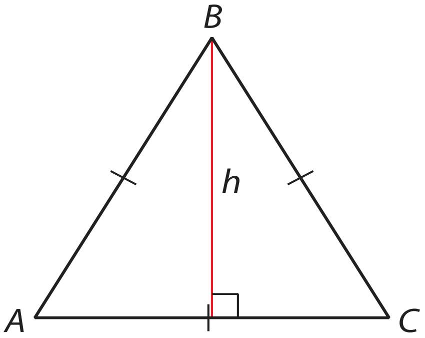


d)

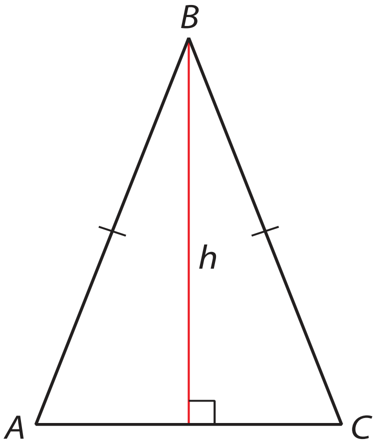


16.

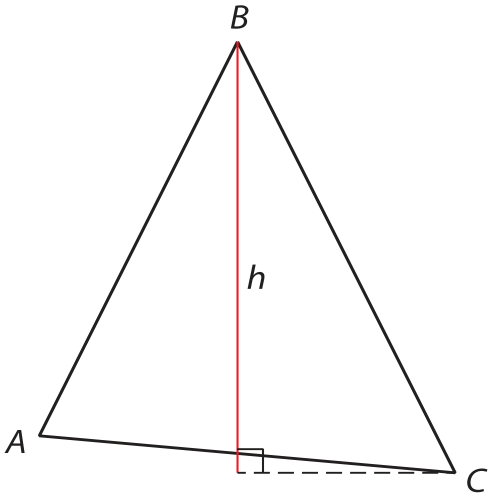
a)



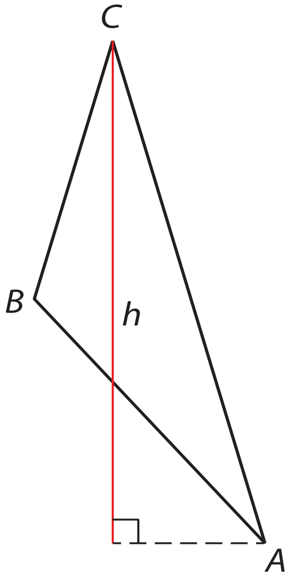
b)



c)

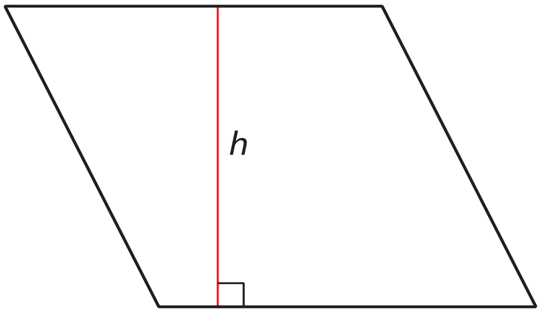


d)

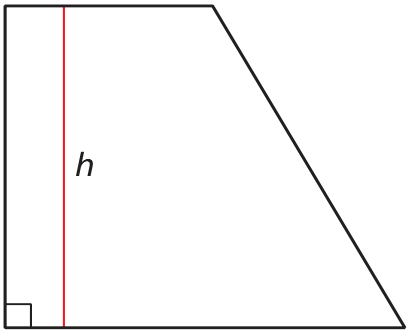


17.

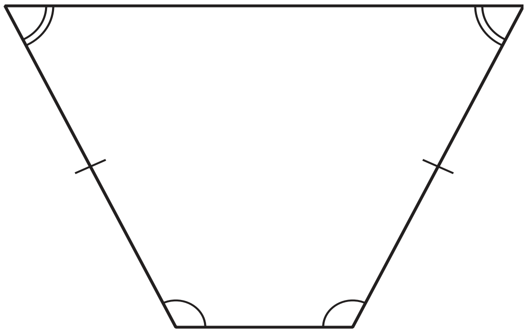
a)



b)



c)



18.

a) Lasketaan liikkeen A aurinkosuojan pinta-ala.

$$\frac{3,6\cdot 3,1}{2}=5,58\ (\mathrm{m}^2)$$

Lasketaan liikkeen B aurinkosuojan pinta-ala.

$$\frac{2,8\cdot 4,2}{2}=5,88\ (\mathrm{m}^2)$$

Nyt voidaan laskea, kuinka paljon liikkeen B aurinkosuojan pinta-ala on suurempi kuin liikkeen A aurinkosuojan pinta-ala.

$$\frac{5{,}88-5{,}58}{5{,}58}=0{,}05376344...\approx 5{,}4\ \%$$

Liikkeen B aurinkosuoja varjostaa 5,4 % suuremman pinta-alan verrattuna liikkeen A aurinkosuojaan.

b) Merkataan liikkeen B aurinkosuojan toista kateettia kirjaimella x.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned}\frac{2{,}8\cdot x}{2}&=5{,}58\\ x&=3{,}9857142...\\ x&\approx 4{,}0\end{aligned}$$

Toisen kateetin tulisi olla 4,0 m pitkä.

19.

Lasketaan yhden puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A_1 = \frac{15,0+7,0}{2} \cdot 6,0 = 66\ (\mathrm{m}^2)$$

Lasketaan yhden tasasivuisen kolmion pinta-ala.

$$A_2 = \frac{8,0 \cdot 6,0}{2} = 24\ (\mathrm{m}^2)$$

Nyt voidaan laskea koko katon pinta-ala.

$$A = 2A_1 + 2A_2 = 2 \cdot 66\ \mathrm{m}^2 + 2 \cdot 24\ \mathrm{m}^2 = 180\ \mathrm{m}^2$$

Koska tiiliä tilataan 5 % katon pinta-alaa suuremmalle määrälle, kerrotaan tämä vielä prosenttikertoimella 1,05.

$$180\ \mathrm{m}^2 \cdot 1,05 = 189\ \mathrm{m}^2$$

Nyt voidaan laskea kuinka paljon 189 m^2 kattotiiliä tulee maksamaan.

$$189\ \mathrm{m}^2 \cdot 9,20\ €/\mathrm{m}^2 = 1738,8\ € \approx 1739\ €$$

20.

a) 2,5 km = 2500 m.

Lasketaan nurmialueen piiri.

$$p = 335\text{ m} + 40\text{ m} + 335\text{ m} + 40\text{ m} = 750\text{ m}$$

Merkataan kierroksien määrää kirjaimella x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 750 \cdot x &= 2500 \\ x &= 3{,}333... \end{aligned}$$

Nurmialue tulee kiertää vähintään 4 kertaa, jotta kävelymatkan pituus olisi yli 2,5 km.

b) Lasketaan nurmialueen pinta-ala.

$$A = 335\text{ m} \cdot 40\text{ m} = 13\,400\text{ m}^2 = 134\text{ a}$$

Lasketaan, kuinka paljon siemeniä tarvitaan nurmikon kylvämiseen.

$$134\text{ a} \cdot 1{,}8\text{ kg/a} = 241{,}2\text{ kg} \approx 240\text{ kg}$$

Siemeniä tarvitaan 240 kg.

21.

Kuvan kolmio *ABC* on tasakylkinen kolmio, koska kolmion sivut ovat yhtä pitkät. Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$\begin{aligned} 38° + \alpha + \alpha &= 180° \\ 2\alpha &= 142° && \mid :2 \\ \alpha &= 71° \end{aligned}$$

Kolmion sisällä on tasakylkinen puolisuunnikas. Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat keskenään yhtä suuria, samoin kannan vastaiset kulmat. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan β.

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + \beta + \beta &= 360° && \mid \alpha = 71° \\ 71° + 71° + \beta + \beta &= 360° \\ 2\beta &= 218° && \mid :2 \\ \beta &= 109° \end{aligned}$$

22.

a) Tasakylkisen kolmion kyljet ovat yhtä pitkiä. Merkataan kolmion kyljen pituutta kirjaimella x. Muodostetaan piirin yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} x+x+(x+4)&=64 \\ x+x+x+4&=64 \\ 3x&=60 \qquad \qquad |:3 \\ x&=20\text{ (cm)} \end{aligned}$$

Kolmion kyljet ovat 20 cm ja kolmion kanta on 20 cm + 4 cm = 24 cm.

b) Merkataan kolmion korkeutta kirjaimella h. Muodostetaan panta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä h.

$$\begin{aligned} \frac{24\cdot h}{2}&=192 \qquad \qquad \left|:\frac{24}{2}\right. \\ h&=192:\frac{24}{2} \\ h&=192\cdot\frac{2}{24} \\ h&=16\text{ (cm)} \end{aligned}$$

23.

Merkataan tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksia x ja $5x$. Koska puolisuunnikkaan korkeus on yhtä pitkä kuin lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista, merkataan sitäkin kirjaimella x. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

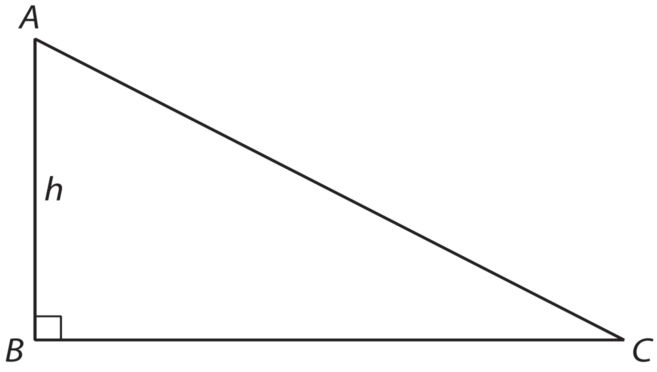
$$\begin{aligned}
\frac{x+5x}{2}\cdot x &= 12 && |\cdot 2\\
6x\cdot x &= 24\\
6x^2 &= 24 && |:6\\
x^2 &= 4\\
x &= \pm 2
\end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $x = 2$.

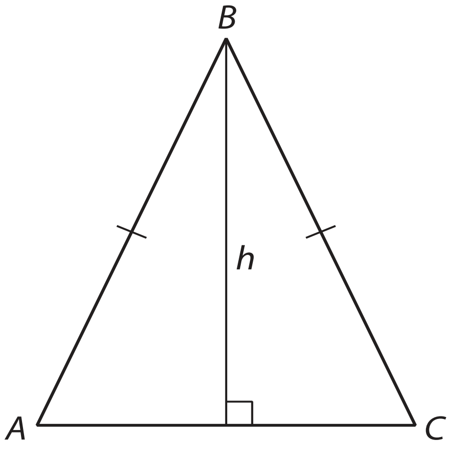
Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 2 cm ja $5\cdot 2\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.

24.

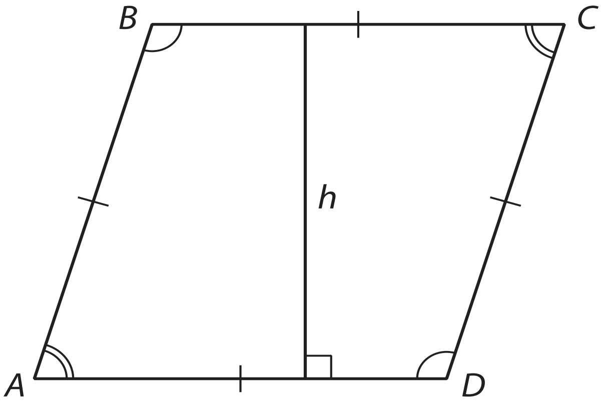
a)



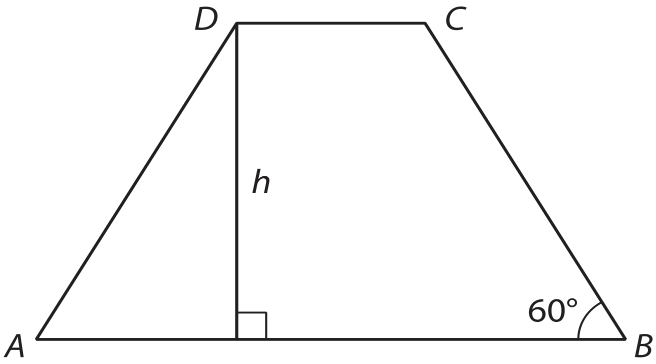
b)



c)



d)



25.

Magneettitaulun leveys on 180 cm = 1,80 m ja korkeus 110 cm = 1,10 m. Lasketaan magneettitaulun pinta-ala.

$$A = 1{,}80\,\mathrm{m} \cdot 1{,}10\,\mathrm{m} = 1{,}98\,\mathrm{m}^2$$

Koska magneettitaulu maalataan kolmeen kertaan, niin maalia tulee ostaa $3 \cdot 1{,}98\,\mathrm{m}^2 = 5{,}94\,\mathrm{m}^2$ pinta-alalle.

Litralla saadaan maalattua 1,4 neliömetriä. Lasketaan, kuinka monta litraa magneettimaalia menee yhteensä.

$$\frac{5{,}94\,\mathrm{m}^2}{1{,}4\,\mathrm{m}^2/\mathrm{l}} = 4{,}24285...\,\mathrm{l}$$

Koska maalia myydään 0,5 litran purkissa purkkeja tulee ostaa

$$\frac{4{,}24285...\,\mathrm{l}}{0{,}5\,\mathrm{l}} = 8{,}4857... \approx 9\ \mathrm{kpl}\,.$$

Lasketaan kuinka paljon 9 purkkia maalia maksaa.

$$52{,}90\ € \cdot 9 = 476{,}10\ €$$

Maalaamista varten ostettava magneettimaali maksaa 476 euroa.

1.2 Ympyrä

26.

a) $2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$

b) $2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\pi$

c) $2 \cdot \pi \cdot \pi = 2\pi^2$

27.

a) Kun halkaisijan pituus on 14, säteen pituus on $14:2=7$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot 7^2=49\pi$.

b) Kun halkaisijan pituus on $\frac{2}{5}$, säteen pituus on $\frac{2}{5}:2=\frac{1}{5}$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}\pi=\frac{\pi}{25}$

c) Kun halkaisijan pituus on $\frac{\pi}{2}$, säteen pituus on $\frac{\pi}{2}:2=\frac{\pi}{4}$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\pi\cdot\frac{\pi^2}{4^2}=\pi\cdot\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^3}{16}$.

28.

a) Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$p = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 20\pi$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

b) Merkataan ympyrän sädettä kirjaimella *r*. Muodostetaan ympyrän pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä *r*.

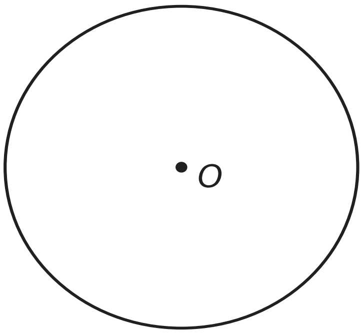
$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 36 \qquad\qquad |: \pi \\ r^2 &= \frac{36}{\pi} \\ r &= \pm\sqrt{\frac{36}{\pi}} = \pm\frac{6}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Koska pinta-ala on aina positiivista, $r = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$.

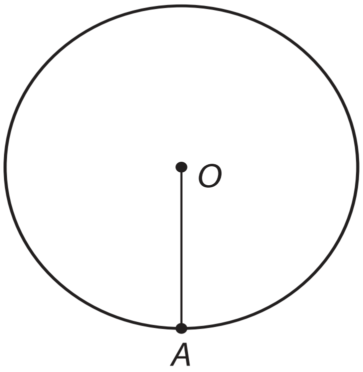
Lasketaan ympyrän halkaisija.

$$d = 2r = 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{12}{\sqrt{\pi}}$$

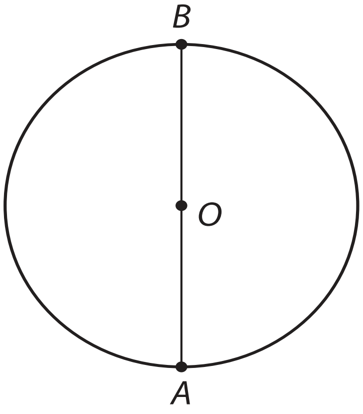
29.



a)

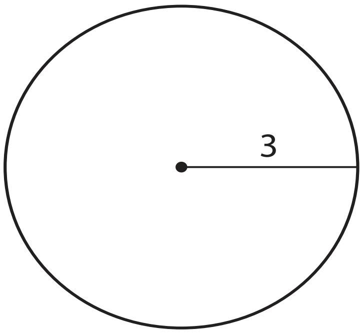


b)



30.

a)



b) Lasketaan ympyrän halkaisija säteen avulla.

$d = 2r = 2 \cdot 3$

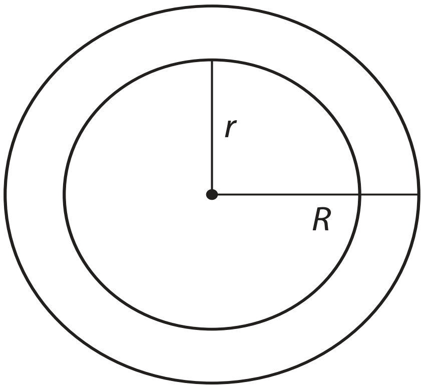
c) Kehän pituus on halkaisijan ja piin tulo:

$p = d \cdot \pi = 6 \cdot \pi = 6\pi$

d) Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^3 = 9\pi$

31.



32.

a) Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$p = 2 \cdot \pi \cdot 13{,}2\text{ cm} = 82{,}938046...\text{ cm} \approx 82{,}9\text{ cm}$

b) Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$A = \pi \cdot (13{,}2\text{ cm})^2 = 547{,}391103...\text{ cm}^2 \approx 547\text{ cm}^2$

33.

a) Lasketaan ensin koko nelikulmion pinta-ala ja vähennetään siitä ympyröiden pinta-ala.

Nelikulmion korkeus on 7,2 cm, joten ympyrän halkaisija on 7,2 cm. Koska nelikulmion sisällä on kaksi ympyrää, joiden halkaisija on 7,2 cm, nelikulmion leveys on $2 \cdot 7{,}2 \text{ cm} = 14{,}4 \text{ cm}$.

Lasketaan nelikulmion pinta-ala.

$$A_1 = 14{,}4 \text{ cm} \cdot 7{,}2 \text{ cm} = 103{,}68 \text{ cm}^2$$

Koska ympyrän halkaisija on 7,2 cm, ympyrän säde on $7{,}2 \text{ cm} : 2 = 3{,}6 \text{ cm}$.

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_2 = \pi \cdot (3{,}6 \text{ cm})^2 = 40{,}715040... \text{ cm}^2$$

Lasketaan molempien ympyröiden pinta-ala.

$$2A_2 = 2 \cdot 40{,}715040... \text{ cm}^2 = 81{,}4300815... \text{ cm}^2$$

Nyt voidaan laskea väritetyn alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 - 2A_2 \\ &= 103{,}68 \text{ cm}^2 - 81{,}4300815 \text{ cm}^2 \\ &= 22{,}24991... \text{ cm}^2 \\ &\approx 22 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin koko nelikulmion pinta-ala ja vähennetään siitä ympyröiden pinta-ala.

Nelikulmion leveys on 25,0 mm ja kahden ympyrän halkaisija on 25,0 mm, joten ympyrän halkaisija on $25{,}0\text{ mm} : 2 = 12{,}5\text{ mm}$. Nelikulmion korkeus on myös kaksi ympyrän halkaisijaa, joten nelikulmion korkeus on myös 25,0 mm.

Lasketaan nelikulmion pinta-ala.

$$A_1 = 25{,}0\text{ mm} \cdot 25{,}0\text{ mm} = 625\text{ mm}^2$$

Ympyrän halkaisija on 12,5 mm, joten ympyrän säde on $12{,}5\text{ mm} : 2 = 6{,}25\text{ mm}$.

Lasketaan yhden ympyrän pinta-ala.

$$A_2 = \pi \cdot (6{,}25\text{ mm})^2 = 122{,}718463...\text{ mm}^2$$

Lasketaan kaikkien ympyröiden pinta-ala.

$$4A_2 = 4 \cdot 122{,}718463...\text{ mm}^2 = 490{,}8738521...\text{ mm}^2$$

Nyt voidaan laskea väritetyn alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 - 4A_2 \\ &= 625\text{ mm}^2 - 490{,}8738521...\text{ mm}^2 \\ &= 134{,}126147876...\text{ mm}^2 \\ &\approx 134\text{ mm}^2 \end{aligned}$$

34.

Kuvio muodostuu neliöstä ja kahdesta puoliympyrästä. Neliön sivun pituus on 3,0 cm ja puoliympyröiden halkaisijat ovat 3,0 cm, joten puoliympyröiden säde on $3{,}0\ \text{cm} : 2 = 1{,}5\ \text{cm}$. Kuvion piiri muodostuu neliön kahdesta sivusta sekä puoliympyröiden kehistä.

Lasketaan kahden puoliympyrän eli yhden ympyrän kehän pituus.

$$p_1 = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}5\ \text{cm} = 9{,}424777960...\ \text{cm}$$

Lasketaan koko kuvion pinta-ala.

$$p = p_1 + 3{,}0\ \text{cm} + 3{,}0\ \text{cm} = 15{,}424777960...\ \text{cm} \approx 15\ \text{cm}$$

Kuvion pinta-ala muodostuu neliöstä ja ympyrästä.

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_1 = \pi \cdot (1{,}5\ \text{cm})^2 = 7{,}0685834...\ \text{cm}^2$$

Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_2 = 3{,}0\ \text{cm} \cdot 3{,}0\ \text{cm} = 9{,}0\ \text{cm}^2$$

Nyt voidaan laskea koko kuvion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= 7{,}0685834...\ \text{cm}^2 + 9{,}0\ \text{cm}^2 \\ &= 16{,}068534...\ \text{cm}^2 \\ &\approx 16\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

35.

a) Maalauksen halkaisija on 130,8 cm, joten maalauksen säde on

130,8 cm : 2 = 65,4 cm.

Lasketaan maalauksen ympärysmitta eli kehän pituus.

$$2 \cdot \pi \cdot 65{,}4\ \text{cm} = 410{,}920319...\ \text{cm} \approx 410{,}9\ \text{cm}$$

b) Lasketaan maalauksen pinta-ala.

$$\pi \cdot (65{,}4\ \text{cm})^2 = 13\,437{,}09443...\ \text{cm}^2 \approx 13\,440\ \text{cm}^2$$

36.

a) Muodostetaan ympyrän kehän yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 75 \text{ cm} \\ r &= 11{,}936620\ldots \text{ cm} \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea ympyrän halkaisija.

$$d = 2r = 2 \cdot 11{,}936620\ldots \text{ cm} = 23{,}8732414\ldots \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}$$

b) Nyt kun tiedetään ympyrän säde *r*, voidaan laskea ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi \cdot (11{,}936620\ldots \text{ cm})^2 \\ &= 447{,}623277\ldots \text{ cm}^2 \\ &\approx 450 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

37.

Pöydän ympärysmitta eli kehän pituus on 314 cm. Muodostetaan kehän yhtälö ja ratkaistaan siitä *r*.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 314\ \text{cm} \\ r &= \frac{314\ \text{cm}}{2\pi} \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi \cdot \left(\frac{314\ \text{cm}}{2\pi}\right)^2 \\ &= 7846{,}0203845...\ \text{cm}^2 \\ &\approx 7850\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

38.

Lasketaan kaula-aukon säde ja kauluksen säde. Merkitään kaula-aukon sädettä kirjaimella x ja kauluksen sädettä kirjaimella y.

Muodostetaan kaula-aukon kehänpituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 2\pi x &= 35 \\ x &= \frac{35}{2\pi} \end{aligned}$$

Muodostetaan kauluksen kehänpituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä y.

$$\begin{aligned} 2\pi y &= 85 \\ y &= \frac{85}{2\pi} \end{aligned}$$

Kauluksen leveys lasketaan vähentämällä kaula-aukon säde kauluksen säteestä.

$$\begin{aligned} y - x &= \frac{85}{2\pi}\ \text{cm} - \frac{35}{2\pi}\ \text{cm} \\ &= \frac{50}{2\pi}\ \text{cm} \\ &= 7{,}957747...\ \text{cm} \\ &\approx 8{,}0\ \text{cm} \end{aligned}$$

39.

a) Merkitään ympyrän säteen pituutta kirjaimella *r*. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 230 \\ r &= \pm\sqrt{\frac{230}{\pi}} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{230}{\pi}}$.

Ympyrän halkaisija *d* on kaksi kertaa pitempi kuin säde. Lasketaan ympyrän halkaisija.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{230}{\pi}} \text{ cm} \\ &= 17{,}112717\ldots \text{ cm} \\ &\approx 17 \text{ cm} \end{aligned}$$

b) Merkitään ympyrän säteen pituutta kirjaimella *r*. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 12{,}6 \\ r &= \pm\sqrt{\frac{12{,}6}{\pi}} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{12{,}6}{\pi}}$.

Ympyrän halkaisija *d* on kaksi kertaa pitempi kuin säde. Lasketaan ympyrän halkaisija.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{12{,}6}{\pi}}\ \text{cm} \\ &= 4{,}005348...\ \text{cm} \\ &\approx 4{,}01\ \text{cm} \end{aligned}$$

40.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r*. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä *r*.

$$\begin{aligned}\pi r^2 &= 63{,}6\\ r &= \pm\sqrt{\frac{63{,}6}{\pi}}\end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r=\sqrt{\frac{63{,}6}{\pi}}$.

Muodostetaan ympyrän kehäpituuden yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned}2\pi r &= 2\pi\sqrt{\frac{63{,}6}{\pi}}\ \text{cm}\\ &= 28{,}270500...\ \text{cm}\\ &\approx 28{,}3\ \text{cm}\end{aligned}$$

41.

Muutetaan Lehtijärven pinta-ala neliökilometreiksi.

$700 \text{ ha} = 7 \text{ km}^2$

Merkitään järven sädettä kirjaimella *r*. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä *r*.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 7 \\ r &= \pm\sqrt{\frac{7}{\pi}} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{7}{\pi}}$.

Halkaisija *d* on kaksi kertaa suurempi kuin säde. Lasketaan halkaisijan pituus.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2{,}98541066... \text{ km} \\ &= 3{,}0 \text{ km} \end{aligned}$$

42.

Merkitään ympyrän ja neliön piiriä kirjaimella *p*. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella *x*. Lasketaan neliön sivun pituus.

$$x + x + x + x = p$$
$$x = \frac{p}{4}$$

Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_{\text{neliö}} = x \cdot x = \frac{p}{4} \cdot \frac{p}{4} = \frac{p^2}{16}$$

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r*. Muodostetaan ympyrän kehäpituuden yhtälö ja ratkaistaan *r*.

$$2\pi r = p$$
$$r = \frac{p}{2\pi}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}$$

Lasketaan, kuinka paljon neliön pinta-ala on pienempi kuin ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned}\frac{A_{\text{ympyrä}}-A_{\text{neliö}}}{A_{\text{ympyrä}}}&=\frac{\frac{p^2}{4\pi}-\frac{p^2}{16}}{\frac{p^2}{4\pi}}\\&=1-\frac{\pi}{4}\\&=0,2146018366...\\&\approx 0,215\\&=21,5\%\end{aligned}$$

b) Lasketaan kuinka paljon ympyrän pinta-ala on suurempi kuin neliön pinta-ala.

$$\frac{A_{\text{ympyrä}} - A_{\text{neliö}}}{A_{\text{neliö}}} = \frac{\frac{p^2}{4\pi} - \frac{p^2}{16}}{\frac{p^2}{16}}$$

$$= \frac{4}{\pi} - 1$$

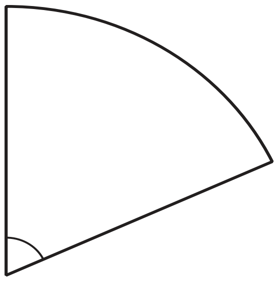
$$= 0{,}273239...$$

$$\approx 0{,}273$$

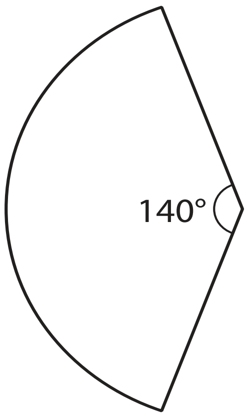
$$= 27{,}3\%$$

43.

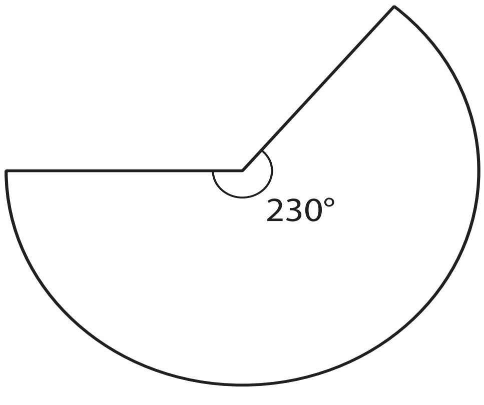
a)



b)

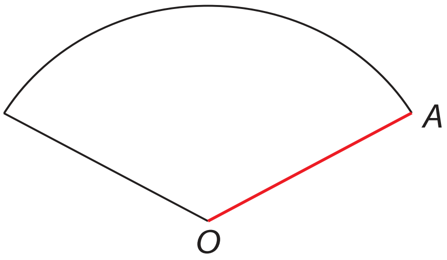


c)

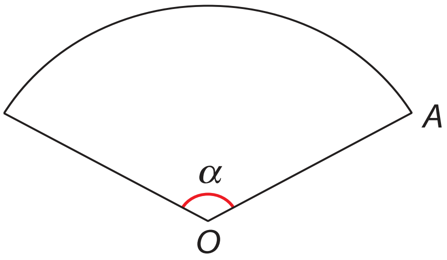


44.

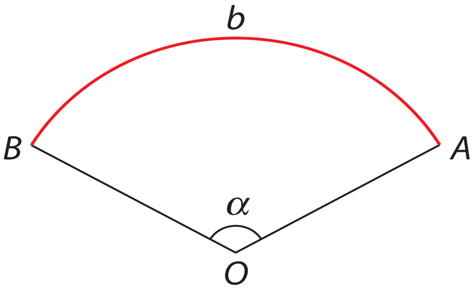
a)



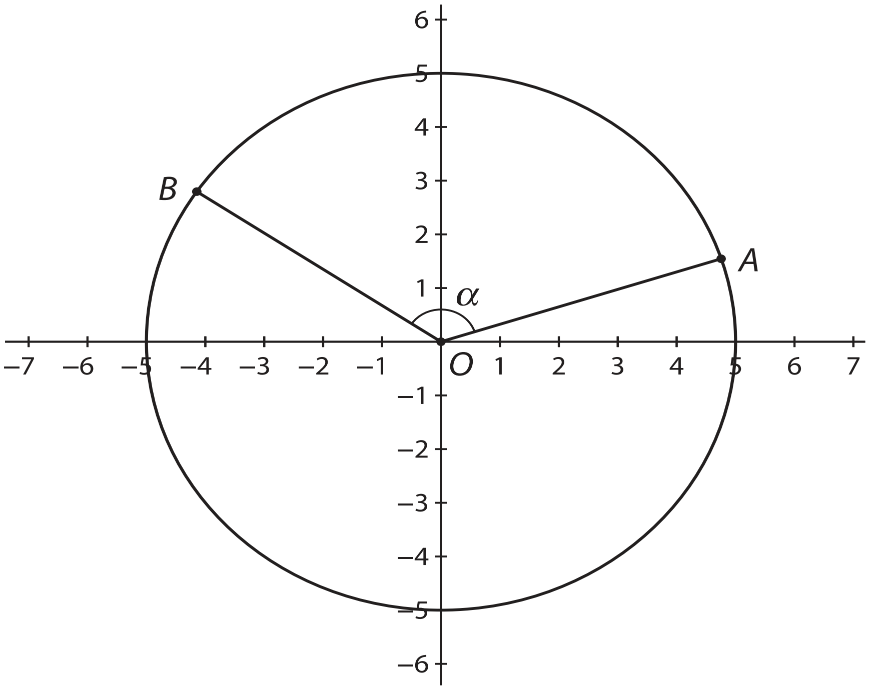
b)



c)



45.



B
A
α
O
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6

46.

a) Lasketaan sektorin kaarenpituus.

$$b = \frac{70,87°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2,9 \text{ cm} = 3,587053... \text{ cm} \approx 3,6 \text{ cm}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{70,87°}{360°} \cdot \pi \cdot (2,9 \text{ cm})^2 = 5,2012269... \text{ cm}^2 \approx 5,2 \text{ cm}^2$$

b) Lasketaan sektorin kaarenpituus.

$$b = \frac{300,94°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1,55 \text{ m} = 8,141210... \text{ m} \approx 8,14 \text{ m}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{300,94°}{360°} \cdot \pi \cdot (1,55 \text{ m})^2 = 6,309438... \text{ m}^2 \approx 6,31 \text{ m}^2$$

47.

a) Pitsanpalan säde on puolet pitsan halkaisijasta eli $34\text{ cm} : 2 = 17\text{ cm}$.

Pitsanpalan pinta-ala on

$$\frac{25°}{360°} \cdot \pi \cdot (17\text{ cm})^2 = 63{,}05001...\text{ cm}^2 \approx 63\text{ cm}^2$$

b) Lasketaan pitsanpalan ulkoreunan eli kehänpituus.

$$p = \frac{25°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 17\text{ cm} = 7{,}417649...\text{ cm} \approx 7{,}4\text{ cm}$$

48.

a) Viuhkan pinta-ala on

$$A = \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (24\ \text{cm})^2 = 376{,}99111...\ \text{cm}^2 \approx 380\ \text{cm}^2$$

b) Lasketaan viuhkan ulkoreunan pituus eli sektorin kehänpituus.

$$b = \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 24\ \text{cm} = 31{,}415926...\ \text{cm} \approx 31\ \text{cm}$$

49.

Lasketaan ensin sektorin pinta-ala ja vähennetään siitä suorakolmion pinta-ala.

Koska keskuskulma on suorakulma, se on 90°. Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{90°}{360°} \cdot \pi \cdot (13\text{ cm})^2 = 132,732289...\text{ cm}^2$$

Lasketaan suorakolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{13\text{ cm} \cdot 13\text{ cm}}{2} = 84,5\text{ cm}^2$$

Nyt voidaan laskea väritetyn alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} &= 132,732289...\text{ cm}^2 - 84,5\text{ cm}^2 \\ &= 48,232289...\text{ cm}^2 \\ &\approx 48\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

50.

Lasketaan, kuinka paljon rimaa tarvitaan puoliympyrän alla olevaan nelikulmioon.

Nelikulmiossa on 12 x:n suuntaista riman pätkää sekä 10 y:n suuntaista riman pitkää. Lasketaan, kuinka paljon rimaa nelikulmioon tarvitaan.

$$12x+10y=12\cdot 20\,\text{cm}+10\cdot 40\,\text{cm}=240\,\text{cm}+400\,\text{cm}=640\,\text{cm}$$

Puoliympyrän säde on $2x$. Puoliympyrässä on kolme säteen pituista rimaa. Lasketaan niiden pituus.

$$2x\cdot 3=2\cdot 20\,\text{cm}\cdot 3=120\,\text{cm}\,.$$

Puoliympyrässä on käytetty rimaa kahteen kaareen. Pienemmän kaaren säde on x (20 cm) ja puolikaari on oikokulma eli 180°. Lasketaan lyhyemmän kaaren pituus.

$$b_1=\frac{180^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 20\text{ cm}=62{,}831853...\text{ cm}$$

Suuremman kaaren pituus on $2x$ $(2x=2\cdot 20\text{ cm}=40\text{ cm})$. Lasketaan suuremman kaaren pituus.

$$b_2=\frac{180^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 40\text{ cm}=125{,}663706...\text{ cm}$$

Lasketaan kaikki pituudet yhteen, niin saadaan, kuinka paljon rimaa tarvitaan kyseiseen kaari-ikkunaan.

$$\begin{aligned}640\text{ cm}+120\text{ cm}+62{,}831853...\text{ cm}+125{,}663706\text{ cm}&=948{,}49555...\text{ cm}\\&\approx 948\text{ cm}\end{aligned}$$

51.

Pinta-alan laskemiseen tarvitaan sektorin keskuskulma. Merkitään sitä kirjaimella α.

Aukon halkaisija on 3,4 cm, eli ananasrenkaan aukon säde on
$3,4\ \text{cm} : 2 = 1,7\ \text{cm}$.

Ananasrenkaan säde on
$\text{aukon säde} + \text{renkaan leveys} = 1,7\ \text{cm} + 3,2\ \text{cm} = 4,9\ \text{cm}$.

Koska pienemmän sektorin kaaren pituus ja säteen pituus tunnetaan, α voidaan ratkaista yhtälön avulla.

$$4,4 = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi \cdot 4,9$$
$$\alpha = 51,44927...^\circ$$

Suuremman sektorin ala on

$$A_1 = \frac{51,44927...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (4,9\ \text{cm})^2 = 10,78\ \text{cm}^2$$

Pienemmän sektorin ala on

$$A_2 = \frac{51,44927...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (1,7\ \text{cm})^2 = 1,29755...\ \text{cm}^2$$

Leikatun palan pinta-ala on tällöin

$$A_1 - A_2 = 10,78\ \text{cm}^2 - 1,29755...\ \text{cm}^2 = 9,48244...\ \text{cm}^2 \approx 9,5\ \text{cm}^2$$

52.

Heittokehän halkaisija on 2,1 m, joten sen säde on $2{,}1\ \text{m} : 2 = 1{,}05\ \text{m}$.

Koska kuulantyönnön pituus mitataan heittoringin etuosasta, putoamisalue on $1{,}05\ \text{m} + 25\ \text{m} = 26{,}05\ \text{m}$:n päässä heittokehän keskipisteestä.

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_1 = \frac{34{,}9°}{360°} \cdot \pi \cdot (26{,}05\ \text{m}) = 206{,}675...\ \text{m}^2$$

Lasketaan heittoringin sektorin pinta-ala.

$$A_2 = \frac{34{,}9°}{360°} \cdot \pi \cdot (1{,}05\ \text{m})^2 = 0{,}3357...\ \text{m}^2$$

Putoamisalueen ala saadaan vähentämällä heittoringin sektorin ala ison sektorin alasta.

$$A_1 - A_2 = 206{,}675...\ \text{m}^2 - 0{,}3357...\ \text{m}^2 = 206{,}339...\ \text{m}^2 \approx 206\ \text{m}^2$$

53.

Lasketaan sektorin keskuskulma, merkitään sitä kirjaimella α.

$$5{,}5 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 5{,}5$$
$$\alpha = 57{,}295...^\circ$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{57{,}295...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (5{,}5\ \text{dm})^2 = 15{,}125\ \text{dm}^2 \approx 15\ \text{dm}^2$$

54.

Lasketaan sektorin säteen pituus. Merkataan sitä kirjaimella *r*.

$$125 = \frac{65°}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$$
$$r = \pm 14,844... \text{ cm}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = 14,844... \text{ cm}$.

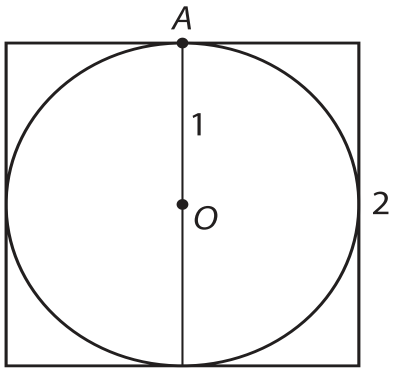
Lasketaan sektorin kehänpituus.

$$b = \frac{65°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 14,844... \text{ cm} = 16,8409... \text{ cm}$$

Sektorissa on kaksi sädettä ja ulkokaari, joten paperin piiri on

$$2r + b = (14,844... \text{ cm}) \cdot 2 + 16,8409... \text{ cm} = 46,52... \text{ cm} \approx 47 \text{ cm}$$

55.



Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_{\text{neliö}} = 2 \cdot 2 = 4$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Lasketaan, kuinka paljon neliön pinta-ala on suurempi kuin ympyrän pinta-ala.

$$\frac{A_{\text{neliö}} - A_{\text{ympyrä}}}{A_{\text{ympyrä}}} = \frac{4-\pi}{\pi} = 0,27323... \approx 0,27 = 27\ \%$$

Neliön pinta-ala on 27 % suurempi kuin ympyrän pinta-ala.

56.

Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä ruokalautasen säde *r*.

$$\pi r^2 = 531$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{531}{\pi}}\ \text{cm}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{531}{\pi}}\ \text{cm}$.

Lautasen halkaisija on

$$d = 2r = 2\cdot\sqrt{\frac{531}{\pi}}\ \text{cm} = 26{,}00173452...\ \text{cm} \approx 26{,}0\ \text{cm}$$

Lasketaan lautasen ympärysmitta.

$$p = 2\pi r = 2\pi\sqrt{\frac{531}{\pi}}\ \text{cm} = 81{,}686858...\ \text{cm} \approx 81{,}7\ \text{cm}$$

57.

Muodostetaan ympyräsektorin kaaren pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä keskuskulma α.

$$5{,}62 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot (8{,}0 + 3{,}5)$$
$$\alpha = 28{,}0001...°$$

Lasketaan suuren ympyräsektorin pinta-ala.

$$A_1 = \frac{28{,}0001...°}{360°} \cdot \pi \cdot (8{,}0 + 3{,}5)^2 = 32{,}315 \text{ cm}^2$$

Lasketaan pienemmän ympyräsektorin pinta-ala.

$$A_2 = \frac{28{,}0001...°}{360°} \cdot \pi \cdot 8{,}0^2 = 15{,}638260... \text{ cm}^2$$

Väritetyn alueen ala saadaan vähentämällä suuren ympyräsektorin alasta pienen ympyräsektorin ala.

$$A_1 - A_2 = 32{,}315 \text{ cm}^2 - 15{,}638260... \text{ cm}^2 = 16{,}6767... \text{ cm}^2 \approx 17 \text{ cm}^2$$

58.

Muodostetaan ympyräsektorin kaaren pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r.

$$5{,}1=\frac{9^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi r$$
$$r=32{,}4676\ldots\text{ m}\approx 32{,}5\text{ m}$$

59.

CD-levyssä olevan aukon halkaisija on 15 mm, joten sen säde on $15\,\text{mm} : 2 = 7{,}5\,\text{mm}$.

Lasketaan CD-levyssä olevan aukon pinta-ala.

$$A_1 = \pi \cdot (7{,}5\,\text{mm})^2 = 176{,}71458...\,\text{mm}^2$$

Lasketaan koko CD-levyn pinta-ala.

$$11\,130\,\text{mm}^2 + 176{,}71458...\,\text{mm}^2 = 11\,306{,}71458...\,\text{mm}^2$$

Muodostetaan CD-levyn pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\pi r^2 = 11\,306{,}71458...\,\text{mm}^2$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{11\,306{,}71458...\,\text{mm}^2}{\pi}}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\dfrac{11\,306{,}71458...\,\text{mm}^2}{\pi}}$.

Lasketaan CD-levyn halkaisija.

$$d = 2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{11\,306{,}71458...\,\text{mm}^2}{\pi}} = 119{,}9839...\,\text{mm} \approx 120\,\text{mm}$$

1.3 Avaruuskappaleita

60.

Suorakulmaisessa särmiössä on kaksi pohjaa ja vaippa. Pohjien pinta-alat ovat

$$A_{\text{pohja}} = 5,0\ \text{cm} \cdot 6,0\ \text{cm} = 30\ \text{cm}^2$$

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri p.

$$p = 2 \cdot 5,0\ \text{cm} + 2 \cdot 6,0\ \text{cm} = 22\ \text{cm}$$

Muodostetaan lieriön pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeus h.

$$\begin{aligned}
A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\
104\ \text{cm}^2 &= 2 \cdot 30\ \text{cm}^2 + ph \\
104\ \text{cm}^2 &= 60\ \text{cm}^2 + 22\ \text{cm} \cdot h \\
44\ \text{cm}^2 &= 22\ \text{cm} \cdot h \qquad \Big| : 22\ \text{cm} \\
h &= \frac{44\ \text{cm}^2}{22\ \text{cm}} = 2,0\ \text{cm}
\end{aligned}$$

61.

Merkataan pohjan sivua kirjaimella x, tällöin särmiön korkeus on $h = x + 1$.

Lasketaan pohjien pinta-ala.

$$A_{\text{pohja}} = x \cdot x = x^2$$

Koska pohja on neliö, pohjan piiri on $p = 4 \cdot x = 4x$.

Muodostetaan lieriön pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ 10 &= 2 \cdot x^2 + 4x \cdot (x + 1) \\ 10 &= 2x^2 + 4x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$6x^2 + 4x - 10 = 0$$

Käytetään ratkaisukaavaa

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{12}$$

$$x = \frac{-4 \pm 16}{12}$$

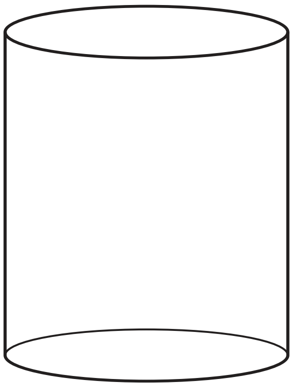
$$x = \frac{-4 + 16}{12} = 1 \text{ tai } x = \frac{-4 - 16}{12} = -\frac{5}{3}$$

Koska pituus on aina positiivista, $x = 1$.

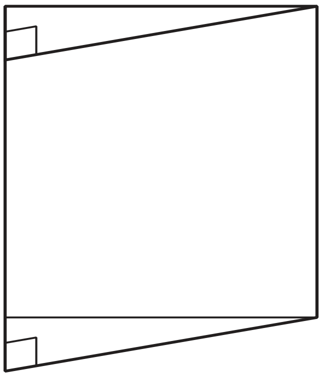
Pohjan sivut ovat 1 cm ja särmiön korkeus on 1 cm + 1 cm = 2 cm.

62.

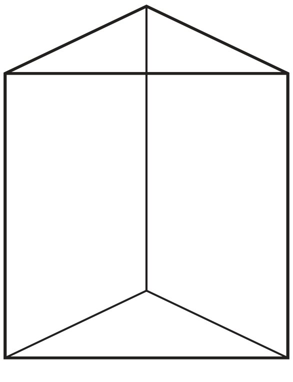
a)



b)

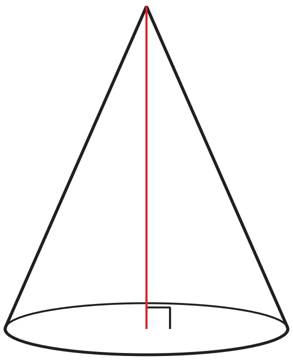


c)

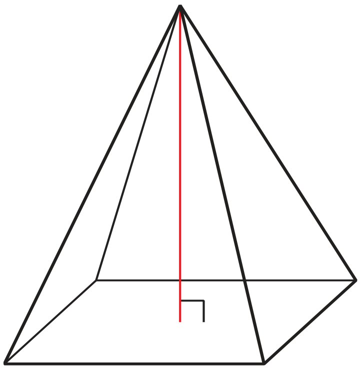


63.

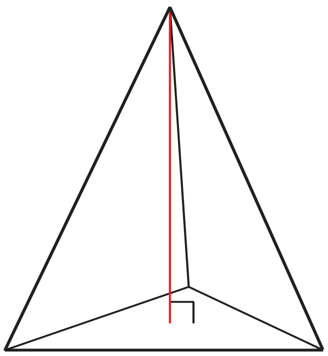
a)



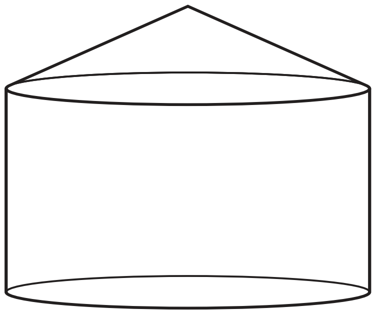
b)



c)



64.



65.

a) Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$$p = 2\pi \cdot 4{,}0\ \text{cm} = 8\pi\ \text{cm}$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= p \cdot h \\ &= 8\pi\ \text{cm} \cdot 7{,}0\ \text{cm} \\ &= 175{,}929...\ \text{cm} \approx 180\ \text{cm} \end{aligned}$$

b) Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi. 3,2 m = 320 cm.

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$$p = 2 \cdot 46\ \text{cm} + 2 \cdot 320\ \text{cm} = 732\ \text{cm}$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= p \cdot h \\ &= 732\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} \\ &= 7320\ \text{cm}^2 \approx 7300\ \text{cm}^2 = 0{,}73\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

c) Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi. 1,1 m = 110 cm.

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= \pi r s \\ &= \pi \cdot 110\text{ cm} \cdot 42\text{ cm} \\ &= 14\,514{,}158...\text{ cm}^2 \approx 15\,000\text{ cm}^2 = 1{,}5\text{ m}^2 \end{aligned}$$

d) Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A_{\text{vaippa}} = \frac{25\text{ cm} \cdot 75\text{ cm}}{2} \cdot 3 = 2\,812{,}5\text{ cm}^2 \approx 2\,800\text{ cm}^2 = 28\text{ dm}^2$$

66.

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$$p = 2 \cdot 3,5\ \text{m} + 2 \cdot 2,5\ \text{m} = 12\ \text{m}$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= p \cdot h \\ &= 12\ \text{m} \cdot 1,8\ \text{m} \\ &= 21,6\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

Kasvihuoneen katto muodostuu kahdesta nelikulmiosta. Lasketaan niiden pinta-ala.

$$A_{\text{katto}} = 2 \cdot 3,5\ \text{m} \cdot 1,35\ \text{m} = 9,45\ \text{m}$$

Lasketaan vielä kahden kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmiot}} = 2 \cdot \frac{0,5\ \text{m} \cdot 2,5\ \text{m}}{2} = 1,25\ \text{m}^2$$

Nyt voidaan laskea kaikki pinta-alat yhteen.

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{vaippa}} + A_{\text{katto}} + A_{\text{kolmiot}} \\ &= 21,6\ \text{m}^2 + 9,45\ \text{m}^2 + 1,25\ \text{m}^2 \\ &= 32,3\ \text{m}^2 \\ &\approx 32\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

67.

a) Lasketaan lieriön pohjien pinta-alat.

$A_{\text{pohja}} = \pi \cdot (5,2\ \text{cm})^2 = 84,948...\ \text{cm}^2$

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$p = 2\pi \cdot 5,2\ \text{cm} = 32,672...\ \text{cm}$

Lasketaan lieriön pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2 \cdot 84,948...\ \text{cm}^2 + 32,672...\ \text{cm} \cdot 15\ \text{cm} \\ &= 659,98...\ \text{cm}^2 \approx 660\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

b) Lasketaan lieriön pohjien pinta-alat.

$A_{\text{pohja}} = 43\ \text{cm} \cdot 43\ \text{cm} = 1849\ \text{cm}^2$

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$p = 43\ \text{cm} \cdot 4 = 172\ \text{cm}$

Lasketaan lieriön pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2 \cdot 1849\ \text{cm}^2 + 172\ \text{cm} \cdot 65\ \text{cm} \\ &= 14\,878\ \text{cm}^2 \approx 15\,000\ \text{cm}^2 = 1,5\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

68.

Muodostetaan pohjan piirin yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$75{,}4 = 2\pi r$$

$$r = \frac{75{,}4}{2\pi}$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= \pi r s \\ &= \pi \cdot \frac{75{,}4}{2\pi} \cdot 32{,}3 \\ &= 1217{,}71\ \text{cm}^2 \\ &\approx 1220\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

69.

a) Vaipassa on 4 yhtä suurta tasasivuista kolmiota, joiden kanta on 16,0 cm ja korkeus on 32,0 cm. Lasketaan niiden ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16{,}0 \text{ cm} \cdot 32{,}0 \text{ cm} \\ &= 1024 \text{ cm}^2 \approx 1020 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

b) Lasketaan pohjan piiri.

$$p = 16{,}0 \text{ cm} + 16{,}0 \text{ cm} + 16{,}0 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$$

Muodostetaan vaipan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeus *h*.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= p \cdot h \\ 1024 &= 48 \cdot h \\ h &= 21{,}333... \text{ cm} \approx 21{,}3 \text{ cm} \end{aligned}$$

70.

a) Muodostetaan vaipan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä pohjaympyrän säde *r*.

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s$$

$$17 \text{ dm}^2 = \pi r \cdot 4{,}8 \text{ dm}$$

$$r = 1{,}127\ldots \text{ dm} \approx 1{,}1 \text{ dm}$$

b) Merkataan paketin mittoja $2x$, $10x$ ja $15x$.

Paketin pohjan piiri on tällöin.

$$p = 2 \cdot 2x + 2 \cdot 10x = 24x$$

Muodostetaan lieriön pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ 16 &= 2 \cdot (2x \cdot 10x) + (24x \cdot 15x) \\ 16 &= 40x^2 + 360x^2 \\ 400x^2 &= 16 \\ x &= \pm 0{,}2 \text{ (dm)} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $x = 0{,}2 \text{ dm} = 2{,}0 \text{ cm}$.

Muropaketin mitat ovat:

$$2x = 2 \cdot 2{,}0 \text{ cm} = 4{,}0 \text{ cm}$$

$$10x = 10 \cdot 2{,}0 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$15x = 15 \cdot 2{,}0 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$$

71.

Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi. $1,5\ \text{dm}^2 = 150\ \text{cm}^2$

Kartion pohjan halkaisija on 6,0 cm, joten sen halkaisija on
6,0 cm : 2 = 3,0 cm.

Muodostetaan kartion vaipan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä kartion sivujanan *s* pituus.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= \pi r s \\ 150 &= \pi \cdot 3,0 \cdot s \\ s &= 15,915...\ \text{cm} \approx 16\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

72.

Merkataan leivoslaatikon pohjan sivua kirjaimella x. Tällöin korkeus on $(1-0,6)x=0,4x$.

Lasketaan pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohja}}=x\cdot x=x^2$$

Lasketaan pohjan piiri vaipan pinta-alaa varten.

$$p=4\cdot x=4x$$

Muodostetaan leivoslaatikon pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} A&=A_{\text{pohja}}+A_{\text{vaippa}}\\ 2,6&=x^2+4x\cdot 0,4x\\ x&=\pm 1\ \text{(dm)} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivinen, $x=1\text{ dm}$.

Laatikon leveys on 1 dm = 10 cm.

73.

Merkitään pohjasärmää $4x$ ja sivutahkon korkeutta $7x$.

Lasketaan pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohja}} = 4x \cdot 4x = 16x^2$$

Pyramidin vaippa koostuu 4 yhtä suuresta kolmiosta. Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 7x = 56x^2$$

Kun pyramidin kokonaispinta-ala on 2 592 cm^2, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 2\,592 &= 16x^2 + 56x^2 \\ x &= \pm 6 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $x = 6 \text{ cm}$.

Sivutahkon korkeus on $7 \cdot 6 \text{ cm} = 42 \text{ cm}$.

74.

Lasketaan sivujanan pituus s 180° ympyräsektorin pinta-alasta.

$$\begin{aligned} A &= 6{,}90 \\ \frac{180^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot s^2 &= 6{,}90 \\ s &= \pm 2{,}0958... \approx \pm 2{,}10 \text{ (dm)} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $s = 2{,}10 \text{ dm}$.

Nyt voidaan laskea ympyräkartion pohjan säde r ympyräkartion vaipan pinta-alan yhtälöstä.

$$\begin{aligned} A &= \pi r s \\ 6{,}9 &= \pi\cdot 2{,}10\cdot r \\ r &= 1{,}04587... \\ r &\approx 1{,}05 \text{ (dm)} \end{aligned}$$

75.

a) Lasketaan suoran lieriön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_\mathrm{p} \cdot h \\ &= \pi \cdot (3,0)^2 \cdot 6,0 \\ &= 169,6460... \\ &\approx 170\ \mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

b) Lasketaan suoran särmiön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_\mathrm{p} \cdot h \\ &= 240 \cdot 51 \\ &= 12\ 240 \\ &\approx 12\ 000\ \mathrm{cm}^3 = 12\ \mathrm{dm}^3 \end{aligned}$$

c) Lasketaan kartion tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_\mathrm{p} \cdot h}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot 4,1^2 \cdot 28}{3} \\ &= 492,89494... \\ &\approx 490\ \mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

d) Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$\begin{aligned}V &= \frac{A_\text{p} \cdot h}{3} \\ &= \frac{23 \cdot 13 \cdot 65}{3} \\ &= 6478{,}333... \\ &\approx 6500 \text{ cm}^3 = 6{,}5 \text{ dm}^3\end{aligned}$$

76.

a) Lasketaan pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (6,8)^3 \\ &= 1317,08968...\ \text{cm}^3 \\ &\approx 1300\ \text{cm}^3 = 1,3\ \text{dm}^3 = 1,3\ \text{l} \end{aligned}$$

b) Pallon halkaisija *d* on 16,0 cm, joten pallon säde *r* on

$$d = 2r$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{16,0\ \text{cm}}{2} = 8\ \text{cm}$$

Lasketaan pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (8,0)^3 \\ &= 2144,6605...\ \text{cm}^3 \\ &\approx 2100\ \text{cm}^3 = 2,1\ \text{dm}^3 = 2,1\ \text{l} \end{aligned}$$

77.

Helmen säde voidaan ratkaista helmen ympärysmitan avulla. Merkitään helmen sädettä kirjaimella *r*.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 2,4 \\ r &= 0,38197... \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Lasketaan yhden helmen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (0,38197... \text{ cm})^3 \\ &= 0,23344... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Pallon tiheys ρ lasketaan massan m ja tilavuuden V avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

$$m = \rho \cdot V$$

Lasketaan 34 samankokoisen helmen massa.

$$\begin{aligned} m &= 34 \cdot \rho \cdot V \\ &= 34 \cdot 2,8 \text{ g/cm}^3 \cdot 0,23344... \text{ cm}^3 \\ &= 22,2238... \text{ g} \\ &\approx 22 \text{ g} \end{aligned}$$

78.

Kuun halkaisija *d* on 3 474 km, joten Kuun säde *r* on

$$d = 2r$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{3474}{2} = 1737 \text{ (km)}$$

Lasketaan Kuun tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (1737 \text{ km})^3 \\ &= 2{,}1952... \cdot 10^{10} \text{ km}^3 \end{aligned}$$

Maan halkaisija *d* on 12 756 km, joten Maan säde on

$$d = 2r$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{12\,756}{2} = 6378 \text{ (km)}$$

Lasketaan Maan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (6378 \text{ km})^3 \\ &= 1{,}086781... \cdot 10^{12} \text{ km}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka paljon Kuun tilavuus on Maan tilavuudesta.

$$\begin{aligned}1-\frac{V_{\text{maa}}-V_{\text{kuu}}}{V_{\text{maa}}}&=1-\frac{1{,}086781\ldots\cdot 10^{12}\ \text{km}^3-2{,}1952\ldots\cdot 10^{10}\ \text{km}^3}{1{,}086781\ldots\cdot 10^{12}\ \text{km}^3}\\&=0{,}0201997\ldots\\&\approx 0{,}020=2{,}0\ \%\end{aligned}$$

79.

Jäätelöpallon tilavuus on 1,20 dl = 0,12 l = 0,12 dm^3 = 120 cm^3.

Jäätelöpallon säde voidaan ratkaista tilavuuden avulla. Merkitään jäätelöpallon sädettä kirjaimella *r*.

$$\begin{aligned} 120 &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ r &= 3{,}05983\ldots \text{ cm} \end{aligned}$$

Lasketaan pallon pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi \cdot (3{,}05983\ldots \text{ cm})^2 \\ &= 117{,}653528\ldots \text{ cm}^2 \\ &\approx 118 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

80.

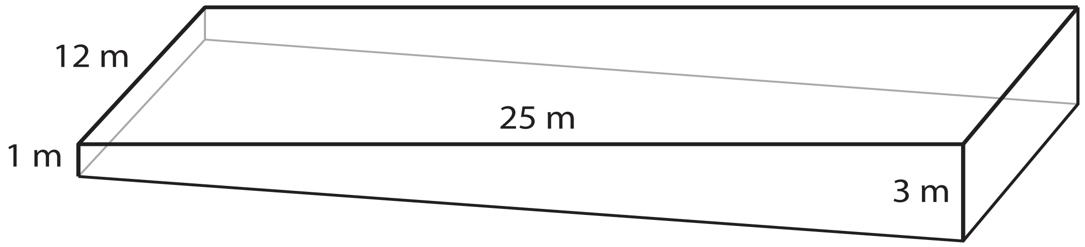
Muutetaan arvot desimetreiksi.

- 7,0 mm = 0,07 dm
- 4,5 m = 45 dm
- 3,7 m = 37 dm

Lasketaan veden määrä.

$V = 45 \text{ dm} \cdot 37 \text{ dm} \cdot 0,07 \text{ dm} = 116,55 \text{ dm}^3 \approx 117 \text{ dm}^3 = 117 \text{ l}$

81.



Lasketaan ensin suora särmiön muotoinen alue, jonka mitat ovat
1 m × 12 m × 25 m.

$$V_1 = 1\text{ m} \cdot 12\text{ m} \cdot 25\text{ m} = 300\text{ m}^3 = 300\,000\text{ dm}^3$$

Lasketaan jäljelle jäänyt kolmiomuotoisen lieriön tilavuus.

$$V_2 = A_\text{p} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\text{ m} \cdot 25\text{ m} \cdot 12\text{ m} = 300\text{ m}^3 = 300\,000\text{ dm}^3$$

Lasketaan tilavuudet yhteen.

$$V_2 + V_1 = 300\,000\text{ dm}^3 + 300\,000\text{ dm}^3 = 600\,000\text{ dm}^3 = 600\,000\text{ l}$$

82.

Lasketaan ensin harjakaton tilavuus.

Harjakattoinen talo muodostuu suorasta särmiöstä sekä kolmion muotoisesta lieriöstä.

Lasketaan särmiön tilavuus.

$$V_1 = 22,0\text{ m} \cdot 14,0\text{ m} \cdot 3,20\text{ m} = 985,6\text{ m}^3$$

Kolmiomuotoisen lieriön korkeus on 4,82 m – 3,20 m = 1,62 m, leveys on 14 m ja syvyys on 22 m. Lasketaan tämän tilavuus.

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,62\text{ m} \cdot 14\text{ m} \cdot 22\text{ m} = 249,48\text{ m}^3$$

Lasketaan harjakattoisen talon tilavuus.

$$\begin{aligned} V_{\text{harjakattoinen}} &= V_1 + V_2 \\ &= 985,6\text{ m}^3 + 249,48\text{ m}^3 \\ &= 1235,08\text{ m}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan tasakattoisen talon tilavuus.

$$V_{\text{tasakattoinen}} = 22,0\text{ m} \cdot 14,0\text{ m} \cdot 4,82\text{ m} = 1\,484,56\text{ m}^3$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia suurempi on tasakattoinen talon tilavuus harjakattoiseen talon tilavuuteen verrattuna.

$$\begin{aligned}\frac{V_{\text{tasakattoinen}}-V_{\text{harjakattoinen}}}{V_{\text{harjakattoinen}}}&=\frac{1\,484,56\ \text{m}^3-1\,235,08\ \text{m}^3}{1\,235,08\ \text{m}^3}\\&=0,201995...\\&\approx 0,202=20,2\,\%\end{aligned}$$

83.

Paperirullan poikkileikkaus muodostuu kahdesta sisäkkäisestä ympyrästä.

Pienemmän ympyrän säde on 4,5 cm : 2 = 2,25 cm.

Suuremman ympyrän säde on 12 cm : 2 = 6,0 cm.

Paperirulla on muodoltaan ympyrälieriö.

Lieriön korkeus on sama kuin paperirullan leveys (23,0 cm).

$$\begin{aligned} V_{\text{paperirulla}} &= \pi \cdot (6{,}0\ \text{cm})^2 \cdot 23{,}0\ \text{cm} \\ &= 2\,601{,}238...\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Myös paperirullan ontto sisäosa on suora ympyrälieriö, jonka korkeus on 23,0 cm.

$$\begin{aligned} V_{\text{sisäosa}} &= \pi \cdot (2{,}25\ \text{cm})^2 \cdot 23{,}0\ \text{cm} \\ &= 365{,}79919...\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Paperirullan paperiosan tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{paperirulla}} - V_{\text{sisäosa}} &= 2601{,}238...\ \text{cm}^3 - 365{,}79919...\ \text{cm}^3 \\ &= 2235{,}438...\ \text{cm}^3 \approx 2200\ \text{cm}^3 = 2{,}2\ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

84.

Lautasliinarenkaan poikkileikkaus muodostuu kahdesta sisäkkäisestä ympyrästä.

Pienemmän ympyrän säde on 3,2 cm : 2 = 1,6 cm

Suuremman ympyrän säde on
1,6 cm + 2,0 mm = 1,6 cm + 0,2 cm = 1,8 cm

Lautasliinarengas on muodoltaan ympyrälieriö. Lieriön korkeus on 1,5 cm.

$$\begin{aligned}V_{\text{lautaliinarengas}} &= \pi \cdot (1{,}8\text{ cm})^2 \cdot 1{,}5\text{ cm}\\ &= 15{,}268...\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Myös lautasliinarenkaan ontto sisäosa on suora ympyrälieriö, jonka korkeus on 1,5 cm.

$$\begin{aligned}V_{\text{sisäosa}} &= \pi \cdot (1{,}6\text{ cm})^2 \cdot 1{,}5\text{ cm}\\ &= 12{,}063...\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Hopeisen renkaan tilavuus on

$$\begin{aligned}V_{\text{lautasliinarengas}} - V_{\text{sisäosa}} &= 15{,}268...\text{ cm}^3 - 12{,}063...\text{ cm}^3\\ &= 3{,}204...\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Lautasliinarenkaan tiheys ρ lasketaan massan m ja tilavuuden V avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

$$m = \rho \cdot V$$

Lasketaan lautasliinarenkaan massa.

$$\begin{aligned} m &= 10{,}5\ \text{g/cm}^3 \cdot 3{,}204...\ \text{cm}^3 \\ &= 33{,}646...\ \text{g} \approx 34\ \text{g} \end{aligned}$$

85.

Koristeena olevan pallon säde on 3,0 mm = 0,3 cm ja tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{pallo}} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,3 \text{ cm})^3 \\ &= 0,113... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Sormuksen poikkileikkaus muodostuu kahdesta sisäkkäisestä ympyrästä.

Pienemmän ympyrän säde on 2,0 cm : 2 = 1,0 cm.

Suuremman ympyrän säde on 2,2 cm : 2 = 1,1 cm.

Sormus on muodoltaan ympyrälieriö, jonka korkeus on sormuksen leveys 5,0 mm = 0,5 cm.

$$\begin{aligned} V_{\text{sormus}} &= \pi \cdot (1,1 \text{ cm})^2 \cdot 0,5 \text{ cm} \\ &= 1,900... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Myös sormuksen ontto sisäosa on ympyrälieriö, jonka korkeus on 0,5 cm.

$$\begin{aligned} V_{\text{sisöosa}} &= \pi \cdot (1,0 \text{ cm})^2 \cdot 0,5 \text{ cm} \\ &= 1,570... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Sormuksen tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{pallo}} + V_{\text{sormus}} - V_{\text{sisäosa}} &= 0,113... \text{ cm}^3 + 1,900... \text{ cm}^3 - 1,570... \text{ cm}^3 \\ &= 0,442... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Sormuksen tiheys ρ lasketaan massan m ja tilavuuden V avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

$$m = \rho \cdot V$$

Lasketaan sormuksen massa.

$$\begin{aligned} m &= 4{,}54\ \text{g/cm}^3 \cdot 0{,}442...\ \text{cm}^3 \\ &= 2{,}011...\ \text{g} \approx 2{,}0\ \text{g} \end{aligned}$$

86.

Merkitään särmiön pohjan lyhyempää särmää kirjaimella *x*, jolloin pidempi särmä on $x - 3$.

Muodostetaan särmiön tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$
\begin{aligned}
V &= x \cdot (x+3) \cdot 12 \\
254 &= 12x^2 + 36x \\
x &= -6,339... \quad \text{tai} \quad x = 3,339...
\end{aligned}
$$

Pituus on aina positiivista, joten $x = 3,339... \approx 3,3\ \text{(cm)}$.

Särmiön pohjan lyhyempi särmä on 3,3 cm ja pidempi särmä on 3,3 cm + 3,0 cm = 6,3 cm.

87.

Lasin tilavuus on 1,8 dl = 0,18 l = 0,18 dm^3 = 180 cm^3.

Merkitään kartion korkeutta kirjaimella x, jolloin pohjaympyrän säde on $x \cdot 1,5 : 2 = 0,75x$.

Muodostetaan ympyräkartion tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (0,75x)^2 \cdot x$$

$$180 = 0,589...x^3$$

$$x = 6,7355...\text{ cm} \approx 6,7\text{ cm}$$

88.

Merkitään lasin alaosan kartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella x, jolloin yläosan säde on $2x$.

Alaosan pinta-ala on

$$A_{\text{alaosa}} = \pi \cdot x \cdot 5,4 = 16,964x\ldots\ \text{cm}^2$$

Yläosan pinta-ala on

$$A_{\text{yläosa}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (2x)^2 = 25,132x^2\ldots\ \text{cm}^2$$

Muodostetaan lasin pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$143 = 16,964\ldots x + 25,132\ldots x^2$$
$$x = 2,071\ldots\ \text{cm} \quad \text{tai} \quad x = -2,746\ldots\ \text{cm}$$

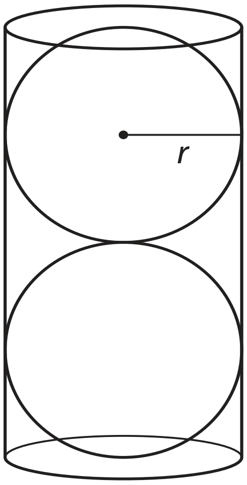
Koska pituus on aina positiivista, $x = 2,071\ldots\ \text{cm}$.

Alaosan kartion halkaisija on $2x = 2 \cdot 2,071\ldots\ \text{cm} = 4,143\ldots\ \text{cm}$.

Yläosan halkaisija on $2 \cdot 4,143\ldots\ \text{cm} = 8,286\ldots\ \text{cm} \approx 8,29\ \text{cm}$.

89.

Piirretään tilanteesta havainnollistava kuva.



Purkissa olevien kuulien säde on sama kuin ympyrälieriön pohjan säde ja ympyrälieriön korkeus on $4r$.

Kuulien tilavuus on

$$V_{\text{kuulat}} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi r^3$$

Ympyrälieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{lieriö}} &= A_{\text{p}} \cdot h \\ &= \pi r^2 \cdot 4r \\ &= 4\pi r^3 \end{aligned}$$

Kuulien tilavuus koko rasian tilavuudesta on

$$\frac{V_{\text{kuulat}}}{V_{\text{lieriö}}} = \frac{\frac{8}{3}\pi r^3}{4\pi r^3} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = 0{,}666... = 66{,}66...\% \approx 67\%$$

90.

Vesikourun säde on 12,5 cm : 2 = 6,25 cm ja sen pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (6,25 \text{ cm})^2 = 61,359... \text{ cm}^2 = 0,61359... \text{ dm}^2$$

$$5 \text{ min} = 5 \cdot 60 \text{ s} = 300 \text{ s}$$

Kun tiedetään aika ja nopeus, voidaan laskea matka.

$$\text{matka} = \text{nopeus} \cdot \text{aika}$$

Vesi liikkuu viidessä minuutissa

$$\text{matka} = 0,09 \text{ m/s} \cdot 300 \text{ s} = 27 \text{ m} = 270 \text{ dm}$$

270 dm:n pitkän vesikourun tilavuus on

$$V = A_{\text{p}} \cdot h = 0,61359... \text{ dm}^2 \cdot 270 \text{ dm} = 165,6699... \text{ dm}^3 \approx 166 \text{ dm}^3 = 166 \text{ l}$$

91.

Alustan pinta-ala on

$$A_{\text{alusta}} = 12\ \text{m} \cdot 12\ \text{m} = 144\ \text{m}^2$$

Lasketaan särmiön piiri vaipan pinta-alaa varten.

$$p_{\text{särmiö}} = 1{,}0\ \text{m} + 1{,}0\ \text{m} + 1{,}0\ \text{m} + 1{,}0\ \text{m} = 4{,}0\ \text{m}$$

Särmiön vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{särmiö}} = p \cdot h = 4{,}0\ \text{m} \cdot 6{,}3\ \text{m} = 25{,}2\ \text{m}^2$$

Teoksen pinta-ala on

$$A_{\text{alusta}} + 4 \cdot A_{\text{vaippa}} = 144\ \text{m}^2 + 4 \cdot 25{,}2\ \text{m}^2 = 244{,}8\ \text{m}^2 \approx 245\ \text{m}^2$$

92.

Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi.

2,40 m = 24,0 dm

6,50 m = 65,0 dm

10,0 cm = 1,00 dm

Betonipohjan tilavuus on

$$V = 24{,}0\ \text{dm} \cdot 65{,}0\ \text{dm} \cdot 1{,}00\ \text{dm} = 1\,560\ \text{dm}^3$$

Betonin tiheys ρ lasketaan massan m ja tilavuuden V avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = 1{,}50\ \text{kg/dm}^3 \cdot 1\,650\ \text{dm}^3 = 2\,340\ \text{kg}$$

93.

a) Lasketaan ensin ympärysmitaltaan 68 cm olevan pallon pinta-ala ja tilavuus. Muodostetaan pallon kehän pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\begin{aligned} 68\ \text{cm} &= 2\pi r \\ r &= 10{,}822...\ \text{cm} \end{aligned}$$

Pallon pinta-ala on

$$A_1 = 4\pi \cdot (10{,}822...\ \text{cm})^2 = 1471{,}864...\ \text{cm}^2 \approx 1470\ \text{cm}^2 = 14{,}7\ \text{dm}^2$$

Pallon tilavuus on

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot (10{,}822\ \text{cm})^3 = 5309{,}770...\ \text{cm}^3 \approx 5310\ \text{cm}^3 = 5{,}31\ \text{dm}^3$$

Lasketaan ympärysmitaltaan 70 cm olevan pallon pinta-ala ja tilavuus. Muodostetaan pallon kehän pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\begin{aligned} 70\ \text{cm} &= 2\pi r \\ r &= 11{,}140...\ \text{cm} \end{aligned}$$

Pallon pinta-ala on

$$A_2 = 4\pi \cdot (11{,}140...\ \text{cm})^2 = 1559{,}718...\ \text{cm}^2 \approx 1560\ \text{cm}^2 = 15{,}6\ \text{dm}^2$$

Pallon tilavuus on

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot (11{,}140\text{... cm})^3 = 5792{,}194\text{... cm}^3 \approx 5790\text{ cm}^3 = 5{,}79\text{ dm}^3$$

Pallon pinta-ala vaihtelee välillä 14,7 dm^2 – 15,6 dm^2.

Pallon tilavuus vaihtelee välillä 5,31 dm^3 – 5,79 dm^3.

b) Lasketaan kuinka paljon suurempi on suurimman sääntöjen mukaisen pallon tilavuus pienimpään sääntöjen mukaiseen palloon verrattuna.

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{5{,}792\text{... dm}^3 - 5{,}309\text{... dm}^3}{5{,}309\text{... dm}^3} = 0{,}0908\text{...} \approx 0{,}091 = 9{,}1\ \%$$

94.

Mittariin on satanut vettä 0,50 dl = 0,05 l = 0,05 dm^3 = 50 cm^3.

Mittarin pohjan halkaisija on 4,5 cm, joten pohjan säde on
4,5 cm : 2 = 2,25 cm.

Merkataan lieriön korkeutta kirjaimella *x*. Muodostetaan lieriön tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$\begin{aligned} V &= A_\text{p} \cdot h \\ 50\ \text{cm}^2 &= \pi \cdot (2{,}25\ \text{cm})^2 \cdot x \\ x &= 3{,}143...\ \text{cm} \\ x &\approx 3{,}1\ \text{cm} = 31\ \text{mm} \end{aligned}$$

95.

Merkataan kartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella x, jolloin kartion korkeus on x + 2 cm.

Muodostetaan kartion tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$V = \frac{A_\mathrm{p} \cdot h}{3}$$

$$35 = \frac{(\pi x^2) \cdot (x+2)}{3}$$

$$\pi x^3 + 2\pi x^2 - 105 = 0$$

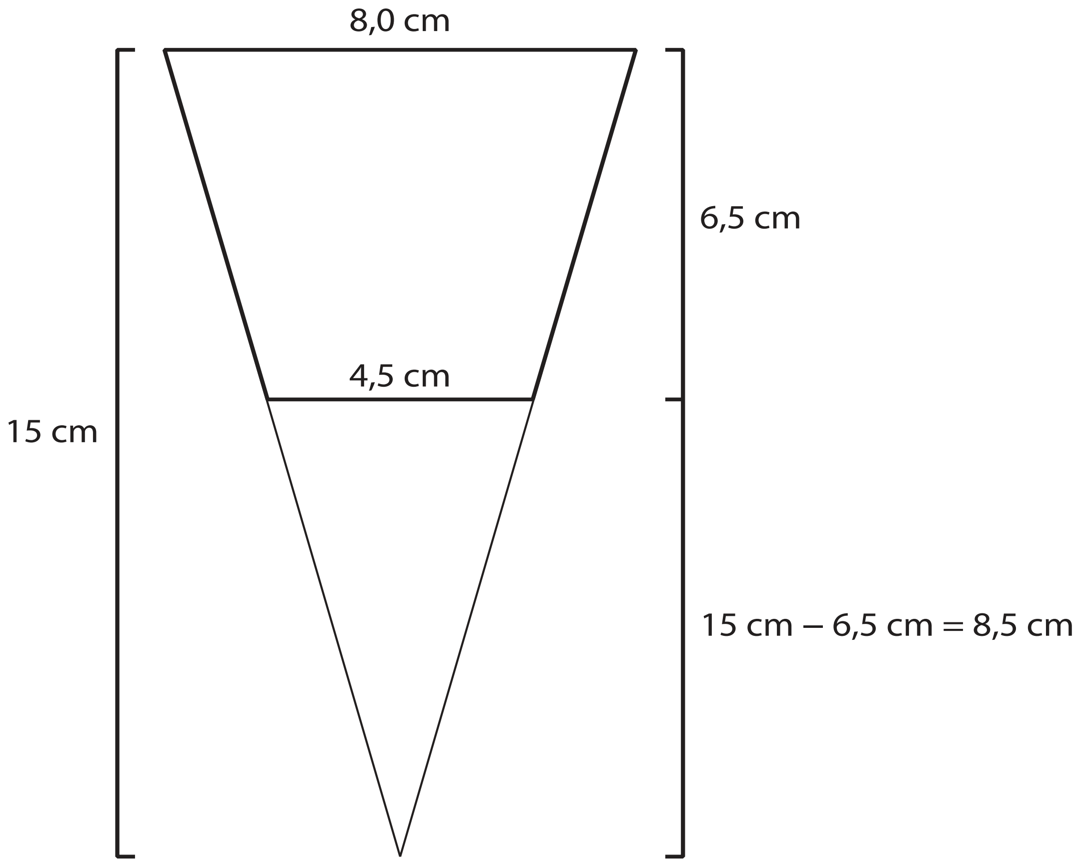
$$x = 2{,}674\ldots \text{ (cm)} \approx 2{,}7 \text{ cm}$$

Kartion korkeus on 2,7 cm + 2,0 cm = 4,7 cm.

96.

Lasketaan ensin koko kartion tilavuus, sen jälkeen lasketaan pienen kartion tilavuus. Lasin tilavuus on kartioitten erotus.

Piirretään tilanteesta havainnollistava kuva.


8,0 cm
6,5 cm
4,5 cm
15 cm
15 cm – 6,5 cm = 8,5 cm

Suuren kartion pohjan säde on 8,0 cm : 2 = 4,0 cm. Suuren kartion tilavuus on

$$V_1 = \frac{\pi \cdot (4,0\ \text{cm})^2 \cdot 15\ \text{cm}}{3} = 251,327...\ \text{cm}^3$$

Pienen kartion pohjan säde on 4,5 cm : 2 = 2,25 cm. Pienen kartion tilavuus on

$$V_2 = \frac{\pi(2,25 \text{ cm})^2 \cdot 8,5 \text{ cm}}{3} = 45,062... \text{ cm}^3$$

Lasin tilavuus on

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= 251,327... \text{ cm}^3 - 45,062... \text{ cm}^3 \\ &= 206,265... \text{ cm}^3 \approx 210 \text{ cm}^3 = 0,21 \text{ dm}^3 = 0,21 \text{ l} = 2,1 \text{ dl} \end{aligned}$$

2 Kuvioita ja kappaleita

2.1 Suorakulmaisen kolmion geometriaa

97.

a) Kolmion kateettien pituudet ovat 5 ja $\sqrt{39}$. Hypotenuusan pituutta on merkitty kirjaimella *x*. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$$\begin{aligned} 5^2+(\sqrt{39})^2 &= x^2 \\ 25+39 &= x^2 \\ x^2 &= 64 \\ x &= \pm\sqrt{64} \\ x &= \pm 8 \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 8$.

b) Kolmion kateetin pituus on 4 ja hypotenuusan pituus on $\sqrt{31}$. Toisen kateetin pituutta on merkitty kirjaimella *x*. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$$\begin{aligned} 4^2+x^2 &= \left(\sqrt{31}\right)^2 \\ 16+x^2 &= 31 \\ x^2 &= 31-16 \\ x^2 &= 15 \\ x &= \pm\sqrt{15} \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x=\sqrt{15}$.

98.

a) Nelikulmion lävistäjänä on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Merkataan hypotenuusaa kirjaimella x. Kolmion kateettien pituudet ovat 1 ja 1. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$$
\begin{aligned}
1^2+1^2 &= x^2 \\
1+1 &= x^2 \\
x^2 &= 2 \\
x &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x=\sqrt{2}$.

b) Nelikulmion lävistäjänä on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Merkataan hypotenuusaa kirjaimella x. Kolmion kateettien pituudet ovat 1 ja 3. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$$
\begin{aligned}
1^2+3^2 &= x^2 \\
1+9 &= x^2 \\
x^2 &= 10 \\
x &= \pm\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x=\sqrt{10}$.

99.

a) Kolmion kateetin pituus on 6 ja hypotenuusan pituus on 10. Toisen kateetin pituutta on merkitty kirjaimella x. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$$\begin{aligned} x^2+6^2&=10^2\\ x^2+36&=100\\ x^2&=100-36\\ x^2&=64\\ x&=\pm\sqrt{64}\\ x&=\pm 8 \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 8$.

b) Nelikulmion lävistäjänä on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Kolmion hypotenuusan pituus on 2. Kolmion kateettien pituudet ovat 1 ja x. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$$\begin{aligned} x^2+1^2&=2^2\\ x^2+1&=4\\ x^2&=4-1\\ x^2&=3\\ x&=\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x=\sqrt{3}$.

100.

Lasketaan ensin pienemmän suorakulmaisen kolmion toinen kateetti. Merkataan sitä kirjaimella x. Kolmion toinen kateetin pituus on 1 ja hypotenuusan pituus on $\sqrt{37}$. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen.

$$
\begin{aligned}
1^2 + x^2 &= \left(\sqrt{37}\right)^2 \\
1 + x^2 &= 37 \\
x^2 &= 37 - 1 \\
x^2 &= 36 \\
x &= \pm\sqrt{36} \\
x &= \pm 6
\end{aligned}
$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 6$.

Nyt meillä on kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 6 ja $a + 1$ ja hypotenuusan pituus on 10. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja lasketaan yhtälöstä a.

$$
\begin{aligned}
6^2 + (a+1)^2 &= 10^2 \\
36 + a^2 + 2a + 1 &= 100 \\
a^2 + 2a + 1 + 36 - 100 &= 0 \\
a^2 + 2a - 63 &= 0
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan arvot toisen asteen ratkaisukaavaan.

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63)}}{2 \cdot 1}$$

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$a = \frac{-2 \pm 16}{2}$$

$$a = \frac{-2 - 16}{2} = \frac{-18}{2} = -9 \quad \text{tai} \quad a = \frac{-2 + 16}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $a = 7$.

101.

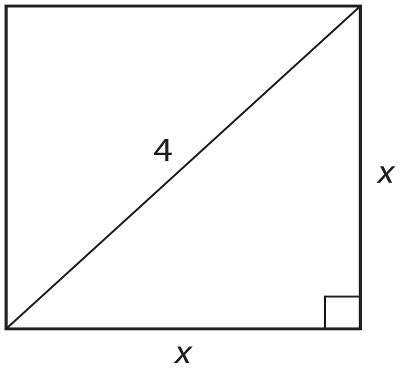
Kolmion kateettien pituudet ovat 3 ja 4. Hypotenuusan pituutta ei tiedetä. Merkataan sitä kirjaimella x. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 3^2+4^2&=x^2 \\ 9+16&=x^2 \\ x^2&=25 \\ x&=\pm\sqrt{25} \\ x&=\pm 5 \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 5$.

102.

Piirretään mallikuva ja merkitään kuvaan tunnetut arvot.



Merkataan neliön sivuja kirjaimella *x*. Kuvasta muodostuu näkyviin suorakulmainen kolmio, jonka kateettien arvot ovat *x* ja *x* ja hypotenuusan pituus on 4. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä *x*.

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 4^2 \\ 2x^2 &= 16 \qquad |:2 \\ x^2 &= 8 \\ x &= \pm\sqrt{8} \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Neliön sivun pituus on $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

103.

Kolmion sivujen pituudet ovat $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ ja 3. Jos kolmion sivujen pituuksille a, b ja c on voimassa ehto $a^2 + b^2 = c^2$, kolmio on suorakulmainen.

Jos $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{7}$ ja $c = 3$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 &= 3^2 \\ 2 + 7 &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

yhtälö on tosi

Koska ehto $a^2 + b^2 = c^2$ toteutuu, on kolmio suorakulmainen.

104.

a) Kolmion sivujen pituudet ovat 6 cm, 8 cm ja 10 cm. Jos kolmion sivujen pituuksille a, b ja c on voimassa ehto $a^2 + b^2 = c^2$, kolmio on suorakulmainen.

Jos $a = 6$, $b = 8$ ja $c = 10$

$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= 10^2 \\ 36 + 64 &= 100 \\ 100 &= 100 \end{aligned}$$

yhtälö on tosi

Koska ehto $a^2 + b^2 = c^2$ toteutuu, on kolmio suorakulmainen.

b) Kolmion sivujen pituudet ovat 5 cm, 2 cm ja 1 cm. Jos kolmion sivujen pituuksille a, b ja c on voimassa ehto $a^2 + b^2 = c^2$, kolmio on suorakulmainen.

Koska hypotenuusa on suorakulmaisen kolmion pisin sivu, $c = 5$, $a = 2$ ja $b = 1$.

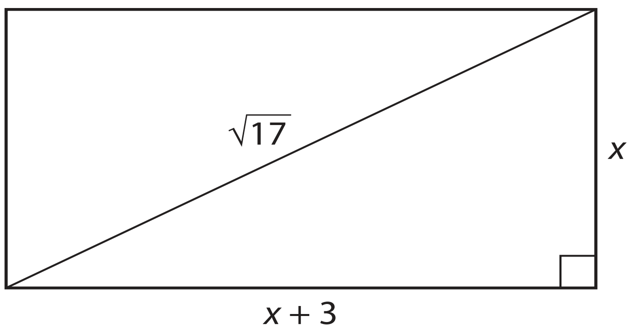
$$\begin{aligned} 2^2 + 1^2 &= 5^2 \\ 4 + 1 &= 25 \\ 5 &= 25 \end{aligned}$$

yhtälö on epätosi

Koska ehto $a^2 + b^2 = c^2$ ei toteudu, kolmio ei ole suorakulmainen.

105.

Piirretään mallikuva ja merkitään kuvaan tunnetut arvot.



Merkitään korkeutta kirjaimella x, jolloin kanta on $x + 3$. Kuviosta muodostuu näkyviin suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat x ja $x + 3$ ja hypotenuusan pituus on $\sqrt{17}$. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$
\begin{aligned}
x^2+(x+3)^2 &= \left(\sqrt{17}\right)^2 \\
x^2+x^2+6x+9 &= 17 \\
2x^2+6x+9-17 &= 0 \\
2x^2+6x-8 &= 0 \qquad \Big|:2 \\
x^2+3x-4 &= 0
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan arvot toisen asteen ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-3 - 5}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 1$.

Suorakulmion sivujen arvot ovat 1 p.y ja 1 + 3 = 4 p.y.

106.

Merkataan kateetteja $3x$ ja $4x$. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$\begin{aligned}(3x)^2+(4x)^2&=10^2\\9x^2+16x^2&=100\\25x^2&=100 && \Big|:25\\x^2&=4\\x&=\pm\sqrt{4}\\x&=\pm 2\end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 2$.

Kateettien pituudet ovat $3\cdot 2=6$ ja $4\cdot 2=8$.

107.

a) Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 124 mm ja 235 mm. Merkataan hypotenuusaa kirjaimella x. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$124^2 + 235^2 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{70\,601}$$

$$x = \pm 265,708...$$

$$x \approx \pm 266$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 266$.

b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 5,2 m ja toisen kateetin pituus on 2,7 m. Merkataan toista kateettia kirjaimella x. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$x^2 + 2,7^2 = 5,2^2$$

$$x = \pm\sqrt{19,75}$$

$$x = \pm 4,444...$$

$$x \approx \pm 4,4 \text{ (m)}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 4,4$ m.

108.

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 3,5 m ja toisen kateetin pituus on 2,2 m. Merkataan toista kateettia kirjaimella x. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} x^2 + 2{,}2^2 &= 3{,}5^2 \\ x &= \pm\sqrt{7{,}41} \\ x &= \pm 2{,}722... \\ x &\approx \pm 2{,}7 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 2{,}7$ m.

Kolmion piiri on

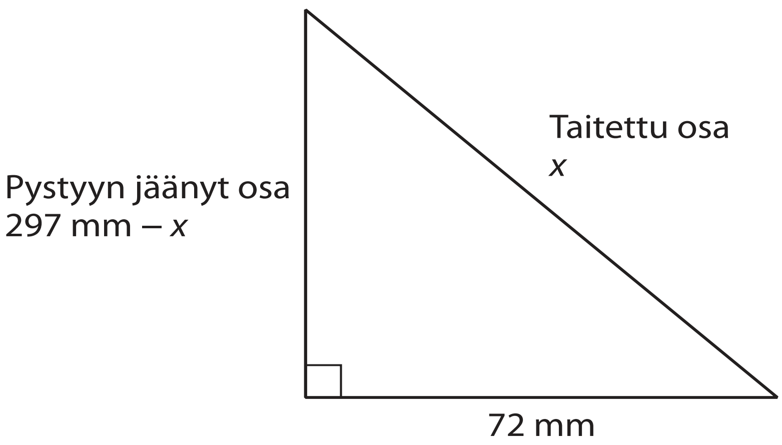
$$p = 2{,}7 \text{ m} + 2{,}2 \text{ m} + 3{,}5 \text{ m} = 8{,}4 \text{ m}.$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{2{,}7 \text{ m} \cdot 2{,}2 \text{ m}}{2} = 2{,}97 \text{ m}^2 \approx 3{,}0 \text{ m}^2.$$

109.

Piirretään mallikuva ja merkitään kuvaan tunnetut arvot.


Taitettu osa
x
Pystyyn jäänyt osa
297 mm – x
72 mm

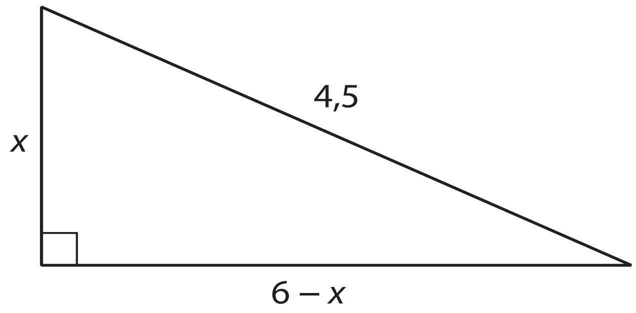
Sijoitetaan pituudet x, 72 ja $297 - x$ Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 72^2 + (297 - x)^2 &= x^2 \\ x &= 157,227\ldots\,(\text{mm}) \\ x &\approx 157\text{ mm} \end{aligned}$$

Paperi on taitettu 157 mm yläreunasta.

110.

Piirretään mallikuva ja merkitään kuvaan tunnetut arvot.



Hypotenuusan pituus on 4,5 m ja piiri on 10,5 m. Merkitään toista kateettia kirjaimella x, jolloin toisen kateetin pituus on
10,5 m – 4,5m – x = 6,0 m – x.

Sijoitetaan arvot x, 4,5 ja 6 – x Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$x^2 + (6 - x)^2 = 4,5^2$$

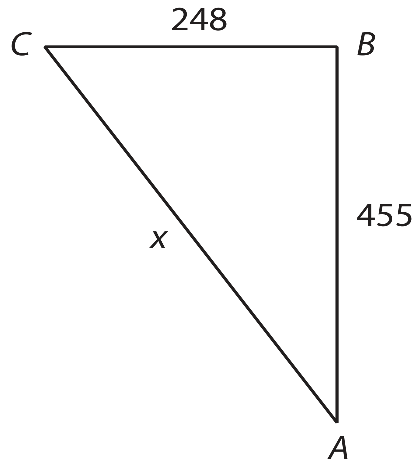
$$x = -1,939... \approx -1,9 \quad \text{tai} \quad x = 4,060... \approx 4,1$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten x = 4,1.

Kateettien pituudet ovat 4,1 m ja 6,0 m – 4,1 m = 1,9 m.

111.

Piirretään mallikuva ja merkitään kuvaan tunnetut arvot.



Lasketaan ensin, kuinka kauan lentokoneella, joka lensi kaupungin B:n kautta kaupunkiin C. Lentomatka on 455 km + 248 km = 703 km ja keskinopeus matkalla on 760 km/h.

Nopeus saadaan matkan ja ajan osamäärästä.

$$v=\frac{s}{t}$$

Aika saadaan matkan ja nopeuden osamäärästä.

$$t=\frac{s}{v}$$

Lentoaika on

$$t_1=\frac{703\text{ km}}{760\text{ km/h}}=0{,}925\text{ h}=55{,}5\text{ min}\,.$$

Lasketaan lentomatka kaupungista *A* kaupunkiin *C* Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 455^2 + 248^2 &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{268\,529} \\ x &= \pm 518{,}197\ldots\ (\text{km}) \end{aligned}$$

Lasketaan toisen lennon lentoaika, kun lennon keskinopeus on 650 km/h.

$$t_2 = \frac{518{,}197\ldots\ \text{km}}{650\ \text{km/h}} = 0{,}797\ldots\ \text{h} = 47{,}833\ldots\ \text{min}$$

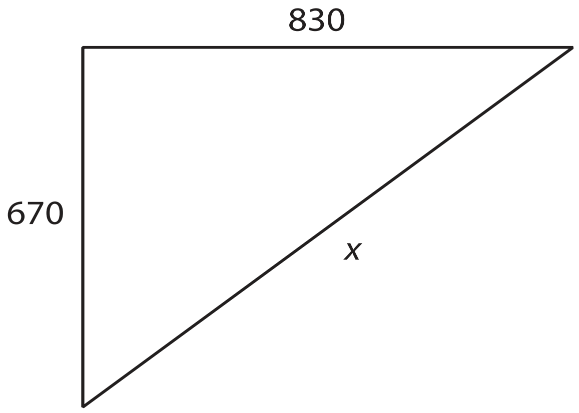
Lentoaikojen ero on

$$t_1 - t_2 = 55{,}5\ \text{min} - 47{,}833\ldots\ \text{min} = 7{,}666\ldots\ \text{min} \approx 7{,}7\ \text{min}$$

Kone, joka lentää suoraan kaupungista *A* kaupunkiin *C*, saapuu 7,7 min aikaisemmin.

112.

a) Piirretään mallikuva ja merkitään kuvaan tunnetut arvot.



Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

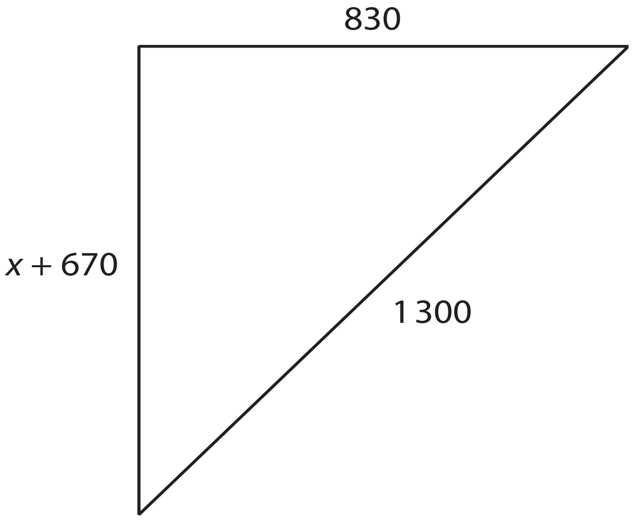
$$\begin{aligned} 830^2 + 670^2 &= x^2 \\ x &= \pm 1066,677...\ (\text{m}) \\ x &\approx \pm 1070\ \text{m} \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten x = 1070 m.

Nea on 1070 m:n päässä koulusta.

b) Muutetaan arvot samannimisiksi. 1,3 km = 1300 m.

Piirretään mallikuva ja merkitään kuvaan tunnetut arvot.



Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$830^2 + (x + 670)^2 = 1\,300^2$$

$$x = 330{,}549...\ (\text{m}) \approx 330\ \text{m} \quad \text{tai}$$

$$x = -1670{,}549...\ (\text{m}) \approx -1700\ \text{m}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 330$ m.

Kaupasta joen rantaan on matkaa 330 m.

113.

a) Kosini on viereisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.

- Kulman α viereisen kateetin pituus on 2.
- Kolmion hypotenuusan pituus on $2\sqrt{5}$.

$$\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Tangentti on vastaisen kateetin ja viereisen kateetin pituuksien suhde.

- Kulman α vastaisen kateetin pituus on 4.
- Kulman α viereisen kateetin pituus on 2.

$$\cos\alpha = \frac{4}{2} = 2$$

b) Sini on vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.

- Kulman β vastaisen kateetin pituus on 2.
- Kolmion hypotenuusan pituus on $2\sqrt{5}$.

$$\sin\beta = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Kosini on viereisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.

- Kulman β viereisen kateetin pituus on 4.
- Kolmion hypotenuusan pituus on $2\sqrt{5}$.

$$\cos\beta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

114.

Merkitään suorakolmion toista kateettia kirjaimella x. Sijoitetaan kolmion sivujen pituuksien arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$
\begin{aligned}
x^2+5^2&=7^2\\
x^2+25&=49\\
x^2&=49-25\\
x^2&=24\\
x&=\pm\sqrt{24}=\pm2\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x=2\sqrt{6}$.

$$\sin\alpha=\frac{5}{7}$$

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\tan\alpha=\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

115.

Merkataan toista kateettia kirjaimella x. Suorakulmaisesta kolmiosta tiedetään toinen kateetti sekä $\tan\alpha = \frac{1}{3}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{10}}{x} = \frac{1}{3}$$

$$x = 3\sqrt{10}$$

Merkitään hypotenuusaa kirjaimella c. Kolmion hypotenuusa voidaan ratkaista Pythagoraan lauseen avulla.

$$\left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(3\sqrt{10}\right)^2 = c^2$$

$$10 + 9 \cdot 10 = c^2$$

$$c^2 = 100$$

$$c = \pm\sqrt{100}$$

$$c = \pm 10$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $c = 10$.

Kolmion muut sivut ovat 10 ja $3\sqrt{10}$.

116.

a) Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 25°.

- Tämän kulman vastaisen kateetin pituus on x.
- Hypotenuusan pituus on 17,4 cm.

Sivun pituus x voidaan ratkaista sinin avulla.

$$\sin 25^\circ = \frac{x}{17{,}4}$$

$$x = 7{,}353...$$

$$x \approx 7{,}4 \text{ cm}$$

b) Kulman β viereisen kateetin pituus on 5,5 m ja hypotenuusan pituus on 8,0 m.

Kulma β voidaan ratkaista kosinin avulla.

$$\cos\beta = \frac{5{,}5}{8{,}0}$$

$$\beta = 46{,}567...^\circ$$

$$\beta \approx 47^\circ$$

117.

a) Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 72° ja hypotenuusan pituus on 68 cm. Merkataan tuntematonta kateettia kirjaimella x.

Tämän kulman viereisen sivun pituus voidaan ratkaista kosinin avulla.

$$\cos 72^\circ = \frac{x}{68}$$

$$x = 21{,}013...$$

$$x \approx 21\text{ cm}$$

Tunnetun kulman vastaisen sivun pituus voidaan ratkaista sinin avulla. Merkataan tuntematonta kateettia kirjaimella y.

$$\sin 72^\circ = \frac{y}{68}$$

$$y = 64{,}671...$$

$$y \approx 65\text{ cm}$$

b) Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{21{,}013...\text{ cm} \cdot 64{,}671...\text{ cm}}{2} = 679{,}474...\text{ cm}^2 \approx 680\text{ cm}^2$$

118.

Kulman α vastaisen kateetin pituus on 13,2 m ja viereisen kateetin pituus on 27,2 m.

Kulman α voidaan ratkaista tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{13,2}{27,2}$$

$$\alpha = 25,887...^\circ$$

$$\alpha \approx 25,9^\circ$$

Kulman β vastaisen kateetin pituus on 27,2 m ja viereisen kateetin pituus on 13,3 m.

Kulman β voidaan ratkaista tangentin avulla.

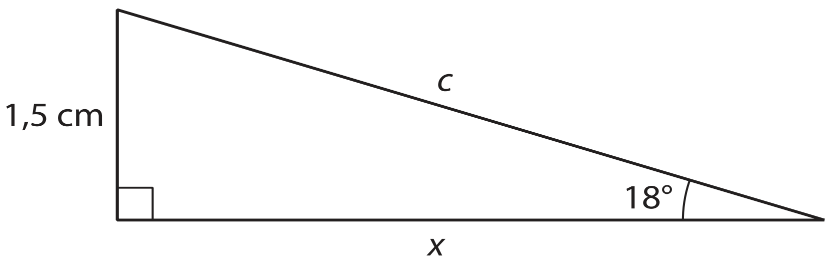
$$\tan\beta = \frac{27,2}{13,2}$$

$$\beta = 64,112...^\circ$$

$$\beta \approx 64,1^\circ$$

119.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan tuntemattomia sivuja kirjaimilla *x* ja *c*.

Hypotenuusan, sivu *c*, voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin 18° = \frac{1,5}{c}$$

$$c = 4,854...$$

$$c \approx 4,9 \text{ cm}$$

Toisen kateetin, sivu *x*, voidaan laskea tangentin avulla.

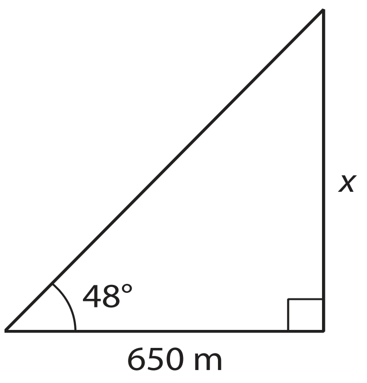
$$\tan 18° = \frac{1,5}{x}$$

$$x = 4,616...$$

$$x \approx 4,6 \text{ cm}$$

120.

a) Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan laivan etäisyyttä rannasta kirjaimella x. Tämä voidaan ratkaista tangentin avulla.

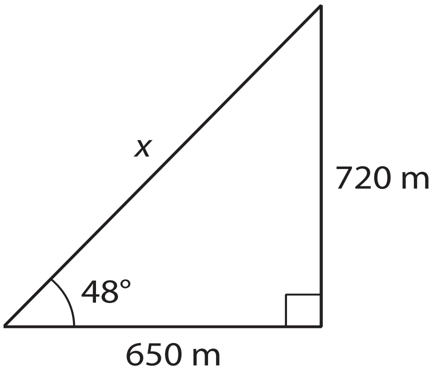
$$\tan 48^\circ = \frac{x}{650}$$

$$x = 721{,}898...$$

$$x \approx 720 \text{ m}$$

Laiva on 720 m:n päässä rannasta.

b) Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



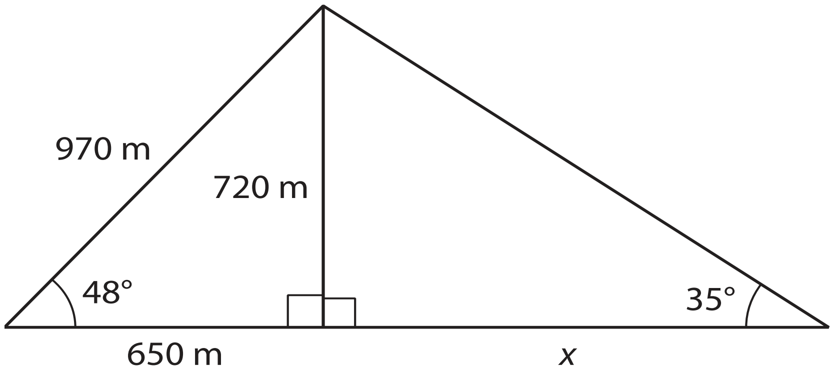
Merkataan pisteessä *A* seisovan henkilön etäisyyttä laivasta kirjaimella *x*. Tämä voidaan laskea kosinin avulla.

$$\cos 48^\circ = \frac{650}{x}$$

$$x = 971{,}409...$$

$$x \approx 970 \text{ m}$$

c) Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan tuntematonta sivua kirjaimella x. Tämä voidaan laskea tangentin avulla.

$$\tan 35° = \frac{720}{x}$$

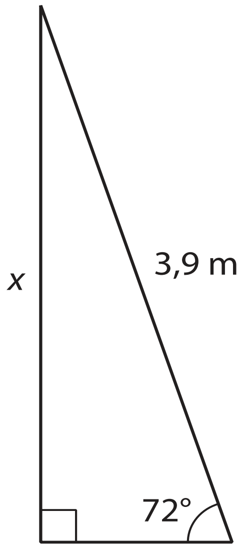
$$x = 1028,266...\text{ m}$$

Kahden rannalla seisovan henkilön välinen etäisyys on

$$650\text{ m} + 1028,266...\text{ m} = 1678,266...\text{ m} \approx 1700\text{ m}$$

121.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan seinän korkeutta kirjaimella x. Tämä voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin 72^\circ = \frac{x}{3,9}$$

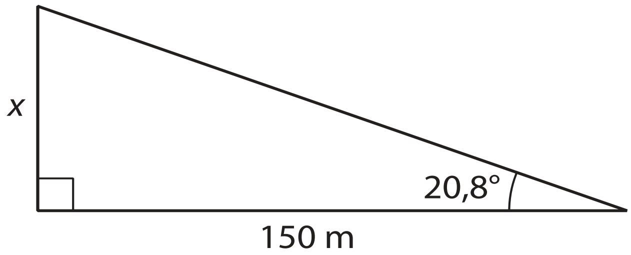
$$x = 3,709...$$

$$x \approx 3,7 \text{ m}$$

Tikapuiden yläpää on 3,7 m:n korkeudella.

122.

a) Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



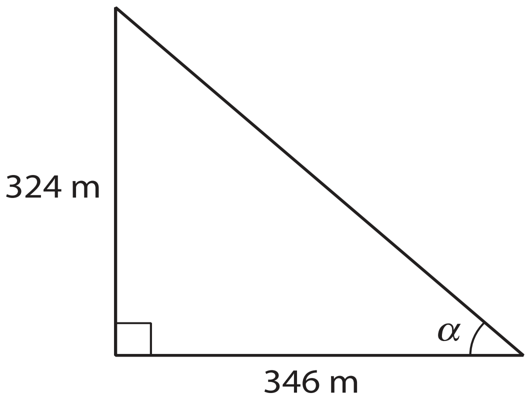
Merkataan Eiffel-tornin ensimmäisen tasanteen korkeutta kirjaimella *x*.
Tämä voidaan ratkaista tangentin avulla.

$$\tan 20{,}8° = \frac{x}{150}$$

$$x = 56{,}969...$$

$$x \approx 57{,}0 \text{ m}$$

b) Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan kysyttyä kulmaa α:lla. Kulma voidaan laskea tangentin avulla.

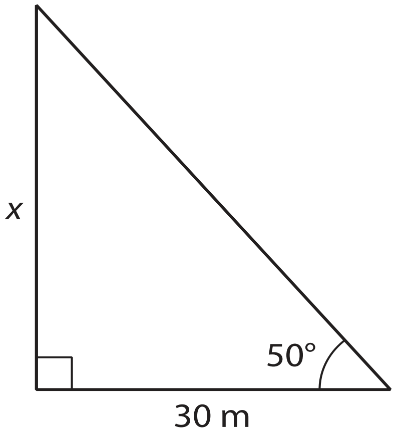
$$\tan\alpha = \frac{324}{346}$$

$$\alpha = 43{,}119...^\circ$$

$$\alpha \approx 43{,}1^\circ$$

123.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan joen leveyttä *AC* kirjaimella *x*. Tämä voidaan laskea tangentin avulla.

$$\tan 50° = \frac{x}{30}$$

$$x = 35,752...$$

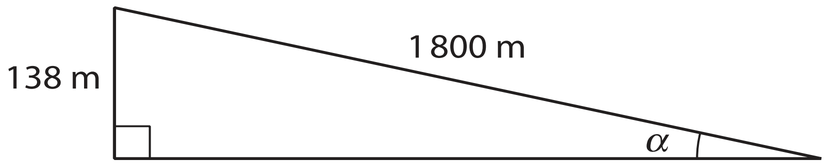
$$x \approx 36 \text{ m}$$

Joki on 36 m leveä.

124.

Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi. 1,8 km = 1800 km.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan kulmaa, josta henkilö näkee lentokoneen α:lla. Tämä voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{138}{1800}$$

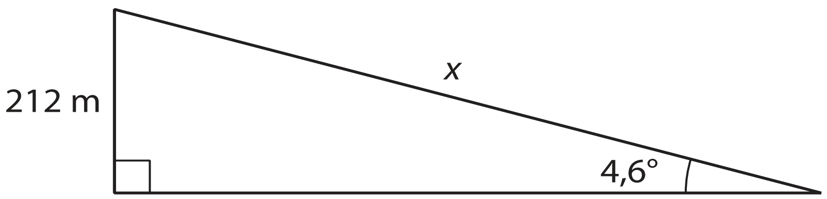
$$\alpha = 4,396..^\circ$$

$$\alpha \approx 4,40^\circ$$

Henkilö näkee lentokoneen 4,40° kulmassa.

125.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan rinteen pituutta kirjaimella x. Tämä voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin 4{,}6^\circ = \frac{212}{x}$$

$$x = 2643{,}426\ldots \text{ m} = 2{,}643\ldots \text{ km}$$

Nopeus saadaan matkan ja ajan suhteella.

$$v = \frac{s}{t}$$

Aika saadaan matkan ja nopeuden suhteella.

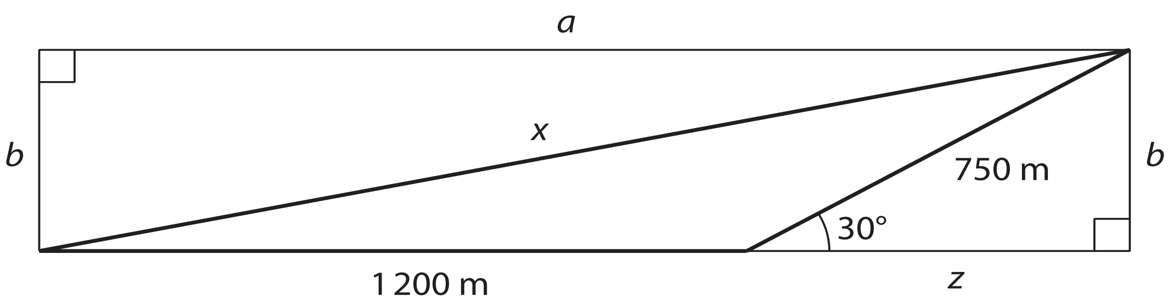
$$t = \frac{s}{v}$$

Lasketaan kuinka kauan hissillä kestää matka huipulle.

$$t = \frac{2{,}643\ldots \text{ km}}{18 \text{ km/h}} = 0{,}146.. \text{ h} \approx 8 \text{ min } 49 \text{ s}$$

126.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Muutetaan annetut arvot samannimisiksi. 1,2 km = 1200 m.

Merkataan linnuntietä autosta marjapaikkaan kirjaimella *x*.

Sivun *z* pituus on

$$\cos 30° = \frac{z}{750}$$

$$z = 649,519...\text{ m}$$

Sivun *b* pituus on

$$\sin 30° = \frac{b}{750}$$

$$b = 375\text{ m}$$

Sivun *a* pituus on

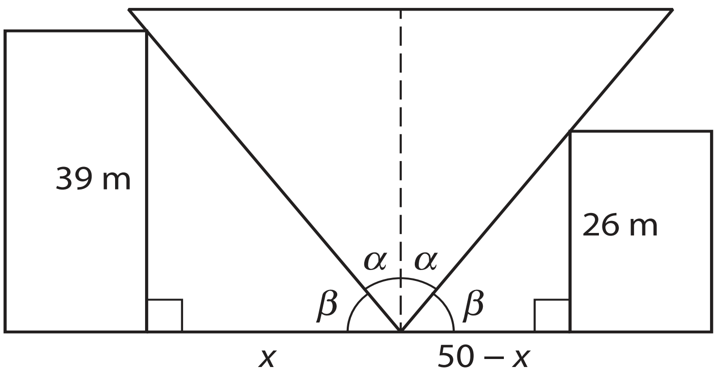
$$a = 1\,200\text{ m} + 649,519...\text{ m} = 1\,849,519...\text{ m}$$

Sivun x pituus on

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= x^2 \\
x &= 1887{,}152\ldots\ \text{m} \\
x &\approx 1900\ \text{m} = 1{,}9\ \text{km}
\end{aligned}
$$

127.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Kulman β voidaan ratkaista

$$\tan\beta = \frac{39}{x} \text{ ja } \tan\beta = \frac{26}{50-x}$$

Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \tan\beta = \dfrac{39}{x} \\ \tan\beta = \dfrac{26}{50-x} \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} \tan\beta = \dfrac{39}{x} \\ \tan\beta = \dfrac{26}{50-x} \end{cases}$$

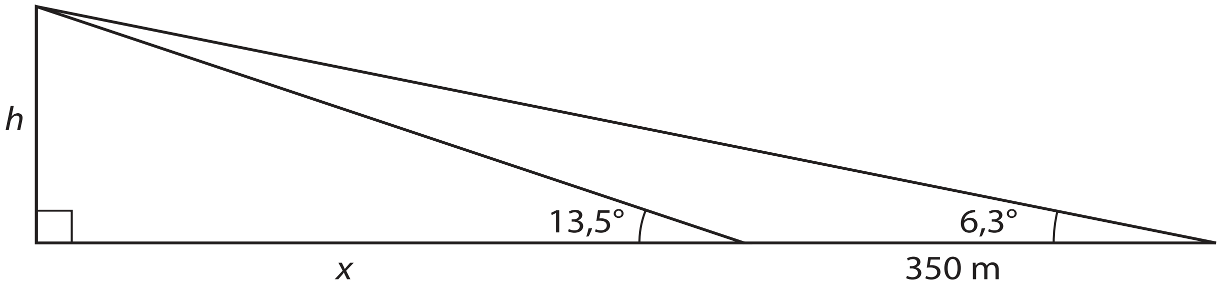
$$\frac{26}{50-x} = \frac{39}{x}$$

$$x = 30 \text{ m}$$

Kulma α on 30 m korkeammasta asunnosta.

128.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Korkeus *h* voidaan laskea

$$\tan 6,3° = \frac{h}{x+350} \qquad \text{ja} \qquad \tan 13,5° = \frac{h}{x}$$

$$h = \tan 6,3° \cdot (x+350) \qquad h = \tan 13,5° \cdot x$$

Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} h = \tan 6,3° \cdot (x+350) \\ h = \tan 13,5° \cdot x \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{aligned} \tan 6,3° \cdot (x+350) &= \tan 13,5° \cdot x \\ \tan 6,3° \cdot x + \tan 6,3° \cdot 350 &= \tan 13,5° \cdot x \\ x &= 297,972... \text{ m} \\ x &\approx 300 \text{ m} \end{aligned}$$

Henkilö on 300 m:n päässä tornista siirtymisen jälkeen.

b)

Tornin korkeus on

$$\tan 13,5° = \frac{h}{x}$$

$$h = 71,536...\text{ m}$$

$$h \approx 72\text{ m}$$

129.

a) Sivu *x* voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin 27{,}0^\circ = \frac{7{,}10}{x}$$

$$x = 15{,}639\ldots \text{ m}$$

$$x \approx 15{,}6 \text{ m}$$

b) Sivun *x* voidaan laskea tangentin avulla.

$$\tan 34^\circ = \frac{15}{x}$$

$$x = 22{,}238\ldots \text{ cm}$$

$$x \approx 22 \text{ cm}$$

c) Sivun *x* voidaan laskea Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 6{,}4^2 = 8{,}3^2$$

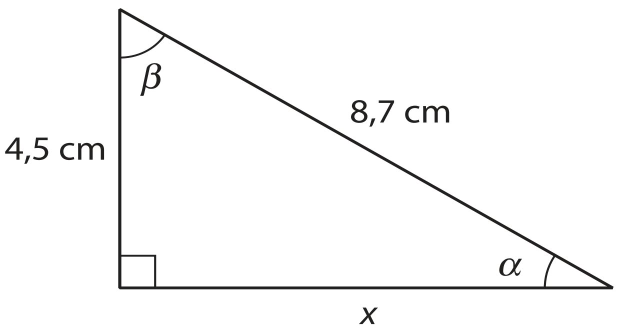
$$x = \pm 5{,}284\ldots$$

$$x \approx \pm 5{,}3 \text{ cm}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 5{,}3$ cm.

130.

a) Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan toista kateettia kirjaimella x. Sivun x pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} 4,5^2 + x^2 &= 8,7^2 \\ x &= \pm 7,445...\ \text{cm} \\ x &\approx \pm 7,4\ \text{cm} \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 7,4$ cm

b) Kulman α voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{4,5}{8,7}$$

$$\alpha = 31,147...°$$

$$\alpha \approx 31°$$

Kulman β voidaan laskea kosinin avulla.

$$\cos\beta = \frac{4,5}{8,7}$$

$$\beta = 58,852...°$$

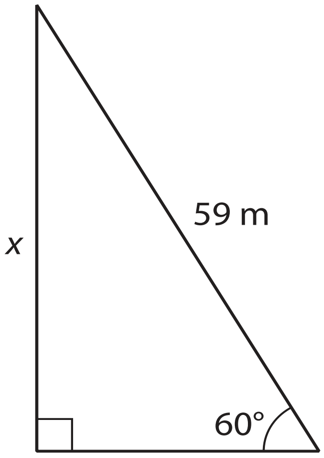
$$\beta \approx 59°$$

c) Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{4,5\ \text{cm} \cdot 7,445...\ \text{cm}}{2} = 16,753...\ \text{cm}^2 \approx 17\ \text{cm}^2$$

131.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



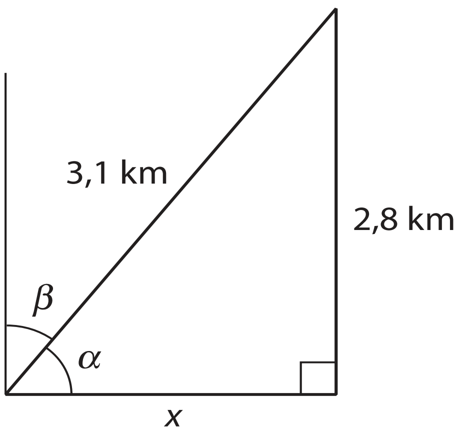
Merkataan liukumäen korkeutta kirjaimella x.

Liukumäen korkeus voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin 60° = \frac{x}{59}$$
$$x = 51{,}095...\text{ m}$$
$$x \approx 51\text{ m}$$

132.

a) Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan suunnistajan matkaa kohti länteen kirjaimella x. Tämä voidaan laskea Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} 2{,}8^2 + x^2 &= 3{,}1^2 \\ x &= \pm 1{,}330\ldots \text{ km} \\ x &\approx \pm 1{,}3 \text{ km} \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 1{,}3$ km.

b) Kulma α voidaan laskea sinin avulla.

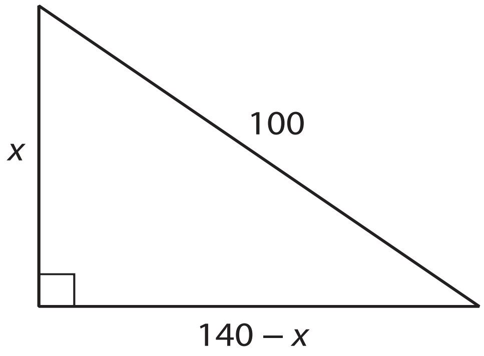
$$\sin\alpha = \frac{2,8}{3,1}$$
$$\alpha = 64,585..°$$

Kulmat β ja α muodostavat suorankulman, joten kulma β on

$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\beta = 25,414...°$$
$$\beta \approx 25°$$

133.

Piirretään mallikuva ja lisätään siihen tunnetut arvot.



Merkataan toista kateettia kirjaimella x, joten toinen kateetti on $240 - 100 - x = 140 - x$.

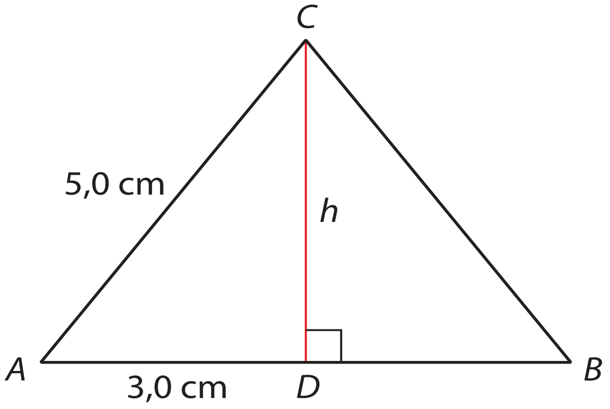
Sijoitetaan luvut Pythagoraan lauseeseen ja lasketaan siitä x.

$$x^2 + (140 - x)^2 = 100^2$$
$$x = 80 \text{ cm tai } x = 60 \text{ cm}$$

2.2 Suorakulmainen kolmio ja monikulmiot

134.

a)



Koska kolmio on tasakylkinen, korkeusjana puolittaa kantasivun. Suorakulmaisen kolmion kannan pituus on

$$AD = \frac{6,0\text{ cm}}{2} = 3,0\text{ cm}\ .$$

Lasketaan kolmion korkeus suorakulmaisesta kolmiosta *ADC* Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 3,0^2 + h^2 &= 5,0^2 \\ 9,0 + h^2 &= 25 \\ h^2 &= 16 \\ h &= \pm\sqrt{16} \\ h &= \pm 4,0 \end{aligned}$$

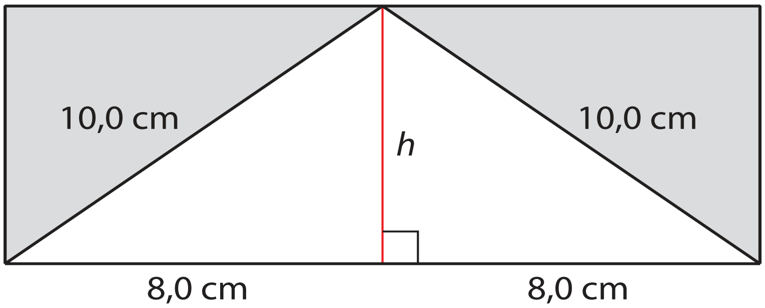
Korkeus on aina positiivinen, joten $h = 4,0$ cm.

b)

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6,0 \text{ cm} \cdot 4,0 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

135.



Koska kolmio on tasakylkinen, korkeusjana puolittaa kantasivun. Suorakulmaisen kolmion kannan pituus on

$$\frac{16,0\text{ cm}}{2}=8,0\text{ cm}$$

Lasketaan kolmion korkeus suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}8,0^2+h^2&=10,0^2\\64+h^2&=100\\h^2&=36\\h&=\pm\sqrt{36}\\h&=\pm 6\end{aligned}$$

Korkeus on aina positiivinen, joten h = 6,0 cm.

Nelikulmion pinta-ala on

$$A_1=16,0\text{ cm}\cdot 6,0\text{ cm}=96\text{ cm}^2$$

Kolmion pinta-ala on

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 16{,}0 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$$

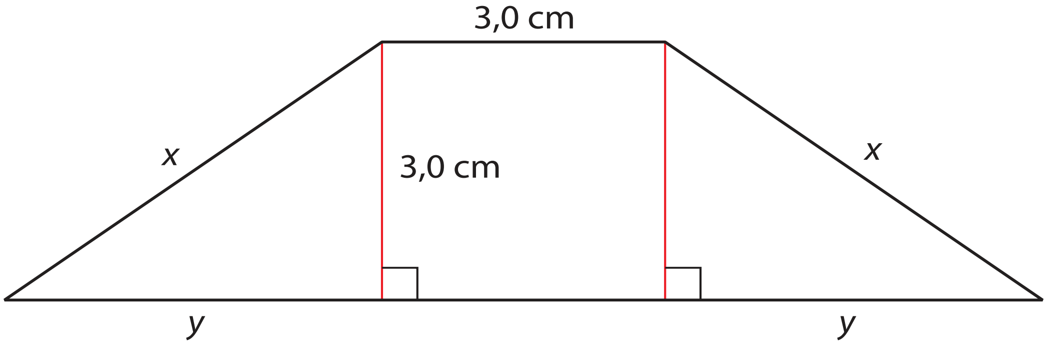
Väritetyn alueen pinta-ala on

$$A = A_1 - A_2 = 96 \text{ cm}^2 - 48 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2 .$$

136.

Lasketaan puolisuunnikkaan korkeus pinta-alan yhtälöstä.

$$\begin{aligned} \frac{3,0+11,0}{2}\cdot h &= 21 \\ 7h &= 21 \qquad \Big|:7 \\ h &= 3 \end{aligned}$$



Sivun y pituus on

$$\begin{aligned} y+3,0\ \text{cm}+y &= 11,0\ \text{cm} \\ 2y &= 8,0\ \text{cm} \qquad \Big|:2 \\ y &= 4,0\ \text{cm} \end{aligned}$$

Sivun *x* pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 4,0^2 + 3,0^2 &= x^2 \\ 16 + 9,0 &= x^2 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} \\ x &= \pm 5,0 \end{aligned}$$

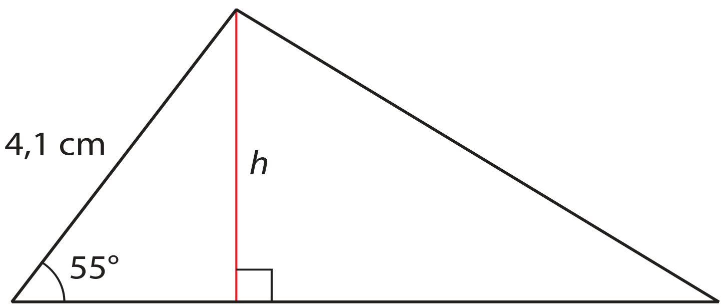
Sivun pituus on aina positiivinen, joten $x = 5,0$ cm.

Puolisuunnikkaan piiri on

$p = 3,0 \text{ cm} + 11,0 \text{ cm} + 5,0 \text{ cm} + 5,0 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$.

137.

a)

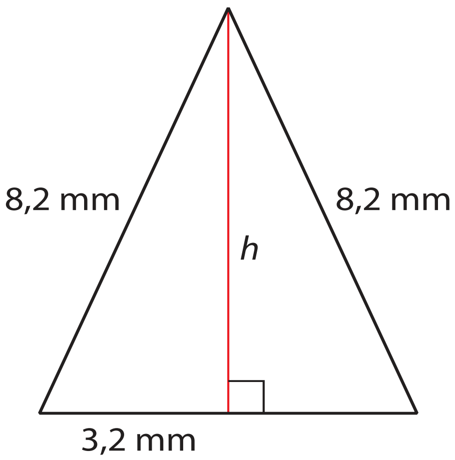


Kolmion korkeus, *h*, voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin 55^\circ = \frac{h}{4,1}$$

$$h = 3,358... \approx 3,4 \text{ cm}$$

b)



Koska kolmio on tasakylkinen, korkeusjana puolittaa kantasivun.

Suorakulmaisen kolmion kannan pituus on

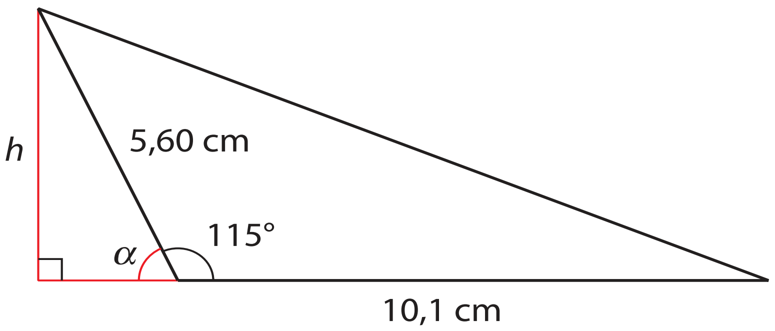
$$\frac{6,4\text{ mm}}{2} = 3,2\text{ mm}$$

Lasketaan kolmion korkeus suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 3,2^2 + h^2 &= 8,2^2 \\ h &= \pm 7,549\ldots\text{ mm} \\ h &\approx \pm 7,5\text{ mm} \end{aligned}$$

Korkeus on aina positiivista, joten $h = 7,5$ mm.

138.



Kulma α muodostaa 115°:n kulman kanssa oikokulman, joten kulma α on

$$\begin{aligned}\alpha + 115^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 65^\circ\end{aligned}$$

Korkeus h voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin 65^\circ = \frac{h}{5{,}60}$$

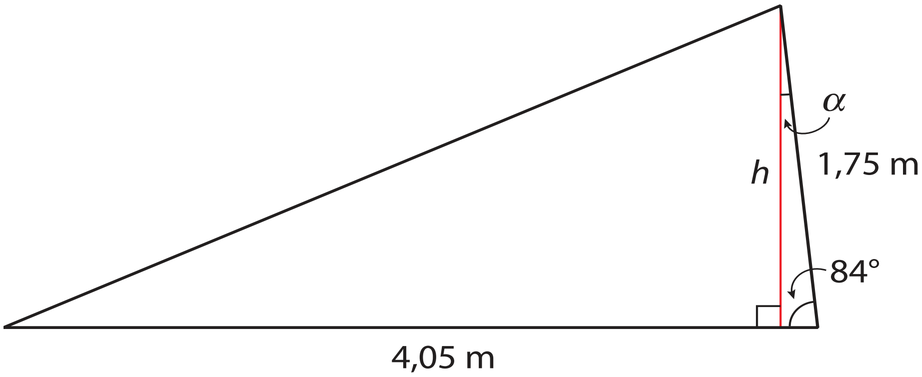
$$h = 5{,}075\ldots\text{ cm}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{10{,}1\text{ cm} \cdot 5{,}075\ldots\text{ cm}}{2} = 25{,}630\ldots\text{ cm}^2 \approx 25{,}6\text{ cm}^2$$

139.

a)



Kulman α suuruus on

$$\begin{aligned}\alpha + 90^\circ + 84^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 6^\circ\end{aligned}$$

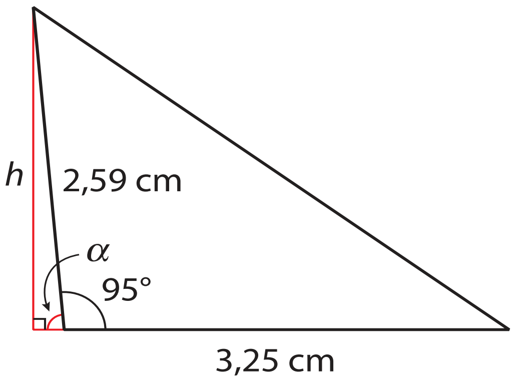
Lasketaan kolmion korkeus h kosinin avulla.

$$\begin{aligned}\cos 6^\circ &= \frac{h}{1,75} \\ h &= 1,740...\ \text{m}\end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{4,05\ \text{m} \cdot 1,740...\ \text{m}}{2} = 3,524...\ \text{m}^2 \approx 3,52\ \text{m}^2.$$

b)



Kulma α muodostaa oikokulman 95°:n kulman kanssa. Kulma α suuruus on

$$\alpha + 95° = 180°$$
$$\alpha = 85°$$

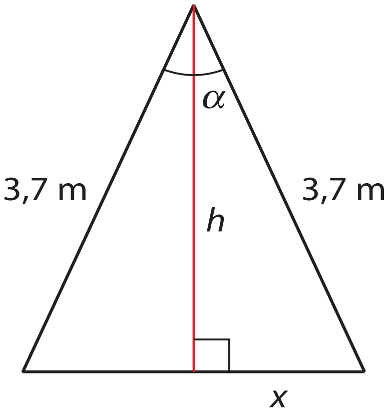
Korkeus h voidaan ratkaista sinin avulla.

$$\sin 85° = \frac{h}{2,59}$$
$$h = 2,580\ldots\ \text{cm}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{3,25\ \text{cm} \cdot 2,580\ldots\text{cm}}{2} = 4,192\ldots\ \text{cm}^2 \approx 4,19\ \text{cm}^2$$

c)



Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kärkikulman α.

Suorakulmaisen kolmion kärkikulma α on

$$\alpha = \frac{46^\circ}{2} = 23^\circ$$

Korkeus h voidaan ratkaista kosinin avulla.

$$\cos 23^\circ = \frac{h}{3,7}$$

$$h = 3,405...\ \text{m}$$

Sivun x pituus voidaan laskea sinin avulla.

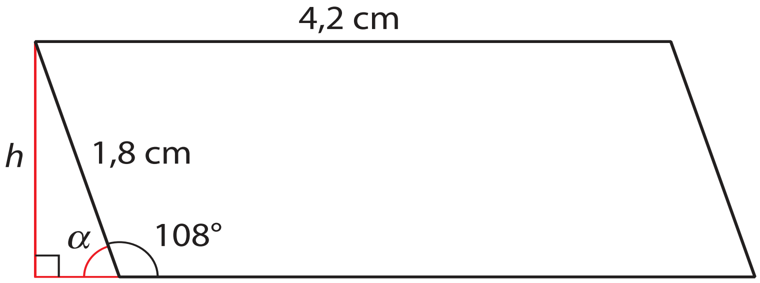
$$\sin 23^\circ = \frac{x}{3,7}$$

$$x = 1,445...\ \text{m}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{2x \cdot h}{2} = x \cdot h = 1,445\ldots \text{ m} \cdot 3,405\ldots \text{ m} = 4,922\ldots \text{ m}^2 \approx 4,9 \text{ m}^2$$

d)



Kulma α muodostaa oikokulman 108° kulman kanssa.

Kulma α suuruus on

$$\begin{aligned} \alpha + 108° &= 180° \\ \alpha &= 72° \end{aligned}$$

Korkeus h voidaan laskea sinin avulla.

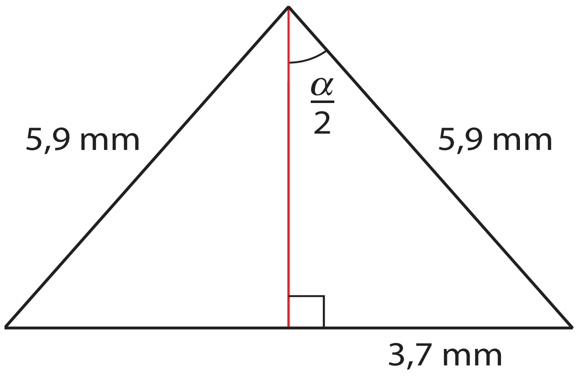
$$\begin{aligned} \sin 72° &= \frac{h}{1,8} \\ h &= 1,711\ldots \text{ cm} \end{aligned}$$

Suunnikkaan pinta-ala on

$$A = 4,2 \text{ cm} \cdot 1,711\ldots \text{ cm} = 7,189\ldots \text{ cm}^2 \approx 7,2 \text{ cm}^2$$

140.

a)



Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kärkikulman α.
Suorakulmaisen kolmion kärkikulma on $\alpha/2$.

Koska kolmio on tasakylkinen, korkeusjana puolittaa kantasivun.
Suorakulmaisen kolmion kannan pituus on

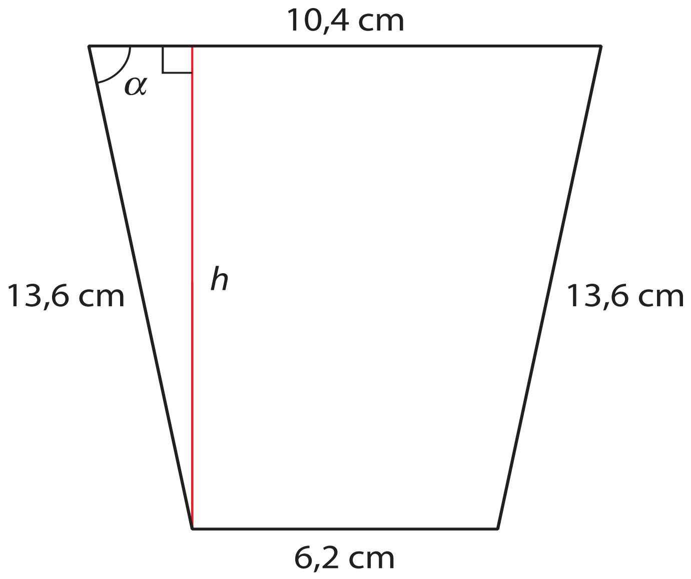
$$\frac{7,4\text{ mm}}{2} = 3,7\text{ mm}$$

Kulman $\alpha/2$ voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3,7}{5,9}$$

$$\alpha = 77,675...^\circ \approx 78^\circ$$

b)


10,4 cm
α
13,6 cm
h
13,6 cm
6,2 cm

Sivun x pituus on

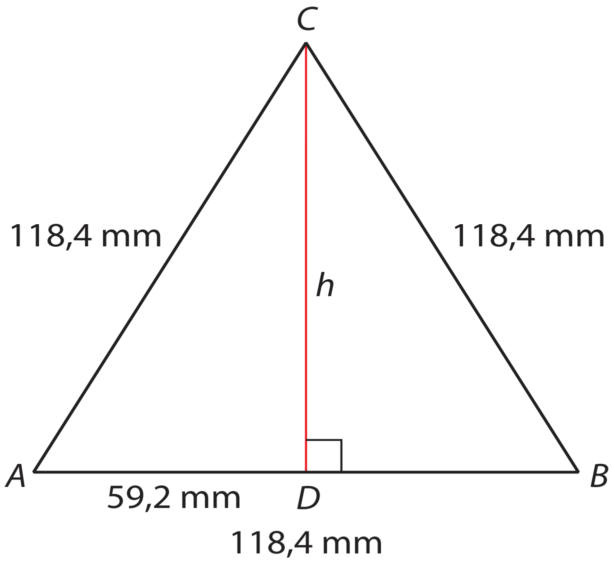
$$\begin{aligned} x + 6,2\text{ cm} + x &= 10,4\text{ cm} \\ x &= 2,1\text{ cm} \end{aligned}$$

Kulma α voidaan ratkaista kosinin avulla.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{2,1}{13,6} \\ \alpha &= 81,117...° \approx 81,1° \end{aligned}$$

141.

Kolmion sivujen pituudet ovat $0{,}80 \cdot 148 \text{ mm} = 118{,}4 \text{ mm}$.



Koska kolmio *ABC* on tasasivuinen, korkeusjana puolittaa kantasivun. Suorakulmaisen kolmion *ADC* kannan pituus on

$$AD = \frac{118{,}4 \text{ mm}}{2} = 59{,}2 \text{ mm}$$

Korkeusjana h voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 59{,}2^2 + h^2 &= 118{,}4^2 \\ h &= 102{,}537... \text{ mm} \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A_1 = \frac{118{,}4 \text{ mm} \cdot 102{,}537... \text{ mm}}{2} = 6\,070{,}214... \text{ mm}^2$$

Paperiarin pinta-ala on

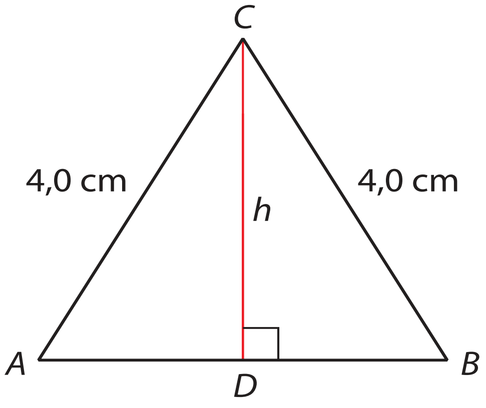
$$A_2 = 148\text{ mm} \cdot 210\text{ mm} = 31\,080\text{ mm}^2$$

Lasketaan, kuinka paljon paperiarkin pinta-ala pienenee, kun siitä leikataan kolmion muotoinen ala pois.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{A_2 - A_1}{A_2} &= 1 - \frac{31\,080\text{ mm}^2 - 6\,070{,}214...\text{ mm}^2}{31\,080\text{ mm}^2} \\ &= 0{,}1953... \approx 0{,}195 = 19{,}5\ \% \end{aligned}$$

142.

Tasasivuisen kolmion piiri on 12,0 cm, joten kolmion sivujen pituudet ovat 12 cm : 3 = 4,0 cm.



Koska kolmio *ABC* on tasasivuinen, korkeusjana puolittaa kantasivun. Suorakulmaisen kolmion *ADC* kannan pituus on

$$AD = \frac{4,0\text{ cm}}{2} = 2,0\text{ cm}$$

Korkeus, *h*, voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta *ADC* Pythagoraan lauseen avulla.

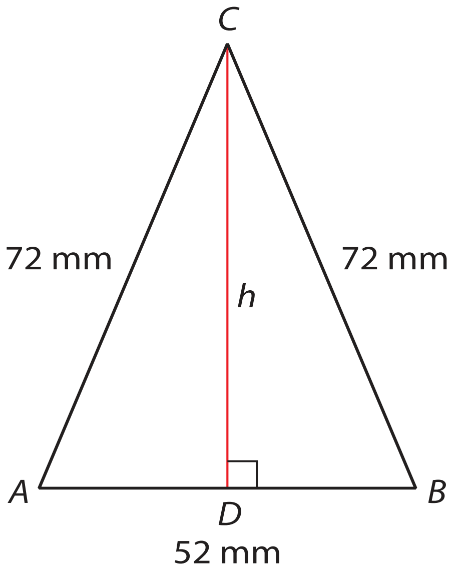
$$\begin{aligned} 2,0^2 + h^2 &= 4,0^2 \\ h &= 3,464...\text{ cm} \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{4,0\text{ cm} \cdot 3,464...\text{ cm}}{2} = 6,928...\text{ cm}^2 \approx 6,93\text{ cm}^2$$

143.

a)



Koska kolmio *ABC* on tasakylkinen, korkeusjana puolittaa kantasivun. Suorakulmaisen kolmion *ADC* kannan pituus on

$$AD = \frac{52\text{ mm}}{2} = 26\text{ mm}$$

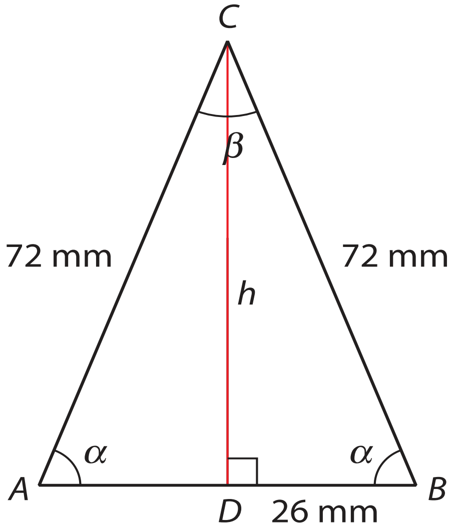
Korkeus *h* voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta *ADC* Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 26^2 + h^2 &= 72^2 \\ h &= 67{,}141\ldots\text{ mm} \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{52\text{ mm} \cdot 67{,}141\ldots\text{ mm}}{2} = 1\,745{,}682\ldots\text{ mm}^2 \approx 1700\text{ mm}^2 = 17\text{ cm}^2$$

b)


C
β
72 mm
72 mm
h
α
α
A
B
D
26 mm

Kulman α voidaan laskea kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{26}{72}$$

$$\alpha = 68{,}831...^\circ \approx 69^\circ$$

Kulman β suuruus on

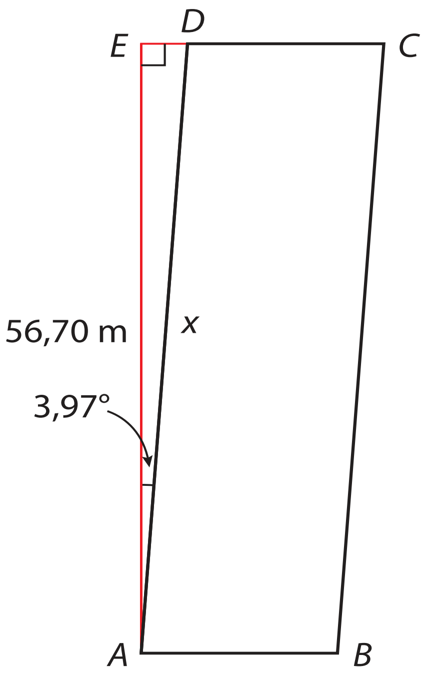
$$\alpha + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$69^\circ + 69^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 42^\circ$$

Kolmion kulmat ovat 69°, 69° ja 42°.

144.


E
D
C
56,70 m
x
3,97°
A
B

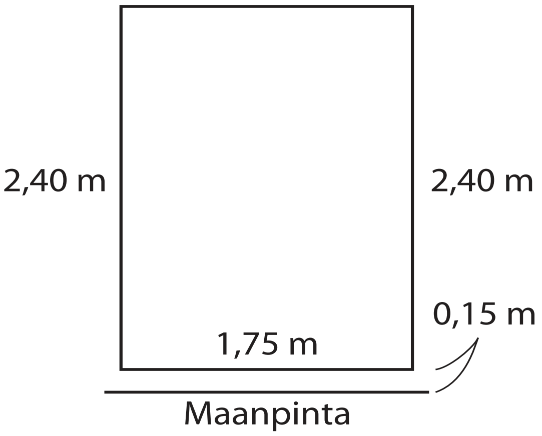
Sivun *x* pituus voidaan laskea kosinin avulla.

$$\cos 3{,}97° = \frac{56{,}70}{x}$$

$$x = 56{,}836\ldots \text{ m} \approx 56{,}84 \text{ m}$$

145.

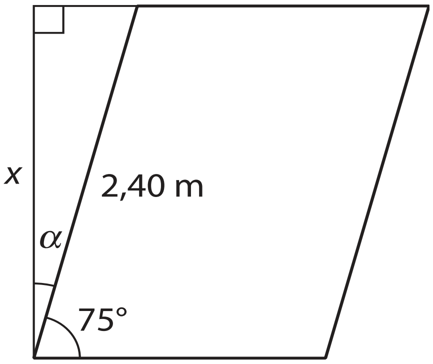
Keinu ei ole liikkeessä.



2,40 m
2,40 m
0,15 m
1,75 m
Maanpinta

Keinun yläosa on 2,40 m + 0,15 m = 2,55 m päässä maanpinnasta.

Keinu liikkeessä.



x
2,40 m
α
75°

Kulma α ja 75° kulma muodostavat suoran kulman. Kulman α suuruus on

$$\begin{aligned}\alpha + 75^\circ &= 90^\circ \\ \alpha &= 15^\circ\end{aligned}$$

Sivun x pituus on

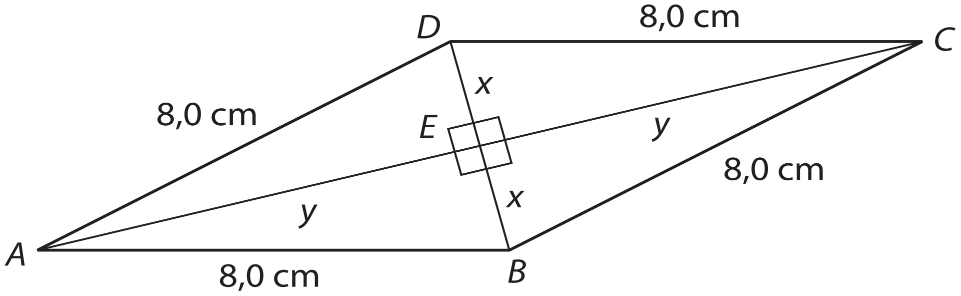
$$\cos 15° = \frac{x}{2,40}$$

$$x = 2,318...\ \text{m}$$

Keinun yläosa on 2,55 m:n päässä maanpinnasta. Kun keinu on liikkeessä, pohjalevyn ja maanpinnan etäisyys on

$$2,55\ \text{m} - 2,318...\ \text{m} = 0,232...\ \text{m} \approx 0{,}23\ \text{m} = 23\ \text{cm}\ .$$

146.



Lyhyemmän lävistäjän *DB* pituus on 4,0 cm, joten sivun *x* pituus on

$$DB = 2x$$
$$4{,}0\text{ cm} = 2x$$
$$x = 2{,}0\text{ cm}$$

Sivun *y* pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta *ABE* Pythagoraan lauseen avulla.

$$y^2 + 2{,}0^2 = 8{,}0^2$$
$$y = \pm 7{,}745...\text{ cm}$$

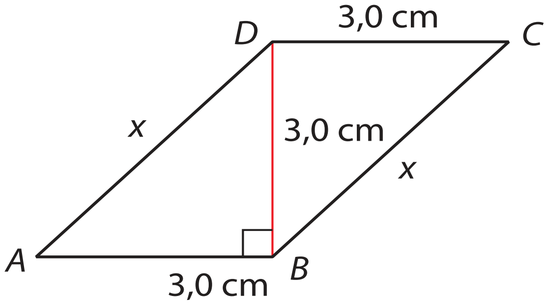
Sivun pituus on aina positiivista, joten $y = 7{,}745\ldots$ cm.

Pitemmän lävistäjän pituus *AC* on

$$AC = 2y = 2 \cdot 7{,}745...\text{ cm} = 15{,}491...\text{ cm} \approx 15{,}5\text{ cm}\ .$$

147.

Keltainen suunnikas.



Keltaisen suunnikkaan korkeus on

$$\begin{aligned} \text{ison suunnikkaan korkeus } - \text{ vihreän neliön korkeus} &= 6{,}0\text{ cm} - 3{,}0\text{ cm} \\ &= 3{,}0\text{ cm} \end{aligned}$$

Lasketaan sivun *x* pituus suorakulmaisesta kolmiosta *ABD* Pythagoraan lauseen avulla.

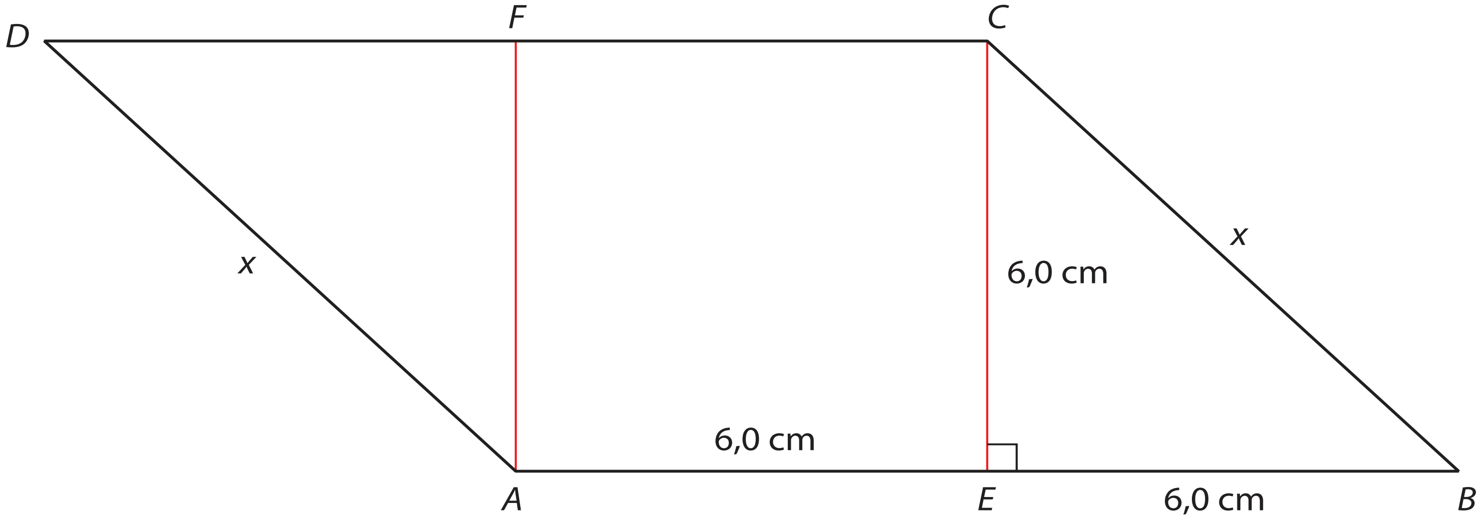
$$\begin{aligned} 3{,}0^2 + 3{,}0^2 &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{18} \end{aligned}$$

Sivun pituus on aina positiivista, joten $x = \sqrt{18}$ cm

Keltaisen suunnikkaan piiri on

$$p_1 = 3{,}0\text{ cm} + 3{,}0\text{ cm} + \sqrt{18}\text{ cm} + \sqrt{18}\text{ cm} = 14{,}485...\text{ cm}$$

Iso suunnikas.



Sivun x pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta EBC Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 6{,}0^2 + 6{,}0^2 &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{72} \end{aligned}$$

Sivun pituus on aina positiivinen, joten $x = \sqrt{72}$.

Ison suunnikkaan piiri on

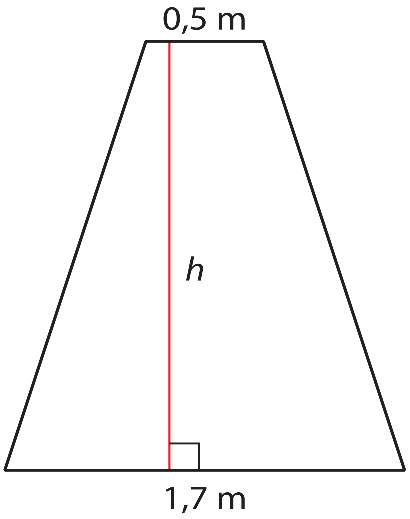
$$p_2 = 12{,}0\text{ cm} + 12{,}0\text{ cm} + \sqrt{72}\text{ cm} + \sqrt{72}\text{ cm} = 40{,}970...\text{ cm}.$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia keltaisen suunnikkaan piiri on ison suunnikkaan piiristä.

$$1 - \frac{p_2 - p_1}{p_2} = 1 - \frac{40{,}970...\text{ cm} - 14{,}485...\text{ cm}}{40{,}970...\text{ cm}} = 0{,}3535... \approx 0{,}354 = 35{,}4\ \%$$

148.

Muutetaan annetut arvot samannimisiksi. 50 cm = 0,5 m.

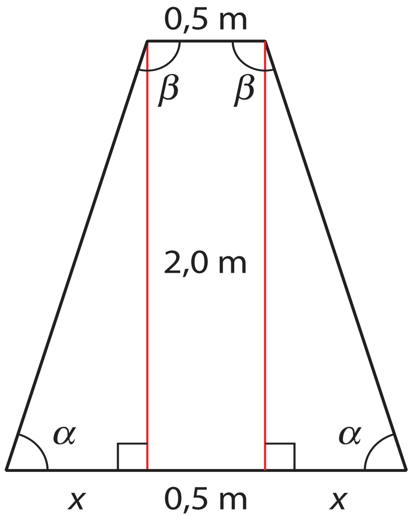


a) Muodostetaan puolisuunnikkaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys *h*.

$$2{,}2\ \text{m}^2 = \frac{0{,}5\ \text{m} + 1{,}7\ \text{m}}{2} \cdot h$$

$$h = 2{,}0\ \text{m}$$

b)



Sivun *x* pituus on

$$x + 0,5\ \text{m} + x = 1,7\ \text{m}$$
$$x = 0,6\ \text{m}$$

Kulma *α* voidaan laskea tangentin avulla.

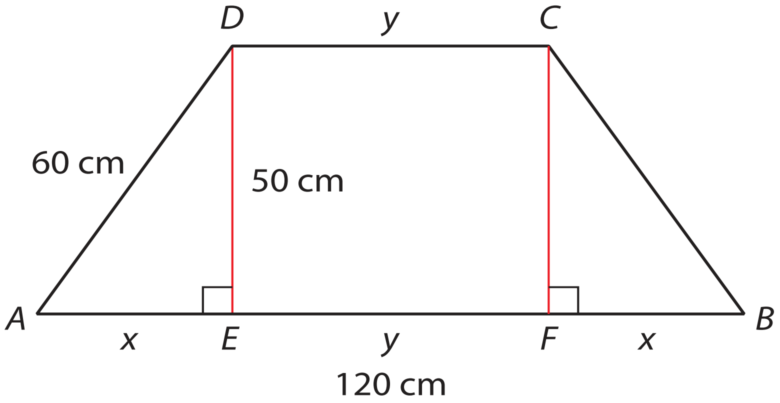
$$\tan\alpha = \frac{2,0}{0,6}$$
$$\alpha = 73,300...° \approx 73°$$

Kulma *β* on

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 360°$$
$$73° + 73° + 2\beta = 360°$$
$$\beta = 107°$$

Puolisuunnikkaan kulmat ovat 73°, 73°, 107° ja 107°.

149.



Lasketaan sivun *x* pituus suorakulmaisesta kolmiosta *AED* Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2+50^2=60^2$$
$$x=\pm 33{,}166...\text{ cm}$$

Sivun pituus on aina positiivinen luku, joten *x* = 33,166… cm.

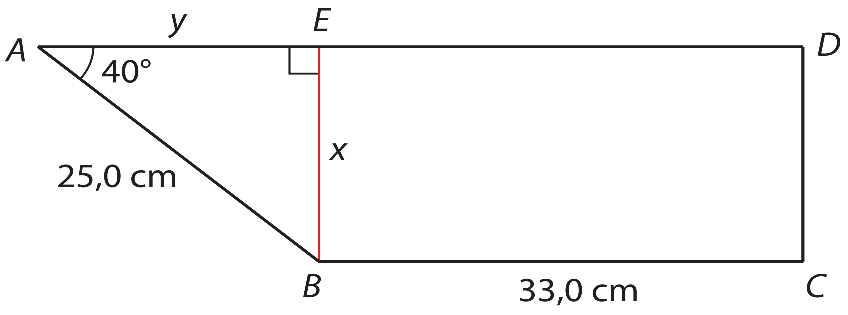
Lasketaan sivun *y* pituus janan *AB* avulla.

$$AB=AE+EF+FB$$
$$120\text{ cm}=x+y+x$$
$$120\text{ cm}=33{,}166...\text{ cm}+y+33{,}166...\text{ cm}$$
$$y=53{,}667...\text{ cm}$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A=\frac{120\text{ cm}+53{,}667...\text{ cm}}{2}\cdot 50\text{ cm}=4\,341{,}687...\text{ cm}^2\approx 4\,300\text{ cm}^2=43\text{ dm}^2$$

150.



Lasketaan sivun x pituus suorakulmaisesta kolmiosta ABE sinin avulla.

$$\sin 40° = \frac{x}{25}$$
$$x = 16{,}069...\ \text{cm}$$

Lasketaan sivun y pituus suorakulmaisesta kolmiosta ABE kosinin avulla.

$$\cos 40° = \frac{y}{25}$$
$$y = 19{,}151...\ \text{cm}$$

Nelikulmion $BCDE$ pinta-ala on

$$A_1 = 33{,}0\ \text{cm} \cdot 16{,}069...\ \text{cm} = 530{,}299...\ \text{cm}^2$$

Suorakulmaisen kolmion ABE pinta-ala on

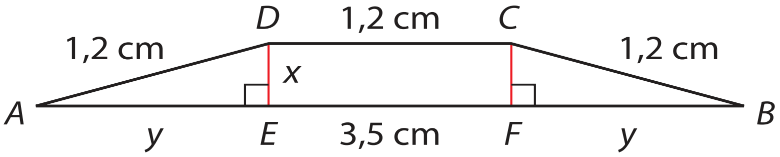
$$A_2 = \frac{19{,}151...\ \text{cm} \cdot 16{,}069...\ \text{cm}}{2} = 153{,}876...\ \text{cm}^2$$

Opaskyltin pinta-ala on

$$A_1 + A_2 = 530,299\ldots\ \mathrm{cm}^2 + 153,876\ldots\ \mathrm{cm}^2 = 684,175\ldots\ \mathrm{cm}^2 \approx 684\ \mathrm{cm}^2$$

151.

a)



Sivun y pituus voidaan laskea janan *AB* avulla.

$$\begin{aligned} AB &= AE + EF + FB \\ 3,5 \text{ cm} &= y + 1,2 \text{ cm} + y \\ y &= 1,15 \text{ cm} \end{aligned}$$

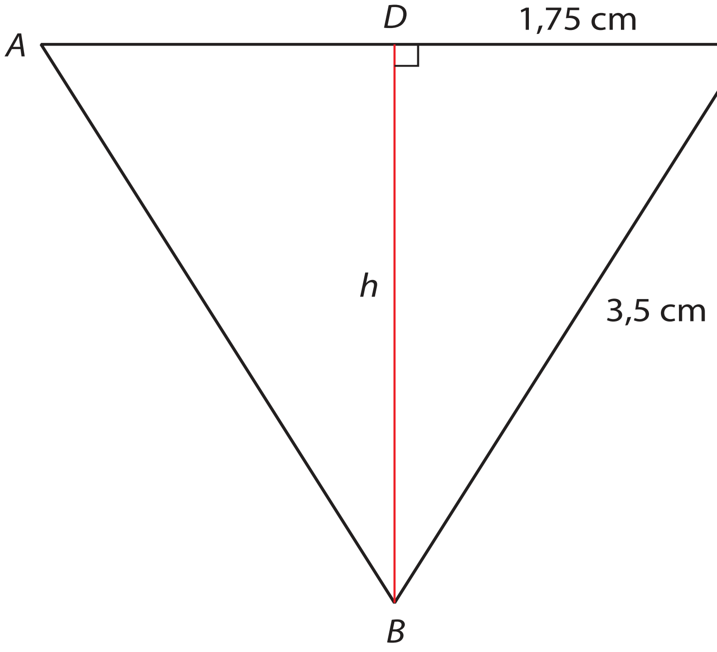
Lasketaan sivun *x* pituus suorakulmaisesta kolmiosta *AED* Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 1,15^2 + x^2 &= 1,2^2 \\ x &= \pm 0,342\ldots \text{ cm} \\ x &\approx \pm 0,34 \text{ cm} \end{aligned}$$

Sivun pituus on aina positiivinen luku, joten *x* = 0,34 cm.

b) Tasakylkisen kolmion kanta on 1,2 cm ja korkeus on tasasivuisen kolmion korkeus + puolisuunnikkaan korkeus.

Ratkaistaan tasasivuisen kolmion korkeus.



Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kantasivun. Janan DC pituus on $DC=\dfrac{3,5\text{ cm}}{2}=1,75\text{ cm}$.

Lasketaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta DBC Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 1,75^2+h^2&=3,5^2\\ h&=\pm 3,031...\text{ cm}\end{aligned}$$

Tasakylkisen kolmion pinta-ala on

$$A=\frac{1,2\text{ cm}\cdot(0,342...\text{ cm}+3,031...\text{ cm})}{2}=2,023...\text{ cm}^2\approx 2,0\text{ cm}^2$$

c) Lasketaan ketun pään pinta-ala osissa.

Kahden tasakylkisen suorakulmaisen kolmion pinta-ala on

$$A_1 = 2 \cdot \frac{1,2\text{ cm} \cdot 1,2\text{ cm}}{2} = 1,44\text{ cm}^2$$

Tasakylkisen puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A_2 = \frac{3,5\text{ cm} + 1,2\text{ cm}}{2} \cdot 0,342...\text{ cm} = 0,805...\text{ cm}^2$$

Tasasivuisen kolmion pinta-ala on

$$A_3 = \frac{3,5\text{ cm} \cdot 3,031...\text{ cm}}{2} = 5,304...\text{ cm}^2$$

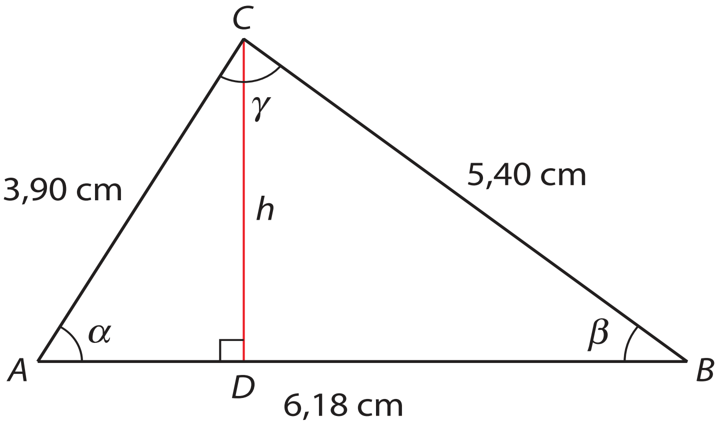
Ketun pään pinta-ala on

$$A_4 = A_1 + A_2 + A_3 = 1,44\text{ cm}^2 + 0,805...\text{ cm}^2 + 5,304...\text{ cm}^2 = 7,549...\text{ cm}^2$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia ketun pään pinta-alasta on ruskea.

$$\frac{A_4 - A}{A_4} = \frac{7,549...\text{ cm}^2 - 2,023...\text{ cm}^2}{7,549...\text{ cm}^2} = 0,732... \approx 0,73 = 73\ \%$$

152.



Kolmion korkeus *h* on

$$\frac{6{,}18\ \text{cm}\cdot h}{2} = 10{,}41\ \text{cm}^2$$
$$h = 3{,}368...\ \text{cm}$$

Kulma *α* voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta *ADC* sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{3{,}368...}{3{,}90}$$
$$\alpha = 59{,}749...° \approx 60°$$

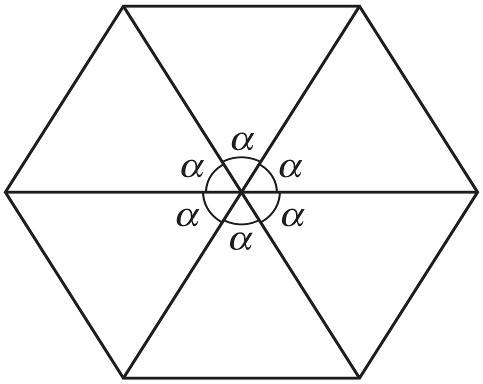
Kulman *β* voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta *DBC* sinin avulla.

$$\sin\beta = \frac{3{,}368...}{5{,}40}$$
$$\beta = 38{,}587...° \approx 39°$$

Kulma γ on

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 180^\circ \\ 60^\circ+39^\circ+\gamma &= 180^\circ \\ \gamma &= 81^\circ \end{aligned}$$

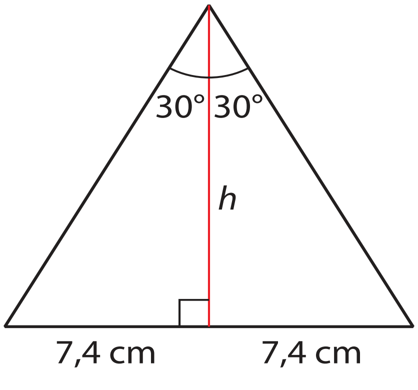
153.



Kuusi samankokoista kulmaa α muodostavat täyden kulman. Kulman α suuruus on

$$6\alpha = 360°$$
$$\alpha = 60°$$

Tarkastellaan yhtä kolmiota.



Tasakylkisessä kolmiossa korkeusjana puolittaa kärkikulman sekä kantasivun.

Lasketaan kolmion korkeus h tangentin avulla.

$$\tan 30° = \frac{7,4}{h}$$

$$h = 12,817\ldots \text{ cm}$$

Lasketaan kuuden kolmion pinta-ala.

$$A = 6 \cdot \frac{14,8 \text{ cm} \cdot 12,817\ldots \text{ cm}}{2} = 569,082\ldots \text{ cm}^2 \approx 569 \text{ cm}^2$$

154.

a) Merkataan janan *FC* pituutta kirjaimella *x*. Tällöin janan *DE* pituus on 3*x,* ja janan *EF* pituus on 6*x*.

Janan *FC* pituus on

$$\begin{aligned} x+3x+6x &= 24 \text{ cm} \\ x &= 2{,}4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Janan *EF* pituus on

$$EF = 6x = 6\cdot 2{,}4 \text{ cm} = 14{,}4 \text{ cm}$$

Puolisuunnikkaan *ABFE* pinta-ala on

$$A = \frac{24 \text{ cm} + 14{,}4 \text{ cm}}{2}\cdot 16 \text{ cm} = 307{,}2 \text{ cm}^2 \approx 310 \text{ cm}^2$$

b) Janan *DE* pituus on

$$DE = 3x = 3 \cdot 2,4 \text{ cm} = 7,2 \text{ cm}$$

Merkataan janaa *AE* pituutta kirjaimella *y*. Lasketaan janan *AE* pituus suorakulmaisesta kolmiosta *AED* Pythagoraan lauseen avulla.

$$16^2 + 7,2^2 = y^2$$
$$y = \pm 17,545... \text{ cm}$$

Sivun pituus on aina positiivinen luku, joten *y* = 17,545… cm.

Merkataan janan *BF* pituutta kirjaimella *z*. Lasketaan janan *BF* pituus suorakulmaisesta kolmiosta *BCF* Pythagoraan lauseen avulla.

$$2,4^2 + 16^2 = z^2$$
$$z = \pm 16,178... \text{ cm}$$

Sivun pituus on aina positiivinen luku, joten *z* = 16,178… cm.

Puolisuunnikkaan *ABFE* piiri on

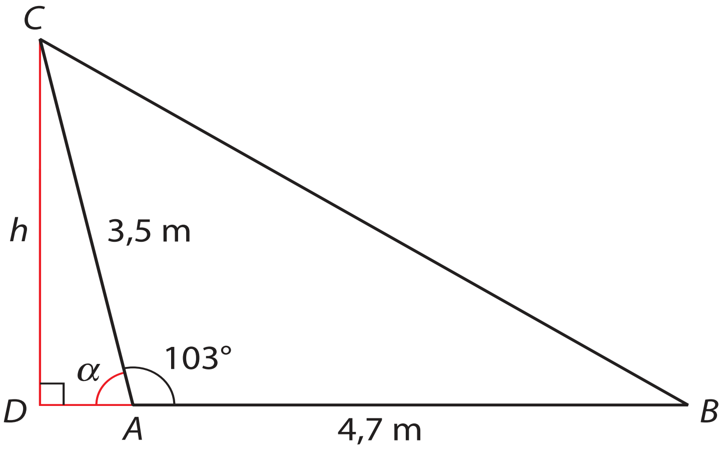
$$p = 24 \text{ cm} + 16,178... \text{ cm} + 14,4 \text{ cm} + 17,545... \text{ cm} = 72,124... \text{ cm} \approx 72 \text{ cm}$$

c) Kulman β voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta *AED* tangentin avulla.

$$\tan \beta = \frac{7,2}{16}$$
$$\beta = 24,227...^\circ \approx 24^\circ$$

155.

a)



Kulma *α* muodostaa oikokulman 103°:n kulman kanssa. Kulma α on

$$\alpha + 103° = 180°$$
$$\alpha = 77°$$

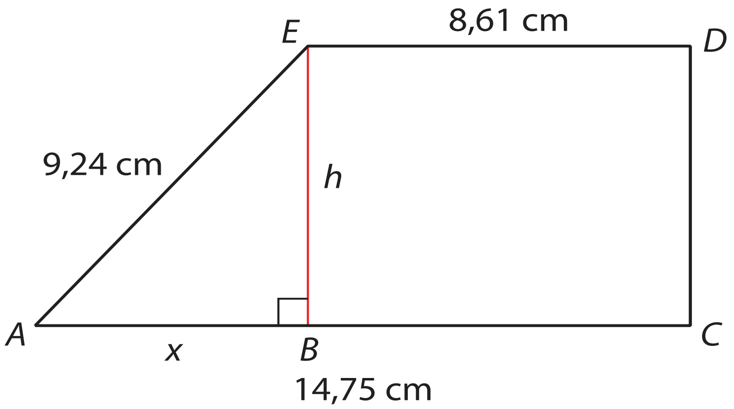
Korkeuden *h* voidaan laskea Suorakulmaisesta kolmiosta *DAC* sinin avulla.

$$\sin 77° = \frac{h}{3,5}$$
$$h = 3,410...\text{ m}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{4,7\text{ m} \cdot 3,410...\text{ m}}{2} = 8,014...\text{ m}^2 \approx 8,0\text{ m}^2$$

b)



Sivun x pituus voidaan laskea janan AC pituudesta.

$$\begin{aligned} AC &= AB + BC \\ 14,75\text{ cm} &= x + 8,61\text{ cm} \\ x &= 6,14\text{ cm} \end{aligned}$$

Korkeuden h voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta ABE Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 6,14^2 + h^2 &= 9,24^2 \\ h &= \pm 6,904\ldots\text{ cm} \end{aligned}$$

Korkeus on aina positiivinen luku, joten $h = 6,904\ldots$ cm.

Nelikulmion pinta-ala on

$$A_1 = 6,904\ldots\text{ cm} \cdot 8,61\text{ cm} = 59,451\ldots\text{ cm}^2$$

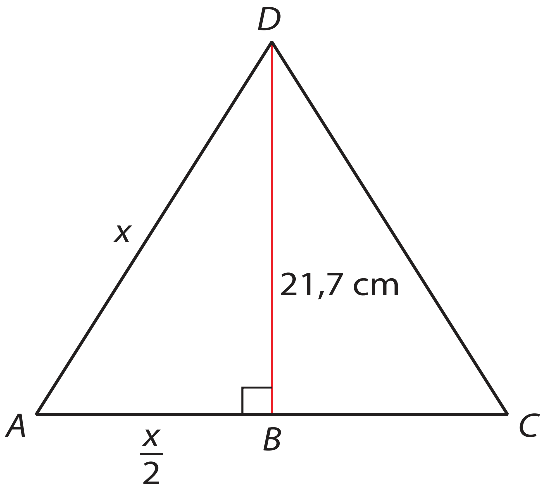
Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on

$$A_2 = \frac{6{,}14\ \text{cm} \cdot 6{,}904\ldots\ \text{cm}}{2} = 21{,}198\ldots\ \text{cm}^2$$

Kuvion pinta-ala on

$$A_1 + A_2 = 59{,}451\ldots\ \text{cm}^2 + 21{,}198\ldots\ \text{cm}^2 = 80{,}649\ldots\ \text{cm}^2 \approx 80{,}6\ \text{cm}^2$$

156.



Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kantasivun.

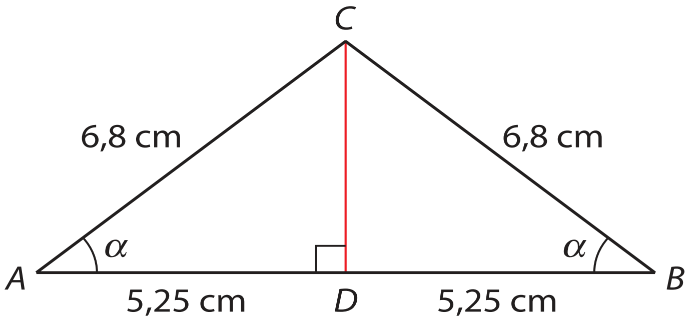
Sivun x voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosa ABD Pythagoraan lauseen avulla.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 21,7^2 = x^2$$

$$x = \pm 25,057\ldots \text{ cm} \approx 25,1 \text{ cm}$$

Sivun pituus on aina positiivista, joten $x = 25,1$ cm.

157.


C
6,8 cm
6,8 cm
α
α
A
B
5,25 cm
D
5,25 cm

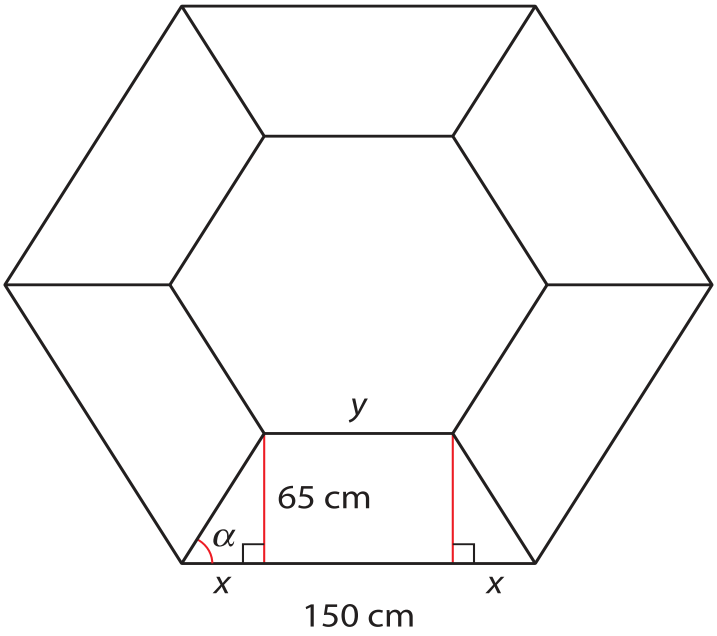
Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan.

Kulman α voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta *ADC* kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{5,25}{6,8}$$

$$\alpha = 39,460...^\circ \approx 39,5^\circ$$

158.



Kuusikulmion yhden kulman suuruus on 120°. Kaksi α kulmaa muodostavat 120°:n kulman, joten kulma α on

$$\begin{aligned} 2\alpha &= 120^\circ \\ \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$

Lasketaan sivun x pituus tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{65}{x} \\ x &= 37{,}527\ldots \text{ cm} \end{aligned}$$

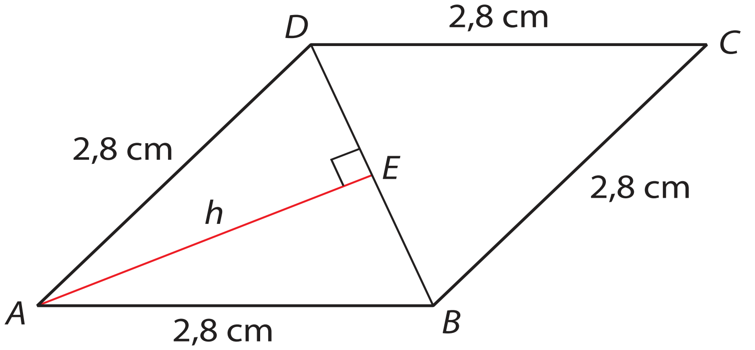
Sivun y pituus on

$$\begin{aligned} 150 \text{ cm} &= x + y + x \\ 150 \text{ cm} &= 37{,}527\ldots \text{ cm} + y + 37{,}527\ldots \text{ cm} \\ y &= 74{,}944\ldots \text{ cm} \end{aligned}$$

Lasketaan kuuden puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$\begin{aligned}A &= 6\cdot\frac{150\text{ cm}+74{,}944\ldots\text{ cm}}{2}\cdot 65\text{ cm}\\ &= 43\,864{,}170\ldots\text{ cm}^2 \approx 44\,000\text{ cm}^2 = 4{,}4\text{ m}^2\end{aligned}$$

159.



Neljäkäs muodostuu kahdesta samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta *ABD* ja *BCD*.

Korkeusjana puolittaa kannan. Janan *BD* pituus on 2,2 cm, joten janan *EB* pituus on 2,2 cm : 2 = 1,1 cm.

Lasketaan sivun *h* pituus suorakulmaisesta kolmiosta *ABE* Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 1{,}1^2 = 2{,}8^2$$
$$h = \pm 2{,}574\ldots\ \text{cm}$$

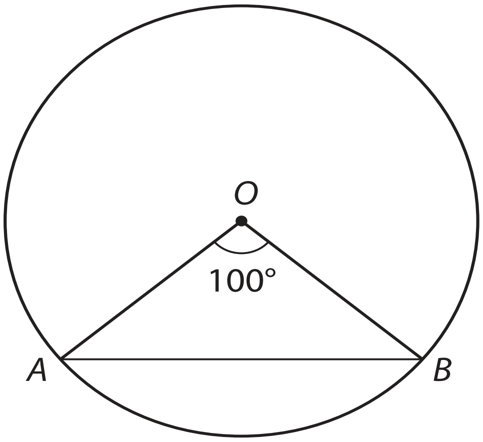
Lasketaan neljäkkään pinta-ala.

$$A = 2 \cdot \frac{2{,}2\ \text{cm} \cdot 2{,}574\ldots\ \text{cm}}{2} = 5{,}664\ldots\ \text{cm}^2 \approx 5{,}7\ \text{cm}^2$$

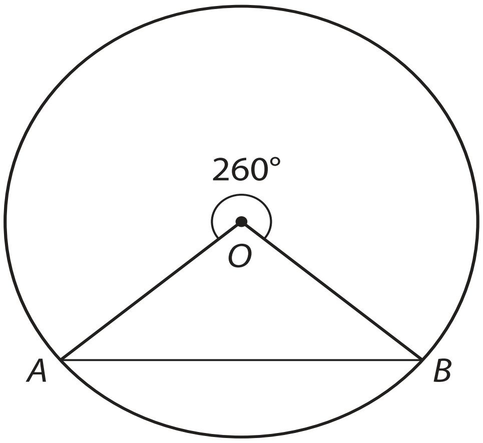
2.3 Ympyrän sekantti ja tangentti

160.

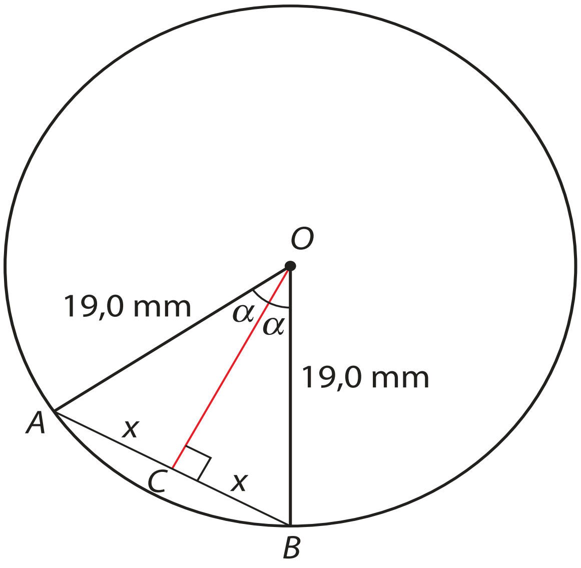
a)



b)



161.



Jänne AB on tasakylkisen kolmion AOB kanta. Merkitään jänteen pituudeksi $2x$.

Kolmiolla AOB on korkeusjana OC.

Koska kolmio AOB on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan: $|CB| = \frac{2x}{2} = x$
- korkeusjana puolittaa huippukulman 56°: $\alpha = \frac{56°}{2} = 28°$.

Ratkaistaan sivun pituus x sinin avulla.

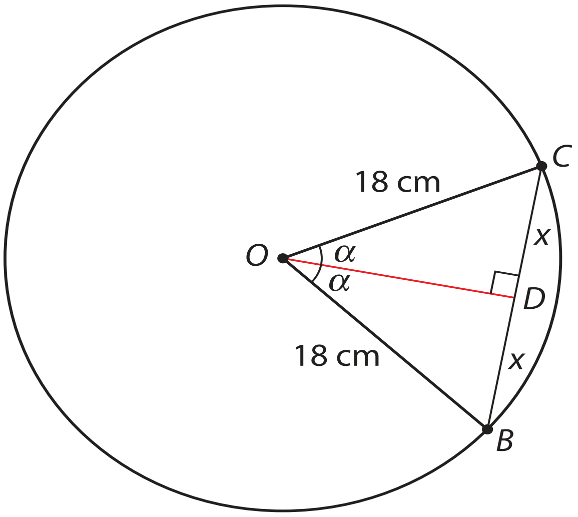
$$\sin 28° = \frac{x}{19,0}$$

$$x = 8,919... \text{ mm}$$

Jänteen *AB* pituus on:

$2\cdot 8{,}919...\ \text{mm} = 17{,}839...\ \text{mm} \approx 17{,}8\ \text{mm}$

162.



Jänne BC on tasakylkisen kolmion BOC kanta. Merkitään jänteen pituudeksi $2x$.

Kolmiolla BOC on korkeusjana OD.

Koska kolmio BOC on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan: $|BD| = \dfrac{2x}{2} = x$
- korkeusjana puolittaa huippukulman 64°: $\alpha = \dfrac{64^\circ}{2} = 32^\circ$.

Ratkaistaan sivun pituus x sinin avulla.

$$\sin 32^\circ = \frac{x}{18}$$
$$x = 9{,}538\ldots \text{ cm}$$

Jänteen BC pituus on:

$$2 \cdot 9{,}538\ldots \text{ cm} = 19{,}077\ldots \text{ cm} \approx 19 \text{ cm}$$

b) Koska segmentin pinta-ala on alle puolet ympyrän pinta-alasta, segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin alasta kolmion *BOC* pinta-ala.

Kolmion pinta-alan laskemiseksi määritetään ensin korkeusjanan pituus *h*.

$$\begin{aligned} \cos 32° &= \frac{h}{18} \\ h &= 15{,}264\ldots\ \text{cm} \end{aligned}$$

Kolmion *BOC* kantana on jänne *BC*.

Lasketaan kolmion *BOC* pinta-ala.

$$A_{BOC} = \frac{19{,}077\ldots\ \text{cm} \cdot 15{,}264\ldots\ \text{cm}}{2} = 145{,}603\ldots\ \text{cm}^2$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

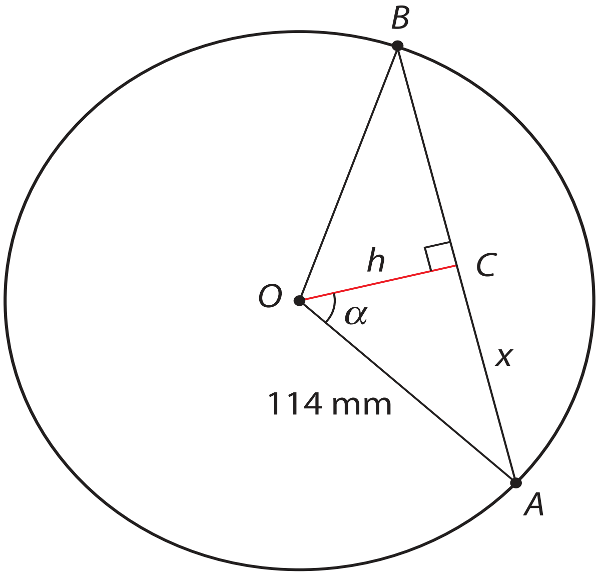
$$\begin{aligned} A_{\text{sektori}} &= \frac{64°}{360°} \cdot \pi \cdot (18\ \text{cm})^2 \\ &= 180{,}955\ldots\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{BOC} \\ &= 180{,}955\ldots\ \text{cm}^2 - 145{,}603\ldots\ \text{cm}^2 \\ &= 35{,}352\ldots\ \text{cm}^2 \\ &\approx 35\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

163.

Segmentin pinta-ala saadaan sektorin pinta-alaan lisäämällä kolmion *AOB* pinta-ala.



Jänne *AB* on tasakylkisen kolmion *AOB* kanta. Merkitään jänteen pituudeksi $2x$.

Kolmiolla *AOB* on korkeusjana *OC*. Kolmion huippukulma on 360° − 247° = 113°.

Koska kolmio *AOB* on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan: $|CB| = \dfrac{2x}{2} = x$
- korkeusjana puolittaa huippukulman 113°: $\alpha = \dfrac{113^\circ}{2} = 56{,}5^\circ$.

Ratkaistaan sivun pituus x sinin avulla.

$$\sin 56{,}5° = \frac{x}{114}$$
$$x = 95{,}062...\text{ mm}$$

Jänteen AB pituus on $2 \cdot 95{,}062...\text{ mm} = 190{,}125...\text{ mm}$.

Ratkaistaan kolmion korkeusjanan h pituus kosinin avulla.

$$\cos 56{,}5° = \frac{h}{114}$$
$$h = 62{,}920...\text{ mm}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{AOB} = \frac{190{,}125...\text{ mm} \cdot 62{,}920...\text{ mm}}{2} = 5\,981{,}410...\text{ mm}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

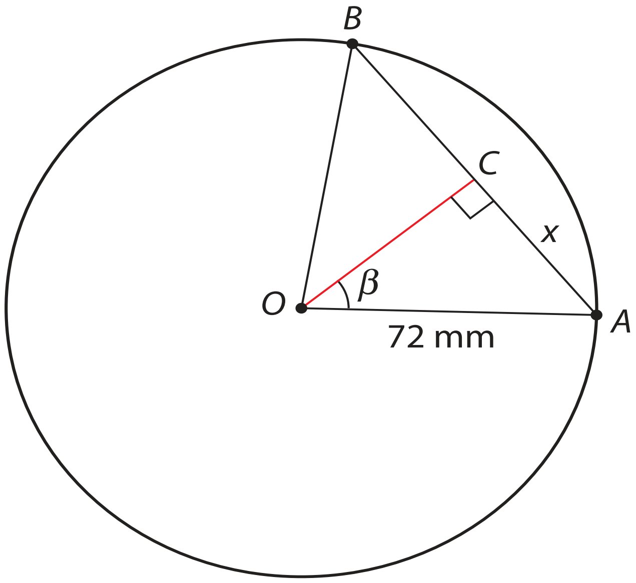
$$A_{\text{sektori}} = \frac{247°}{360°} \cdot \pi \cdot (114\text{ mm})^2 = 28\,012{,}639...\text{ mm}^2$$

Lasketaan väritetyn alueen pinta-ala.

$$A = A_{AOB} + A_{\text{sektori}} = 5\,981{,}410...\text{ mm}^2 + 28\,012{,}639...\text{ mm}^2$$
$$= 33\,994{,}049...\text{ mm}^2 \approx 34\,000\text{ mm}^2 = 340\text{ cm}^2$$

164.

a)



Jänne *AB* on tasakylkisen kolmion *AOB* kanta. Merkitään jänteen pituudeksi 2*x*.

Kolmiolla *AOB* on korkeusjana *OC*.

Koska kolmio *AOB* on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan: $|AB| = |AO| + |OB|$

$$\begin{aligned} 94\text{ mm} &= x + x \\ x &= 47\text{ mm} \end{aligned}$$

- korkeusjana puolittaa huippukulman α: $\alpha = 2\beta$.

Lasketaan sinin avulla kulma β.

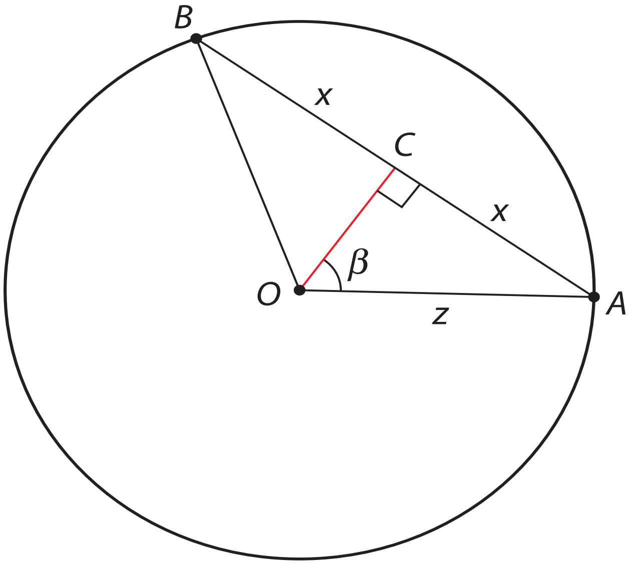
$$\sin\beta = \frac{47}{72}$$

$$\beta = 40{,}751...^\circ$$

Kulman α suuruus on

$$\alpha = 2 \cdot 40{,}751...^\circ = 81{,}502...^\circ \approx 82^\circ$$

b)



Jänne AB on tasakylkisen kolmion AOB kanta. Merkitään jänteen pituudeksi $2x$.

Kolmiolla AOB on korkeusjana OC.

Koska kolmio AOB on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan: $$\begin{aligned} |AB| &= |AO| + |OB| \\ 245 \text{ cm} &= x + x \\ x &= 122{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$
- korkeusjana puolittaa huippukulman 112°: $\alpha = \dfrac{112°}{2} = 56°$.

Lasketaan sinin avulla ympyrän säteen z pituus.

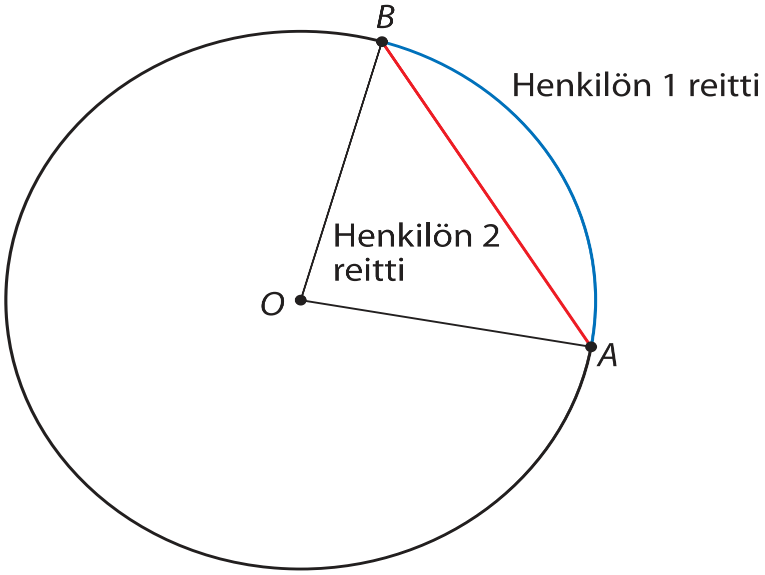
$$\sin 56° = \frac{122{,}5}{z}$$

$$z = 147{,}761\ldots \text{ cm} \approx 148 \text{ cm}$$

165.

Piirretään mallikuva.

- Merkitään kirjaimella O saaren keskipistettä.
- Henkilö 1 kulkee ympyrän kaarta pitkin.
- Henkilö 2 kulkee pitkin jännettä AB.



Janan OA pituus on sama kuin saaren säde.

$$|OA| = 1693 \text{ m}$$

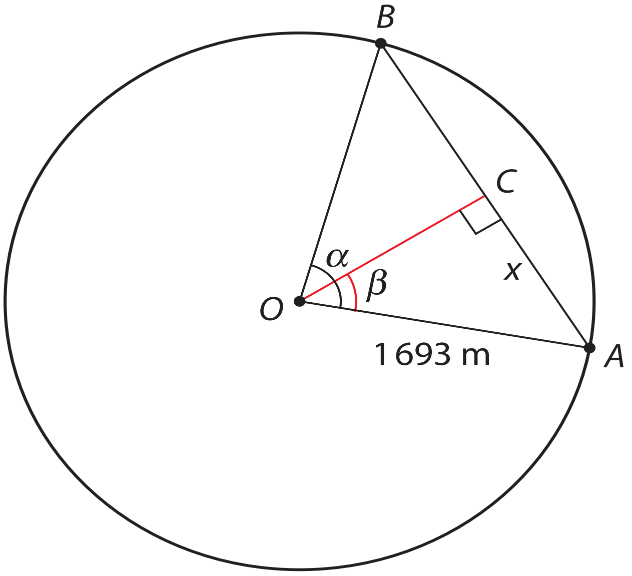
Merkitään henkilön 1 reittiä eli kaarta AB vastaavaa keskuskulmaa kirjaimella α. Ratkaistaan kaaren pituuden avulla keskuskulman α suuruus.

$$4500 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1693$$

$$\alpha = 152{,}292...°$$

Piirretään kolmiolle *AOB* korkeusjana *OC*, joka jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Merkitään sivun *CA* pituutta kirjaimella *x*.



Suorakulmaisen kolmion *OAC* kulma *β* on puolet kulmasta *α* eli

$$\beta = \frac{152,292...^\circ}{2} = 76,146...^\circ$$

Ratkaistaan *x* sinin avulla.

$$\sin 76,146...^\circ = \frac{x}{1693}$$

$$x = 1643,750... \text{ m}$$

Ratkaistu x on puolet jänteen pituudesta. Jänteen AB pituus on siis

$2 \cdot 1643{,}750\ldots\text{ m} = 3287{,}500\ldots\text{ m}$

Henkilö 1 kävelee

$4500\text{ m} - 3287{,}500\ldots\text{ m} = 1212{,}499\ldots\text{ m} \approx 1210\text{ m}$

pidemmän matkan kuin henkilö 2.

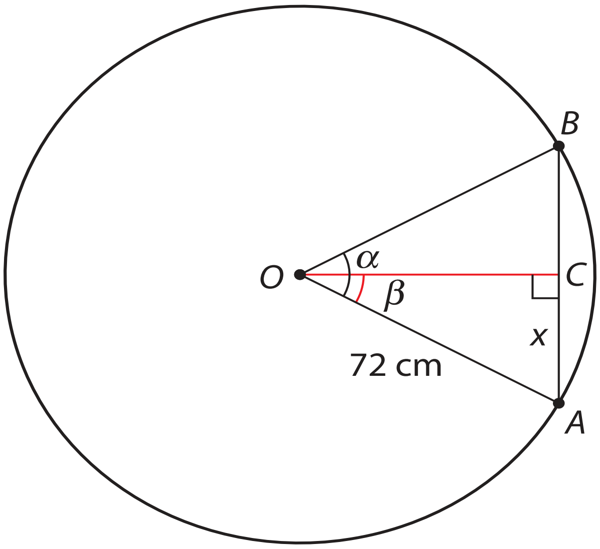
166.

Ratkaistaan kaaren pituuden avulla keskuskulman α suuruus.

$$72 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 72$$
$$\alpha = 57{,}295...°$$

Piirretään kolmiolle AOB korkeusjana OC, joka jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Merkitään sivun CA pituutta kirjaimella x.



Suorakulmaisen kolmion OAC kulma β on puolet kulmasta α eli

$$\beta = \frac{57{,}295...°}{2} = 28{,}647...°$$

Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 28{,}647...^\circ &= \frac{x}{72} \\ x &= 34{,}518...\text{ cm} \end{aligned}$$

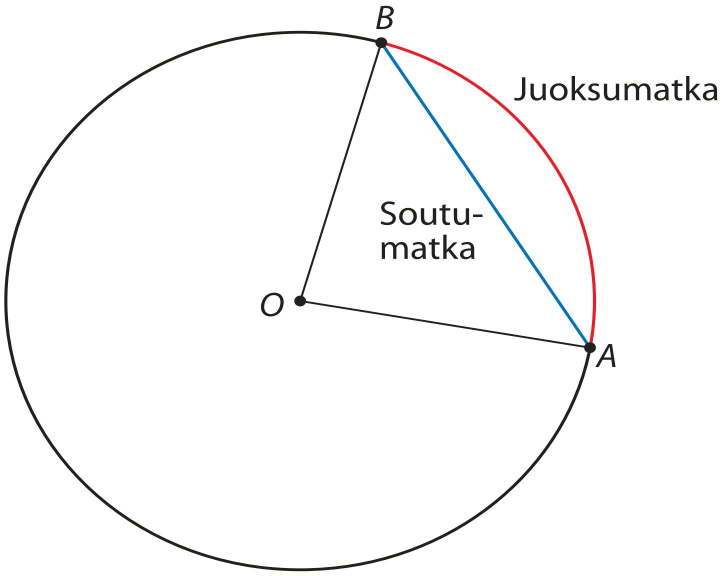
Ratkaistu x on puolet jänteen pituudesta. Jänteen AB pituus on siis

$$2 \cdot 34{,}518...\text{ cm} = 69{,}037...\text{ cm} \approx 69\text{ cm}$$

167.

Piirretään mallikuva.

- Merkitään kirjaimella *O* järven keskipistettä.
- Juuso Juoksee ympyrän kaarta pitkin.
- Elias soutaa pitkin jännettä *AB*.

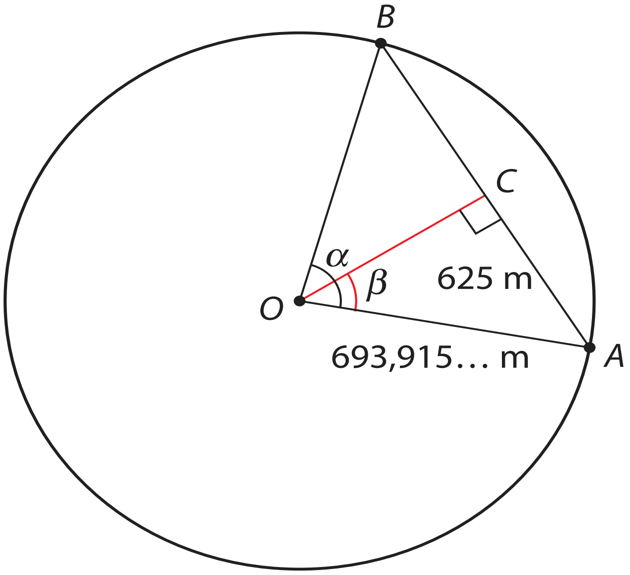


Lasketaan järven säde ympärysmitan avulla.

$$4360 = 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$r = 693{,}915\ldots \text{ m}$$

Piirretään kolmiolle *AOB* korkeusjana *OC*, joka jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Sivun *CA* pituus on puolet jänteestä *AB* eli $|CA| = \dfrac{1250\text{ m}}{2} = 625\text{ m}$.



Lasketaan kulman β suuruus sinin avulla.

$$\sin\beta = \frac{625}{693{,}915...}$$
$$\beta = 64{,}248...^\circ$$

Kulma α on kaksi kertaa suurempi kuin kulma β, joten kulman α suuruus on

$$\alpha = 2\cdot 64{,}248...^\circ = 128{,}496...^\circ$$

Lasketaan kaaren pituus AB.

$$b = \frac{128{,}496...^\circ}{360^\circ}\cdot 2\cdot\pi\cdot 693{,}915\text{ m} = 1556{,}239...\text{ m} \approx 1560\text{ m}$$

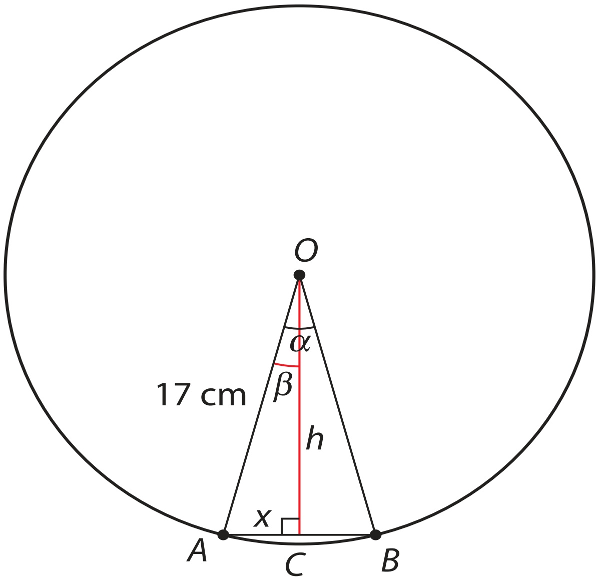
168.

Vuoan halkaisija on 34 cm, joten vuoan säde on 17 cm.

Tarkastellaan yhtä sektorinmuotoista palasta.

Kakkupohja jaetaan 12 yhtä suureen sektoriin, joten yhden sektorin keskuskulma on

$$\alpha = \frac{360°}{12} = 30°$$



Kulma β on puolet kulmasta α, joten kulman β suuruus on

$$\beta = \frac{30°}{2} = 15°$$

Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta *ACO* sivun *x* pituus sinin avulla.

$$\sin 15° = \frac{x}{17}$$
$$x = 4,399... \text{ cm}$$

Janan *AB* pituus on kaksi kertaa suurempi kuin *x*, joten janan *AB* pituus on

$$|AB| = 2 \cdot 4,399... \text{ cm} = 8,799... \text{ cm}$$

Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta *ACO* korkeusjanan *h* pituus kosinin avulla.

$$\cos 15° = \frac{h}{17}$$
$$h = 16,420... \text{ cm}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A_{AOB} = \frac{8,799... \text{ cm} \cdot 16,420... \text{ cm}}{2} = 72,251... \text{ cm}^2$$

Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{30°}{360°} \cdot \pi \cdot (17 \text{ cm})^2 = 75,660... \text{ cm}^2$$

Lasketaan pois leikatun kakkupohjan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_2 &= 12 \cdot (A_{\text{sektori}} - A_{AOB}) \\ &= 12 \cdot (75,660...\ \text{cm}^2 - 72,251...\ \text{cm}^2) \\ &= 40,906...\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Kakun pinta-ala on

$$A_1 = \pi \cdot (17\ \text{cm})^2 = 907,920...\ \text{cm}^2$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kakun pinta-alasta leikataan pois.

$$1 - \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{907,920...\ \text{cm}^2 - 40,906...\ \text{cm}^2}{907,920...\ \text{cm}^2} = 0,045... \approx 0,045 = 4,5\ \%$$

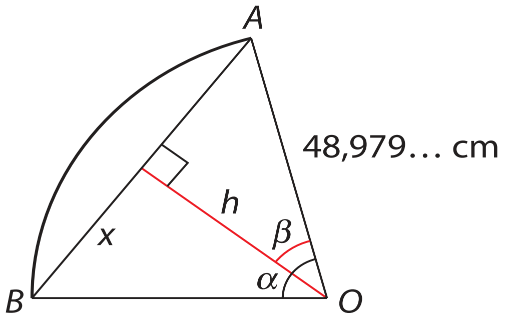
169.

Ratkaistaan ympyräkaaren pituuden avulla sektorin säteen pituus r.

$$64,2=\frac{75,1^\circ}{360^\circ}\cdot 2\cdot\pi\cdot r$$

$$r=48,979...\text{ cm}$$

Piirretään kolmiolle AOB korkeusjana OC, joka jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.



Jänne AB on tasakylkisen kolmion AOB kanta. Merkitään jänteen pituudeksi $2x$.

Kolmiolla AOB on korkeusjana OC.

Koska Kolmio AOB on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan: $|CA|=\frac{2x}{2}=x$
- korkeusjana puolittaa huippukulman α: $\beta=\frac{\alpha}{2}=37,55^\circ$.

Ratkaistaan sivun pituus x sinin avulla.

$$\sin 37,55° = \frac{x}{48,979...}$$

$$x = 29,850... \text{ cm}$$

Ratkaistu x on puolet jänteen pituudesta. Jänteen AB pituus on siis

$$2 \cdot 29,850... \text{ cm} = 59,701... \text{ cm}$$

Ratkaistaan sivun pituus h kosinin avulla.

$$\cos 37,55° = \frac{h}{48,979}$$

$$h = 38,832... \text{ cm}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{AOB} = \frac{59,701... \text{ cm} \cdot 38,832... \text{ cm}}{2} = 1159,164... \text{ cm}^2$$

Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{75,1°}{360°} \cdot \pi \cdot (48,979... \text{ cm})^2 = 1572,254... \text{ cm}^2$$

Segmentin pinta-ala on

$$A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{AOB} = 1\,572,254\ldots\ \text{cm}^2 - 1159,164\ldots\ \text{cm}^2 = 413,090\ldots\ \text{cm}^2$$

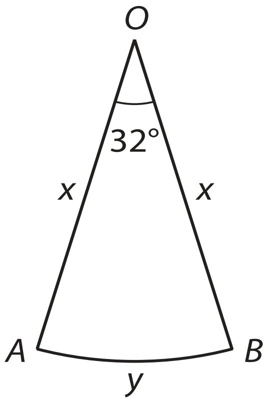
Lasketaan, kuinka monta prosenttia segmentti on koko sektorin pinta-alasta.

$$\begin{aligned}1-\frac{A_{\text{sektori}}-A_{\text{segmentti}}}{A_{\text{sektori}}} &= 1-\frac{1572,254\ldots\ \text{cm}^2-413,090\ldots\ \text{cm}^2}{1572,254\ldots\ \text{cm}^2}\\ &= 0,262\ldots \approx 0,263 = 26,3\ \%\end{aligned}$$

170.

Piirretään mallikuva.

- Merkitään kirjaimella O ympyräsektorin kärkeä.
- Merkitään kirjaimella x sektorin sädettä.
- Merkitään kirjaimella y kaaren pituutta.



Sektorin säteet ja kaari muodostavat ympyräsektorin piirin. Muodostetaan yhtälö.

$$x + x + y = 224$$
$$y = 224 - 2x$$

Muodostetaan kaaren pituuden yhtälö

$$y = \frac{32°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot x$$

Sivun x pituus on

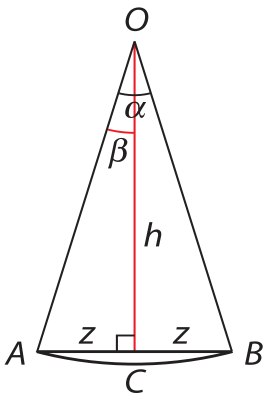
$$224 - 2x = \frac{32°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot x$$
$$x = 87{,}551\ldots \text{ cm}$$

Kaaren pituus y on

$$y = 224 - 2 \cdot 87,551... = 48,897...\text{ cm}$$

Piirretään ympyräsektoriin segmentti AB. Piirretään kolmiolle AOB korkeusjana OC, joka jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Merkitään sivun CA pituutta kirjaimella z.



Suorakulmaisen kolmion OAC kulma β on puolet kulmasta α eli

$$\beta = \frac{32°}{2} = 16°$$

Ratkaistaan z sinin avulla.

$$\sin 16° = \frac{z}{87,551...}$$

$$z = 24,132...\text{ cm}$$

Ratkaistu z on puolet jänteen pituudesta. Jänteen AB pituus on siis

$$2 \cdot 24{,}132\ldots\ \text{cm} = 48{,}264\ldots\ \text{cm}$$

Ratkaistaan h kosinin avulla.

$$\cos 16^\circ = \frac{h}{87{,}551\ldots}$$

$$h = 84{,}159\ldots\ \text{cm}$$

Lasketaan kolmion AOB pinta-ala.

$$A_{AOB} = \frac{48{,}264\ldots\ \text{cm} \cdot 84{,}159\ldots\ \text{cm}}{2} = 2\,030{,}935\ldots\ \text{cm}^2$$

Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{32^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (87{,}551\ldots\ \text{cm})^2 = 2140{,}521\ldots\ \text{cm}^2$$

Leikatun palan pinta-ala.

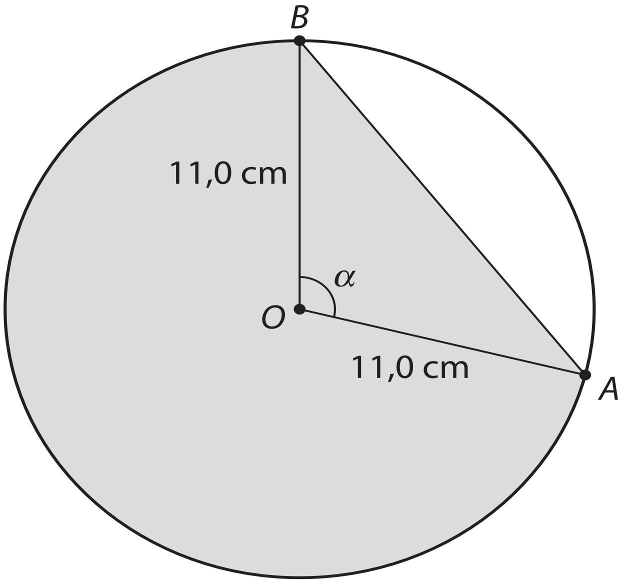
$$A_{\text{sektori}} - A_{AOB} = 2140{,}521\ldots\ \text{cm}^2 - 2030{,}935\ldots\ \text{cm}^2 = 109{,}586\ldots\ \text{cm}^2 \approx 110\ \text{cm}^2$$

171.

Ympyrän halkaisija on 22,0 cm, joten ympyrän säde on 11,0 cm.

Piirretään mallikuva.

- Merkitään ympyrän keskipistettä kirjaimella *O*.
- Merkitään segmentin päätepisteitä kirjaimilla *A* ja *B*.
- Piirretään ympyrän keskipisteeltä säteet pisteisiin *A* ja *B*.



Väritetty alue pitää laskea.

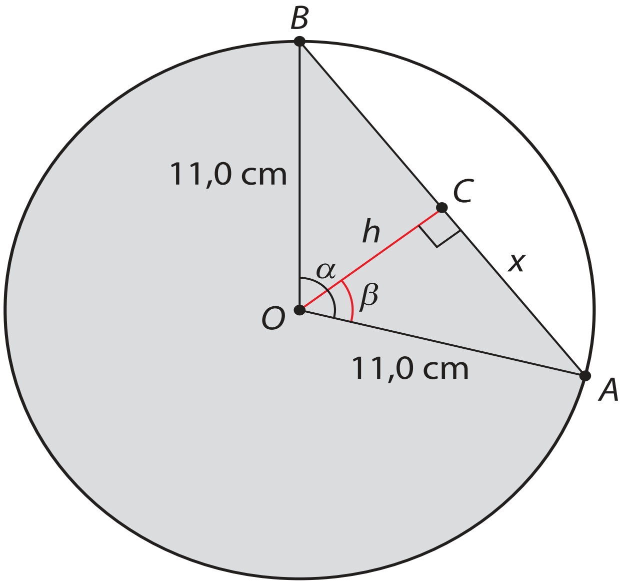
Ratkaistaan kaaren pituuden avulla keskuskulman α suuruus.

$$20{,}0 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 11{,}0$$

$$\alpha = 104{,}174...^\circ$$

Piirretään kolmiolle AOB korkeusjana OC, joka jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Merkitään sivun CA pituutta kirjaimella x.



Suorakulmaisen kolmion OAC kulma β on puolet kulmasta α eli

$$\beta = \frac{104,174...^\circ}{2} = 52,087..^\circ$$

Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\sin 52,087...^\circ = \frac{x}{11,0}$$

$$x = 8,678...\text{ cm}$$

Ratkaistu x on puolet jänteen pituudesta. Jänteen AB pituus on siis

$$2 \cdot 8,678...\text{ cm} = 17,356...\text{ cm}$$

Ratkaistaan *h* kosinin avulla.

$$\cos 52{,}087...° = \frac{h}{11{,}0}$$
$$h = 6{,}759...\ \text{cm}$$

Kolmion *AOB* pinta-ala on

$$A_{AOB} = \frac{17{,}356...\ \text{cm} \cdot 6{,}759...\ \text{cm}}{2} = 58{,}655...\ \text{cm}^2$$

Kulmat *α* ja *γ* muodostavat täyden kulman, joten

$$\gamma + \alpha = 360°$$
$$\gamma = 255{,}825...°$$

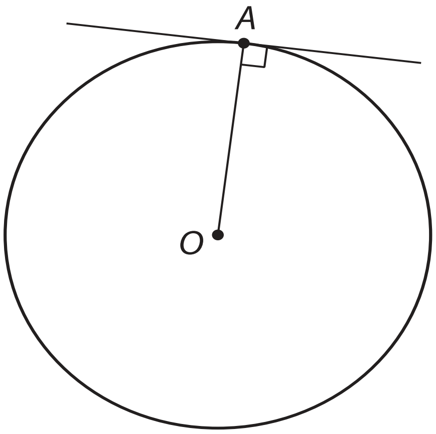
Lasketaan *γ* kulmaisen sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{255{,}825...°}{360°} \cdot \pi \cdot (11{,}0\ \text{cm})^2 = 270{,}132...\ \text{cm}^2$$

Lasketaan väritetyn alueen ala.

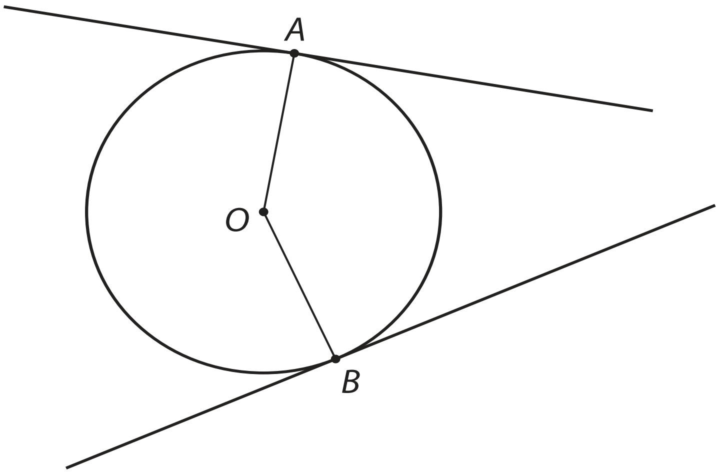
$$A_{AOB} + A_{\text{sektori}} = 58{,}655...\ \text{cm}^2 + 270{,}132...\ \text{cm}^2 = 328{,}787...\ \text{cm}^2 \approx 329\ \text{cm}^2$$

172.

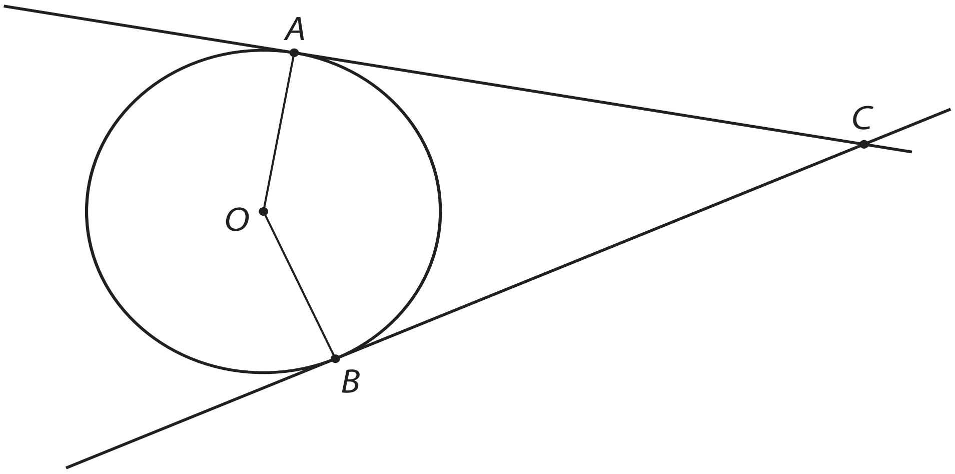


173.

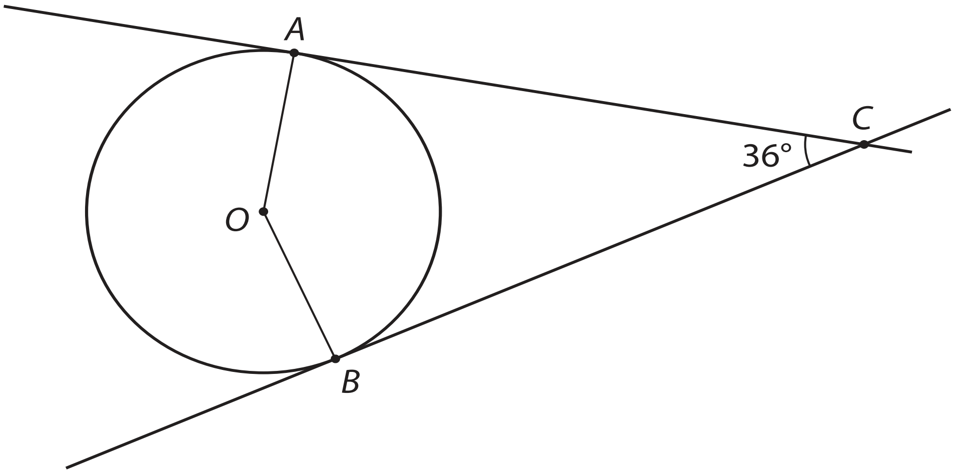
a)



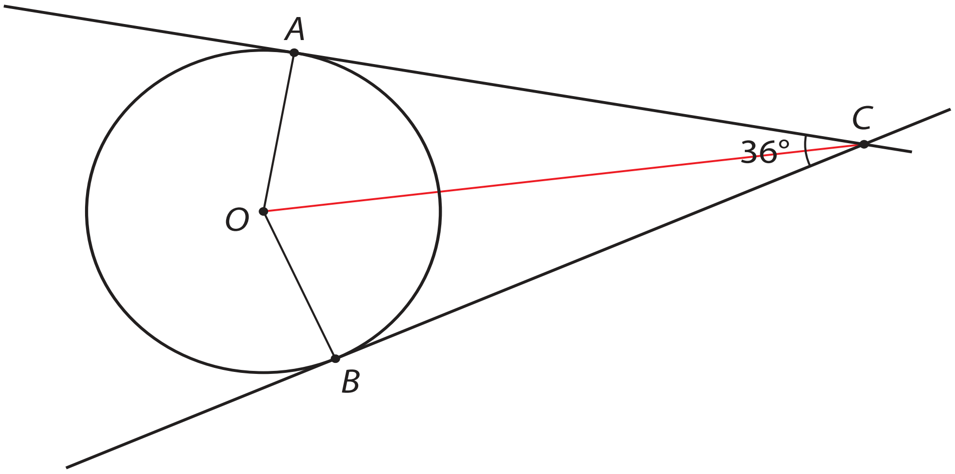
b)



c)

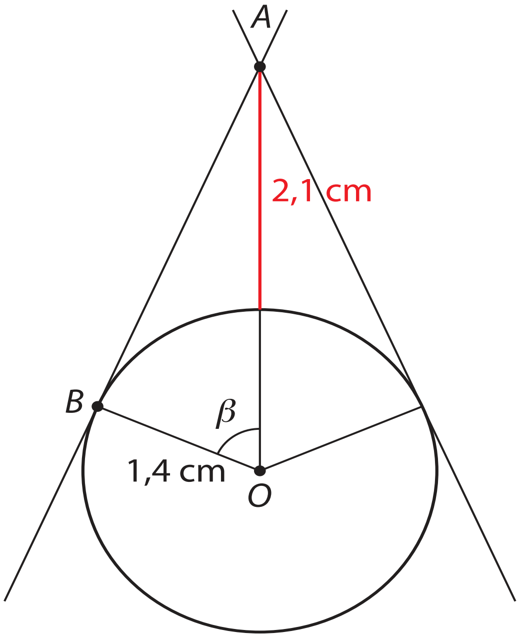


d)



174.

a)



Kolmio *OAB* on suorakulmainen, koska jana *OB* on kohtisuorassa janaa *AB* vastaan.

Kolmion kateetteina ovat janat *OB* ja *AB*. Hypotenuusa on jana *OA*.

Hypotenuusan pituus on 2,1 m + 1,4 m = 3,5 m.

Lasketaan kulma β kosinin avulla.

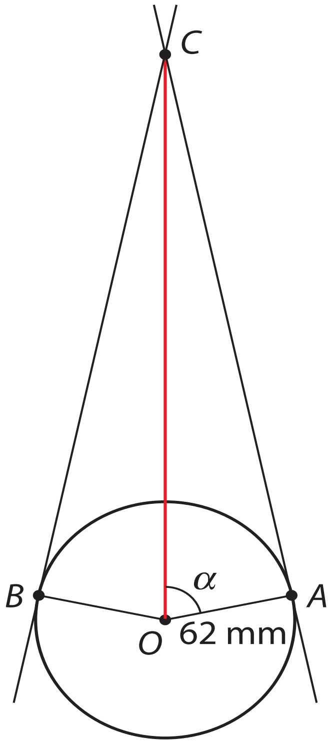
$$\cos\beta = \frac{1,4}{3,5}$$

$$\beta = 66,421...^\circ$$

Kulma α on kaksi kertaa β kulma, eli

$$\alpha = 2\cdot 66,421...^\circ = 132,842...^\circ \approx 133^\circ .$$

b)



Suorakulmaisen kolmion *OAC* kulma α on puolet keskuskulmasta eli
156° : 2 = 78°.

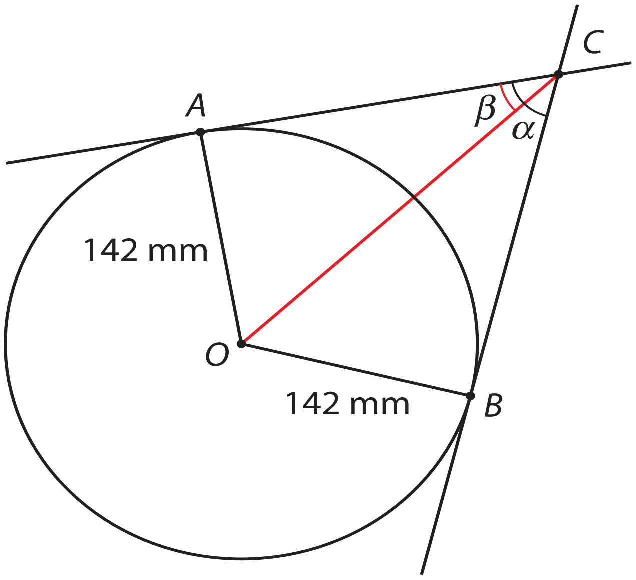
Merkitään janan *OC* pituutta kirjaimella *x*. Ratkaistaan *x* kosinin avulla.

$$\cos 78° = \frac{62}{x}$$

$$x = 298{,}203\ldots \text{ mm} \approx 298 \text{ mm}$$

175.

a) Piirretään mallikuva.



Kulma α on 66,0°, joten kulma $\beta = 33{,}0°$.

Kolmio *OCA* on suorakulmainen, koska jana *AC* on kohtisuorassa janaa *OA* vastaan.

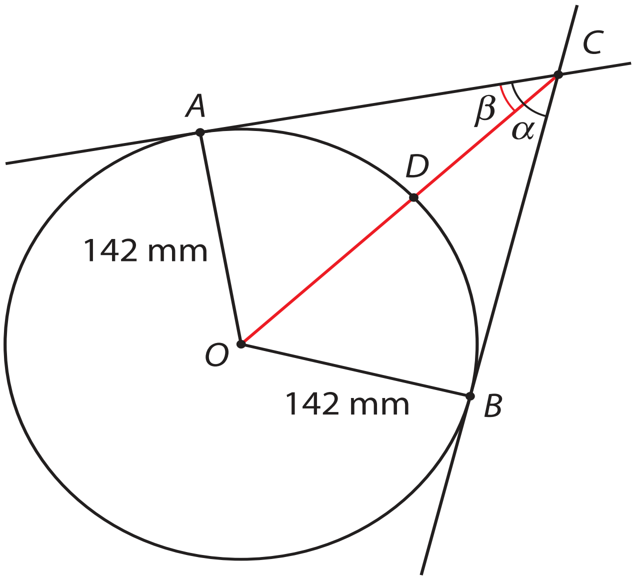
Kolmion kateetteina ovat janat *OA* ja *AC*. Hypotenuusa on jana *OC*.

Lasketaan jana *AC* tangentin avulla.

$$\tan 33{,}0° = \frac{142}{|AC|}$$

$$|AC| = 218{,}660\ldots \text{ mm} \approx 219 \text{ mm}$$

b) Piirretään mallikuva.



Merkitään janan OA pituutta kirjaimella x. Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\sin 33{,}0^\circ = \frac{142}{x}$$

$$x = 260{,}723...\text{ mm}$$

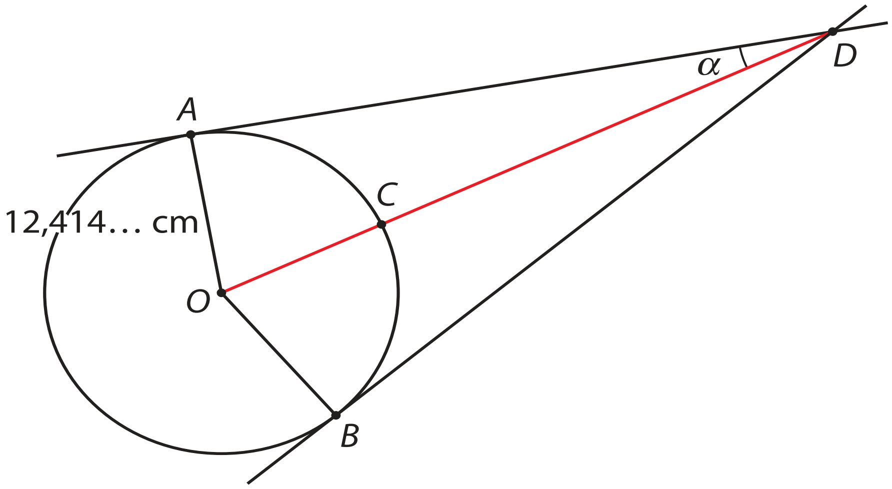
Pisteen C etäisyys pisteestä D on säteen verran lyhyempi kuin sivu OC.

$$|DC| = |OC| - |OD| = 260{,}723...\text{ mm} - 142\text{ mm} = 118{,}723...\text{ mm} \approx 119\text{ mm}$$

176.

Ratkaistaan ympyrän säde kehän pituuden avulla.

$$78 = 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$r = 12,414... \text{ cm}$$



Pisteen *D* etäisyys pisteestä *O* on säteen verran pidempi kuin sivu *CD*.

$$|OD| = |OC| + |CD| = 12,414... \text{ cm} + 35 \text{ cm} = 47,414... \text{ cm}$$

Kolmio *ODA* on suorakulmainen, koska jana *AD* on kohtisuorassa janaa *OA* vastaan.

Kolmion kateetteina ovat janat *OA* ja *AD*. Hypotenuusa on jana *OD*.

Lasketaan kulma α sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{12,414...}{47,414...}$$

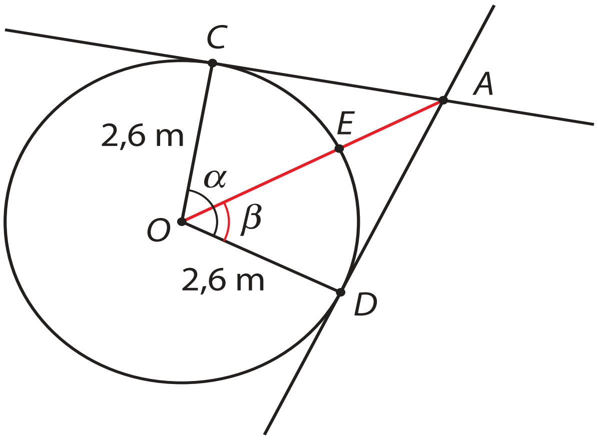
$$\alpha = 15,178...°$$

Tangenttikulma on kaksi α kulmaa, eli

$$2\cdot 15,178...° = 30,356...° \approx 30°$$

177.

Ympyrän halkaisija on 5,2 m, joten ympyrän säde on 2,6 m.



Kulma β on puolet kulmasta α, joten

$$\beta = \frac{106°}{2} = 53°$$

Kolmio *ODA* on suorakulmainen, koska jana *AD* on kohtisuorassa janaa *OD* vastaan.

Kolmion kateetteina ovat janat *OD* ja *AD*. Hypotenuusa on jana *OA*.

Lasketaan jana *OA* kosinin avulla.

$$\cos 53° = \frac{2{,}6}{|OA|}$$

$$|OA| = 4{,}320\ldots \text{ m}$$

Pisteen *E* etäisyys pisteestä *A* on säteen verran lyhyempi kuin sivu *OA*.

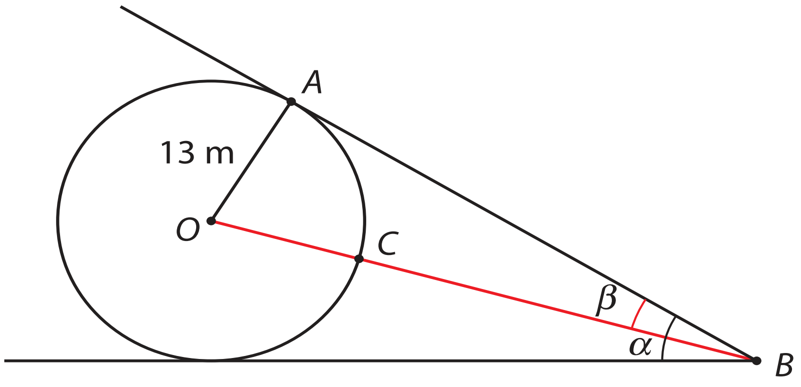
$$|EA| = |OA| - |OE| = 4{,}320\ldots \text{ m} - 2{,}6 \text{ m} = 1{,}720\ldots \text{ m} \approx 1{,}7 \text{ m}$$

178.

Tornin halkaisija on 26 m, joten tornin säde on 26 m : 2 = 13 m.

Piirretään mallikuva

- Henkilö seisoo pisteessä *B*
- Merkitään tornin keskipistettä kirjaimella *O*.
- Henkilö näkee tornin pisteen *A*.



Jana *OB* on säteen verran pidempi kuin *CB*, joten

$$|OB| = |CB| + |OC| = 35\text{ m} + 13\text{ m} = 48\text{ m}$$

Kolmio *OBA* on suorakulmainen, koska jana *AB* on kohtisuorassa janaa *OA* vastaan.

Kolmion kateetteina ovat janat *OA* ja *AB*. Hypotenuusa on jana *OB*.

Lasketaan kulma β sinin avulla.

$$\sin\beta = \frac{13}{48}$$
$$\beta = 15{,}713...^\circ$$

Kulma α on kaksi kertaa kulma β, joten

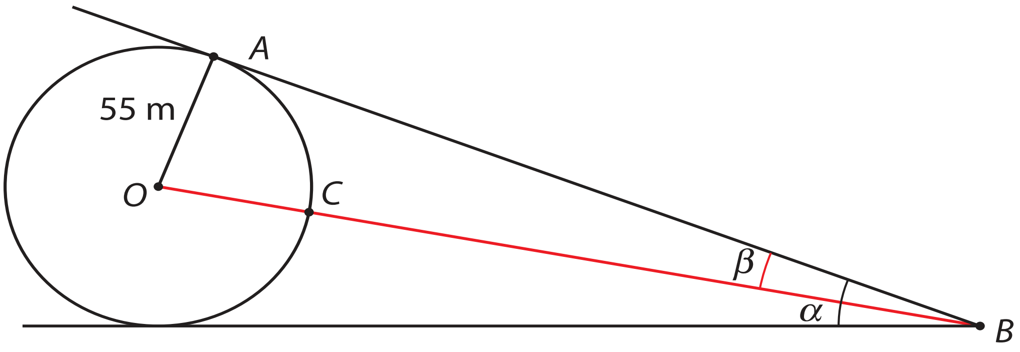
$$\alpha = 2\cdot 15{,}713...^\circ = 31{,}427...^\circ \approx 31^\circ$$

Henkilö näkee tornin 31 asten kulmassa.

179.

Piirretään mallikuva.

- Henkilö seisoo pisteessä *B*
- Merkitään jäähallin keskipistettä kirjaimella *O*.
- Henkilö näkee jäähallin pisteen *A*.



Jana *OB* on säteen verran pidempi kuin *CB*, joten

$$|OB| = |CB| + |OC| = 245\text{ m} + 55\text{ m} = 300\text{ m}$$

Kolmio *OBA* on suorakulmainen, koska jana *AB* on kohtisuorassa janaa *OA* vastaan.

Kolmion kateetteina ovat janat *OA* ja *AB*. Hypotenuusa on jana *OB*.

Lasketaan kulma β sinin avulla.

$$\sin\beta = \frac{55}{300}$$

$$\beta = 10{,}563...^\circ$$

Kulma α on kaksi kertaa kulma β, joten

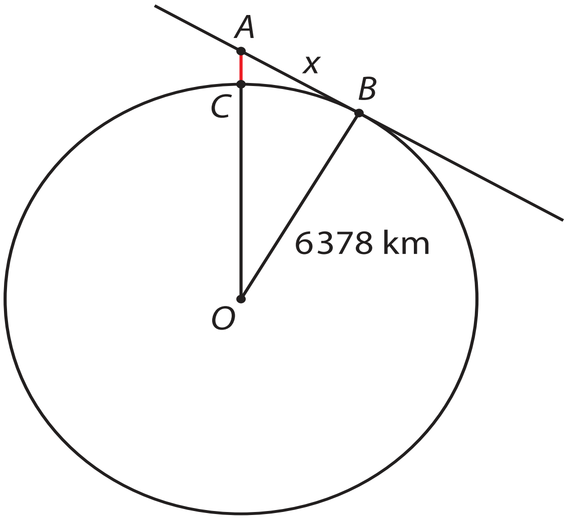
$\alpha = 2 \cdot 10,563...^\circ = 21,127...^\circ \approx 21^\circ$

Henkilö näkee jäähallin 21 asteen kulmassa.

180.

Piirretään mallikuva.

- Merkitään maan keskipistettä kirjaimella O.
- Majakka on pisteessä A.
- Majakasta näkee pisteeseen B.



Jana OA on säteen verran pidempi kuin CA, joten

$$|OA| = |CA| + |OC| = 51{,}0\text{ m} + 6\,378\,000\text{ m} = 6\,378\,051\text{ m}$$

Kolmio BOA on suorakulmainen, koska jana AB on kohtisuorassa janaa OB vastaan.

Kolmion kateetteina ovat janat OB ja AB. Hypotenuusa on jana OA.

Lasketaan sivun x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

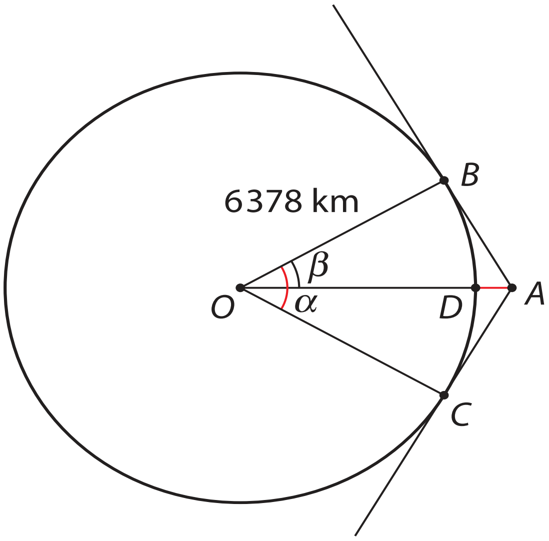
$$6\,378\,000^2 + x^2 = 6\,378\,051^2$$
$$x = \pm 25\,506{,}050...\text{ m} \approx \pm 25\,500 \text{ m}$$

Sivun pituus on aina positiivinen, joten $x = 25\ 500$ m = 25,5 km.

181.

Piirretään mallikuva.

- Merkitään maan keskipistettä kirjaimella *O*.
- Merkitään satelliitin kohtaa pisteellä *A*.
- Merkitään pisteillä *C* ja *B* päiväntasaajan kohtia, joihin satelliitista näkee.



Jana *OA* on säteen verran pidempi kuin *DA*, joten

$$|OA| = |DA| + |OD| = 58\text{ km} + 6\,378\text{ km} = 6\,436\text{ km}$$

Kolmio *BOA* on suorakulmainen, koska jana *AB* on kohtisuorassa janaa *OB* vastaan.

Kolmion kateetteina ovat janat *OB* ja *AB*. Hypotenuusa on jana *OA*.

Lasketaan kulma β kosinin avulla.

$$\cos\beta = \frac{6378}{6436}$$
$$\beta = 7{,}697...^\circ$$

Kulma α on kaksi kertaa kulma β, joten

$$\alpha = 2 \cdot 7{,}697...^\circ = 15{,}395...^\circ$$

Lasketaan kehän pituus *CB*.

$$b_{CB} = \frac{15{,}395...^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6378\ \text{km} = 1713{,}808...\ \text{km}$$

Päiväntasaajan pituus on

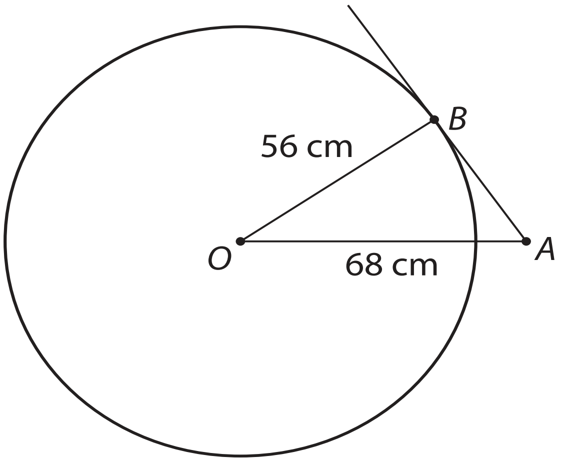
$$b_1 = 2 \cdot \pi \cdot 6\,378\ \text{km} = 40\,074{,}155...\ \text{km}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia päiväntasaajasta voitaisiin nähdä satelliitista.

$$1 - \frac{b_1 - b_{CB}}{b_1} = 1 - \frac{40\,074{,}155...\ \text{km} - 1713{,}808...\ \text{km}}{40\,074{,}155...\ \text{km}} = 0{,}0427... \approx 0{,}043 = 4{,}3\ \%$$

182.

Piirretään mallikuva.



Kolmio *BOA* on suorakulmainen, koska jana *AB* on kohtisuorassa janaa *OB* vastaan.

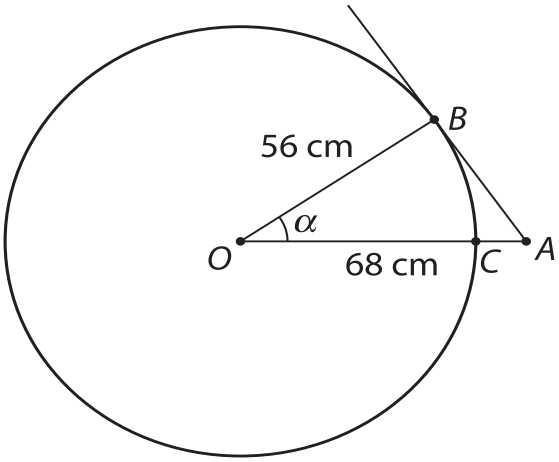
Kolmion kateetteina ovat janat *OB* ja *AB*. Hypotenuusa on jana *OA*.

Ratkaistaan jana *AB* pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 56^2 + |AB|^2 &= 68^2 \\ |AB| &= \pm 38,574... \end{aligned}$$

Sivun pituus on aina positiivista, joten $|AB| = 38,574...\text{ cm} \approx 39\text{ cm}$.

b)



Lasketaan kulma α kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{56}{68}$$

$$\alpha = 34{,}560...^\circ$$

Lasketaan kaaren BC pituus.

$$b_{BC} = \frac{34{,}560...^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 56 \text{ cm} = 33{,}778... \text{ cm} \approx 34 \text{ cm}$$

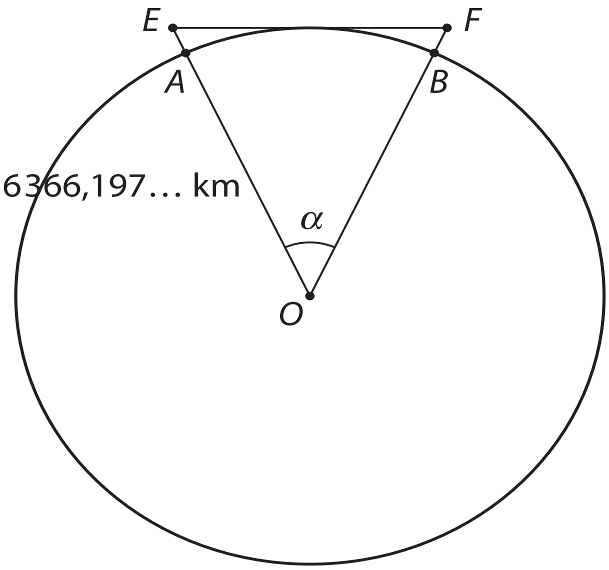
183.

Lasketaan maapallon säde r ympärysmitan avulla.

$$40\,000 = 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$r = 6\,366{,}197... \text{ km}$$

Piirretään mallikuva.

- Merkitään kirjaimella O maan keskipiste.
- Merkitään pisteellä E Helsingin Pasilassa sijaitseva linkkitornin huippu.
- Merkitän pisteellä F paikka Tallinnasta, josta näkee linkkitornin huipun.



Linkkitorni on maassa pisteessä A ja paikka Tallinnassa on maassa pisteessä B. Jotta paikasta F nähdään paikka E, janan *EF* sivuaa ympyrää, eli se on ympyrän tangentti. Keskuskulma α voidaan laskea, kun tunnetaan kaaren *AB* pituus (85 km). Jana AE on 146 m ja jana BF pitää ratkaista.

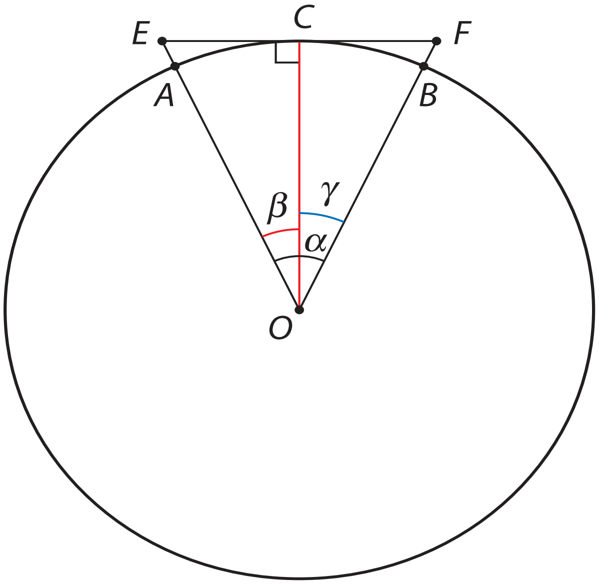
Ratkaistaan kulma α.

$$85 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6366,197...$$
$$\alpha = 0,765°$$

Jana OE on

$$|OE| = 6\,366,197...\text{ km} + 0,146\text{ km} = 6366,343...\text{ km}$$

Piirretään kolmiolle OEF korkeusjana. Merkitään suorakulmaisen kolmion OCE toista terävää kulmaa kirjaimella β. Kulman β viereinen kateetti on OC ja hypotenuusa OE.



Lasketaan kulma β kosinin avulla.

$$\cos\beta = \frac{6366,197...}{6366,343...}$$
$$\beta = 0,388...°$$

Kulman γ suuruus on

$$\gamma = \alpha - \beta = 0{,}765° - 0{,}388...° = 0{,}376...°$$

Lasketaan janan *OF* pituus kosinin avulla.

$$\cos 0{,}376...° = \frac{6366{,}197...}{|OF|}$$

$$|OF| = 6366{,}335... \text{ km}$$

Jana *OF* on säteen verran pidempi kuin jana *BF*, joten

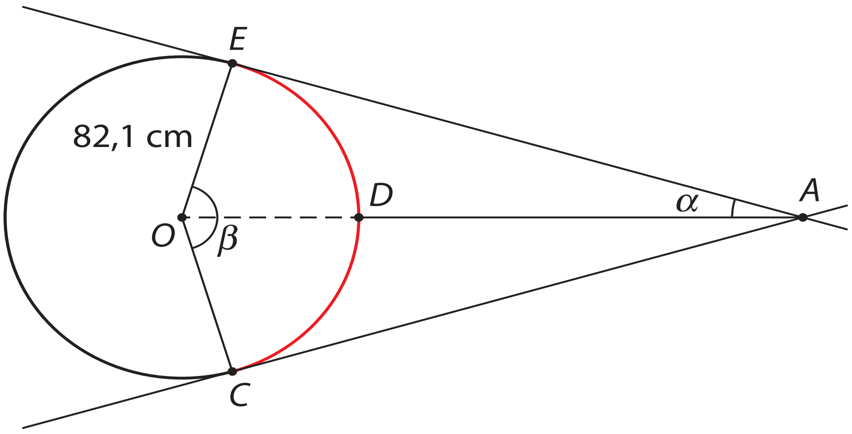
$$\begin{aligned} |BF| &= |OF| - |OB| \\ &= 6366{,}335... \text{ km} - 6366{,}197... \text{ km} \\ &= 0{,}137... \text{ km} \approx 0{,}138 \text{ km} = 138 \text{ m} \end{aligned}$$

Rakennuksen tulee olla vähintään 138 m korkea.

184.

a) Kolmio *BEA* on suorakulmainen, koska jana *EA* on kohtisuorassa janaa *OE* vastaan.

Kolmion kateetteina ovat janat *OE* ja *EA*. Hypotenuusa on jana *OA*.



Tangenttikulma on 33,1°, joten kulma $\alpha = \frac{33{,}1°}{2} = 16{,}55°$.

Lasketaan janan *EA* pituus tangentin avulla.

$$\tan 16{,}55° = \frac{82{,}1}{|EA|}$$

$$|EA| = 276{,}279\ldots \text{ cm}$$

Lasketaan kulman $1/2\beta$ suuruus tangentin avulla.

$$\tan\frac{1}{2}\beta = \frac{276,279...}{82,1}$$

$$\frac{1}{2}\beta = 73,45°$$

$$\beta = 146,9° \approx 147°$$

b) Kaaren *ADC* pituus on

$$b_{ADC} = \frac{146,9°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 82,1 \text{ cm} = 210,495... \text{ cm} \approx 210 \text{ cm}$$

c) Janan *OA* pituus on

$$\sin 16,55° = \frac{82,1}{|OA|}$$

$$|OA| = 288,219... \text{ cm}$$

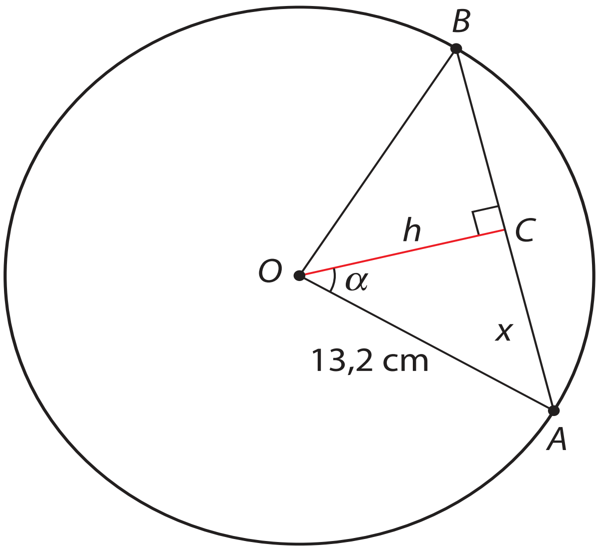
Jana *OA* on säteen verran pidempi kuin *AD*, joten

$$|AD| = |OA| - |OD| = 288,219... \text{ cm} - 82,1 \text{ cm} = 206,119... \text{ cm} \approx 206 \text{ cm}$$

d) Janan *EA* pituus on $|EA| = 276,279... \text{ cm} \approx 276 \text{ cm}$.

185.

a) Segmentin pinta-ala saadaan sektorin pinta-alaan lisäämällä kolmion *AOB* pinta-ala.



Jänne *AB* on tasakylkisen kolmion *AOB* kanta. Merkitään jänteen pituudeksi $2x$.

Kolmiolla *AOB* on korkeusjana *OC*. Kolmion huippukulma on 88,0°.

Koska kolmio *AOB* on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan: $|CB| = \frac{2x}{2} = x$
- korkeusjana puolittaa huippukulman 88,0°: $\alpha = \frac{88,0°}{2} = 44,0°$.

Ratkaistaan sivun pituus x sinin avulla.

$$\sin 44{,}0^\circ = \frac{x}{13{,}2}$$
$$x = 9{,}169\ldots\ \text{cm}$$

Jänteen AB pituus on:

$$2 \cdot 9{,}169\ldots\ \text{cm} = 18{,}338\ldots\ \text{cm} \approx 18{,}3\ \text{cm}$$

b) Ratkaistaan kolmion korkeusjanan *h* pituus kosinin avulla.

$$\cos 44,0° = \frac{h}{13,2}$$

$$h = 9,495... \text{ cm}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{AOB} = \frac{18,338... \text{ cm} \cdot 9,495... \text{ cm}}{2} = 87,062... \text{ cm}^2$$

Sektorin keskuskulma on 360° − 88,0° = 272°. Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{272°}{360°} \cdot \pi \cdot (13,2 \text{ cm})^2 = 413,584... \text{ cm}^2$$

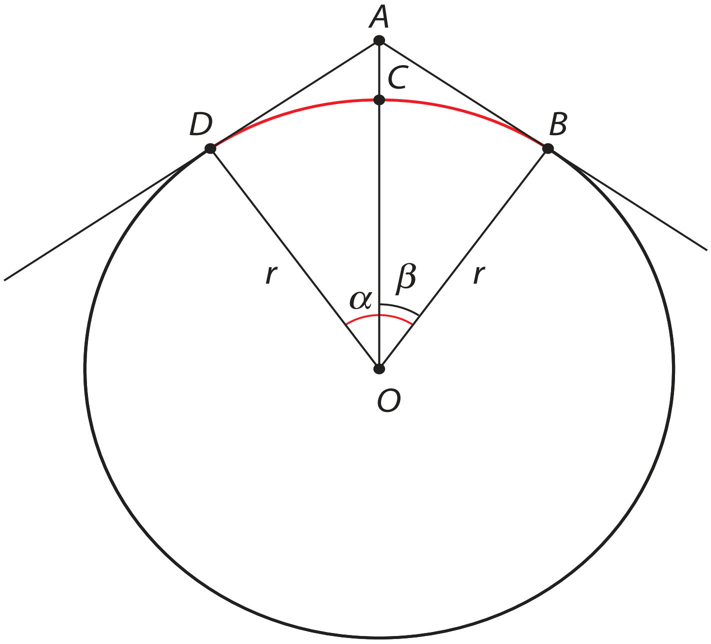
Lasketaan väritetyn alueen pinta-ala.

$$A = A_{AOB} + A_{\text{sektori}} = 87,062... \text{ cm}^2 + 413,584... \text{ cm}^2 = 500,646... \text{ cm}^2 \approx 501 \text{ cm}^2$$

186.

Piirretään mallikuva.

- Merkitään pisteellä *A* kuumailmapallon paikkaa
- Merkitään pisteillä *D* ja *B* Laatokan päätepisteitä.
- Merkitään kirjaimella *O* Maan keskipistettä.



Laatokan pituus on 219 km, joten kaaren *DB* pituus on 219 km. Lasketaan kaaren *DB* keskuskulman α suuruus kaaren pituuden avulla.

$$219 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6\,378$$
$$\alpha = 1{,}967...°$$

Kulma β on puolet kulmasta α, joten

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1{,}967...°}{2} = 0{,}983...°$$

Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta *OBA* janan *OA* pituus kosinin avulla.

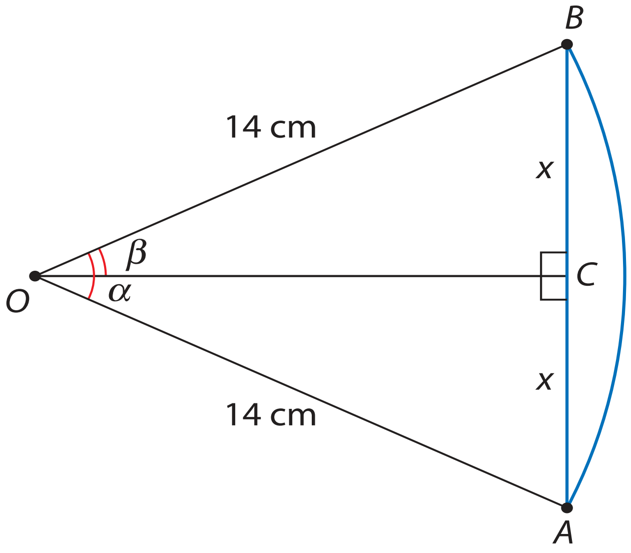
$$\cos 0{,}983...^\circ = \frac{6\,378}{|OA|}$$

$$|OA| = 6\,378{,}940...\text{ km}$$

Lasketaan, kuinka korkealla kuumailmapallo on maanpinnasta.

$$\begin{aligned}|CA| &= |OA| - |OC| \\ &= 6378{,}940...\text{ km} - 6378\text{ km} = 0{,}940...\text{ km} \approx 0{,}940\text{ km} = 940\text{ m}\end{aligned}.$$

187.



Lasketaan keskuskulman α arvo kehän AB avulla.

$$12,5 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 14$$
$$\alpha = 51,156...^\circ$$

Jänne AB on tasakylkisen kolmion AOB kanta. Merkitään jänteen pituudeksi $2x$.

Kolmiolla AOB on korkeusjana OC.

Koska kolmio AOB on tasakylkinen kolmio, niin

- korkeusjana puolittaa kolmion kannan: $|CA| = \frac{2x}{2} = x$
- korkeusjana puolittaa huippukulman α: $\beta = \frac{51,156^\circ}{2} = 25,578...^\circ$.

Ratkaistaan sivun pituus x sinin avulla.

$$\sin 25{,}578^\circ = \frac{x}{14}$$

$$x = 6{,}044...\text{ cm}$$

Ratkaistu x on puolet jänteen pituudesta. Jänteen AB pituus on siis

$$2 \cdot 6{,}044...\text{ cm} = 12{,}088...\text{ cm}$$

Ratkaistaan sivun pituus h kosinin avulla.

$$\cos 25{,}578^\circ = \frac{h}{14}$$

$$h = 12{,}627...\text{ cm}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{AOB} = \frac{12{,}088...\text{ cm} \cdot 12{,}627...\text{ cm}}{2} = 76{,}323...\text{ cm}^2$$

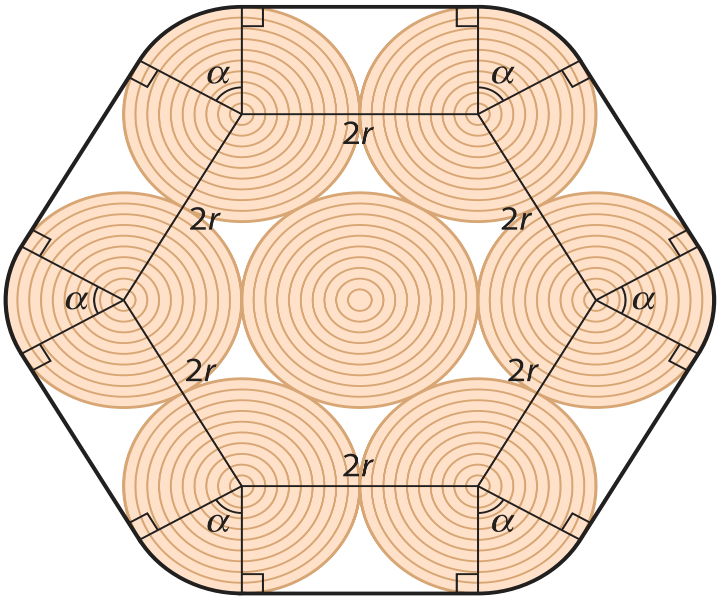
Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{51{,}156...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (14\text{ cm})^2 = 87{,}5\text{ cm}^2$$

Segmentin pinta-ala on

$$A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{AOB} = 87{,}5\text{ cm}^2 - 76{,}323...\text{ cm}^2 = 11{,}177...\text{ cm}^2 \approx 11\text{ cm}^2$$

188.



Tukin halkaisija $2r = 20$ cm, joten sen säde $r = 10$ cm.

Vaijerin kunkin suoran osan pituus = $2r$

Kaarevat osat ovat ympyrän kaaria, joiden keskuskulmat ovat

Lasketaan kaarevan osuuden pituus.

$$p = 6 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm} = 62{,}831... \text{ cm}$$

Koko vaijerin pituus on

$$6 \cdot 2r + p = 6 \cdot 2 \cdot 10 \text{ cm} + 62{,}831... \text{ cm} = 182{,}831... \text{ cm} \approx 183 \text{ cm}$$

2.4 Avaruusgeometriaa

189.

a) Lasketaan korkeusjana Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2+4,5^2=12^2$$
$$h=\pm 11,124...\,\text{cm}\approx \pm 11\,\text{cm}$$

Korkeus on aina positiivista, joten x = 11 cm.

b) Lasketaan korkeusjana Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2+7,5^2=16,0^2$$
$$h=\pm 14,133...\,\text{cm}\approx \pm 14,1\,\text{cm}$$

Korkeus on aina positiivista, joten x = 14,1 cm.

190.

a) Sivun s pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.

$$7{,}5^2 + 2{,}3^2 = s^2$$

$$s = \pm 7{,}844...\ \text{dm} \approx \pm 7{,}8\ \text{dm}$$

Sivun pituus on aina positiivinen, joten s = 7,8 dm.

b) Lasketaan sivun s pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$4{,}6^2 + 2{,}43^2 = s^2$$

$$s = \pm 5{,}202...\ \text{dm} \approx \pm 5{,}2\ \text{dm}$$

Sivun pituus on aina positiivinen, joten s = 5,2 dm.

191.

a) Lasketaan kulman α suuruus sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{1,2}{1,5}$$

$$\alpha = 53,130...^\circ \approx 53^\circ$$

b) Lasketaan kulman α suuruus kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{1,1}{2,3}$$

$$\alpha = 61,428...^\circ \approx 61^\circ$$

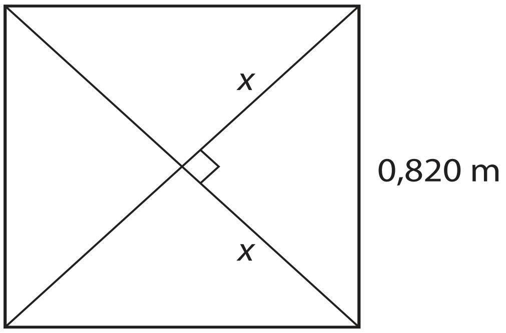
192.

a) Suorakulmaisen kolmion kanta on puolet pyramidin pohjan sivusta, eli 3,4 dm : 2 = 1,7 dm. Lasketaan sivun *s* pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$1,7^2 + 4,5^2 = s^2$$
$$s = \pm 4,810\ldots \text{ dm} \approx \pm 4,8 \text{ dm}$$

Sivun pituus on aina positiivinen, joten *s* = 4,8 dm.

b) Merkataan suorakulmaisen kolmion pohjasivua kirjaimella *x*. Piirretään Pyramidin pohjasta mallikuva.



Sivun *x* pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + x^2 = 0,820^2$$
$$x = \pm 0,579\ldots \text{ m}$$

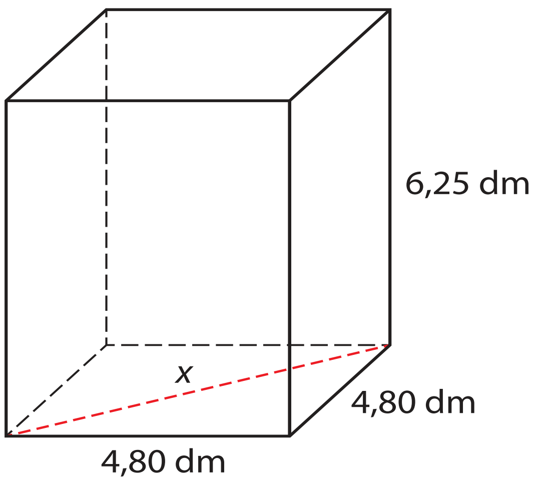
Sivun pituus on aina positiivinen, joten *x* = 0,579… m.

Lasketaan sivun *s* pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$1,4^2 + 0,579\ldots^2 = s^2$$
$$s = \pm 1,515\ldots \text{ m} \approx 1,52 \text{ m}$$

193.

a) Merkitään pohjasuorakulmion lävistäjä kirjaimella x.

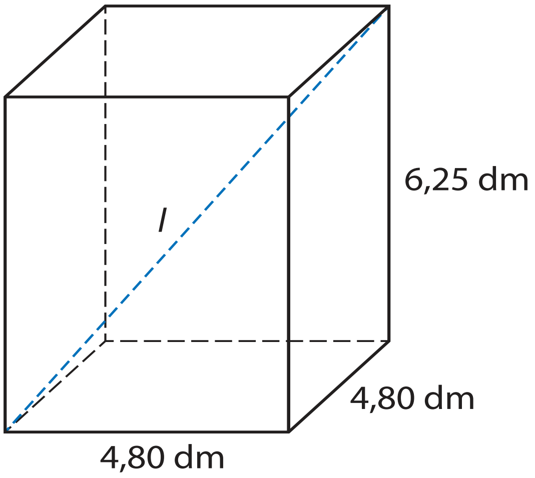


Ratkaistaan x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 4,80^2 + 4,80^2$$
$$x = \pm 6,788\ldots \text{ dm} \approx \pm 6,79 \text{ dm}$$

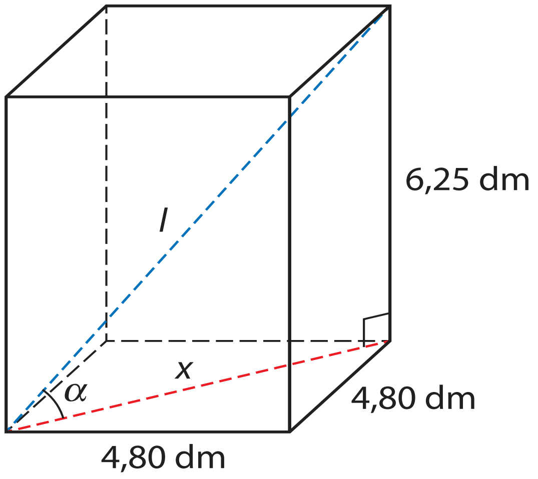
Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 6,79$ dm.

b) Merkitään särmiön avaruuslävistäjän pituutta kirjaimella *l*.


6,25 dm
l
4,80 dm
4,80 dm

$$
\begin{aligned}
l &= \sqrt{4,80^2 + 4,80^2 + 6,25^2} \\
&= 9,227\ldots \text{ dm} \\
&\approx 9,23 \text{ dm}
\end{aligned}
$$

c) Merkitään pohjan lävistäjän ja avaruuslävistäjän kulmaa kirjaimella α. Ratkaistaan se tangentin avulla.

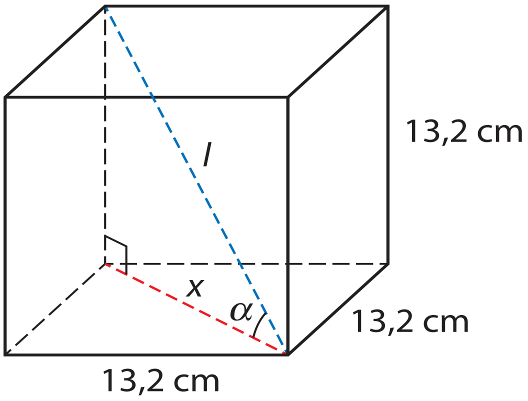

6,25 dm
l
x
α
4,80 dm
4,80 dm

$$\tan\alpha = \frac{6,25}{6,788...}$$

$$\alpha = 42,636...° \approx 42,6°$$

194.

Merkitään pohjalävistäjää kirjaimella x, avaruuslävistäjää kirjaimella l ja niiden välistä kulmaa kirjaimella α.



Lasketaan pohjalävistäjän pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 13,2^2 + 13,2^2$$
$$x = \pm 18,667\ldots \text{ cm}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 18,667\ldots$ cm.

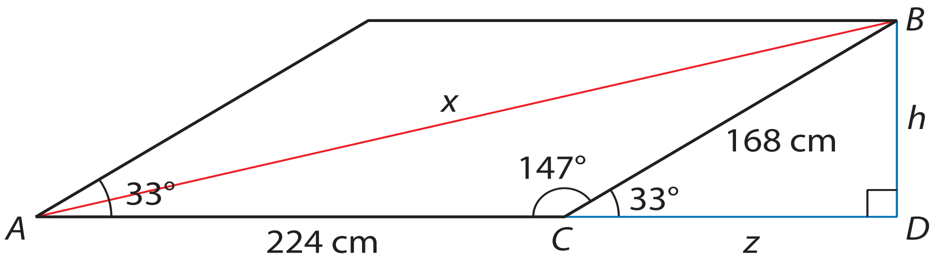
Lasketaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{13,2}{18,667\ldots}$$
$$\alpha = 35,264\ldots° \approx 35,3°$$

195.

Piirretään särmiön pohja ja ratkaistaan siitä pohjalävistäjä. Merkitään sitä kirjaimella x.

Sivujen terävä kulma on 33°, joten sivujen tylppä kulma on
$180° - 33° = 147°$.



Lasketaan kolmiosta CDB sivun h pituus sinin avulla.

$$\sin 33° = \frac{h}{168}$$
$$h = 91,499...\text{ cm}$$

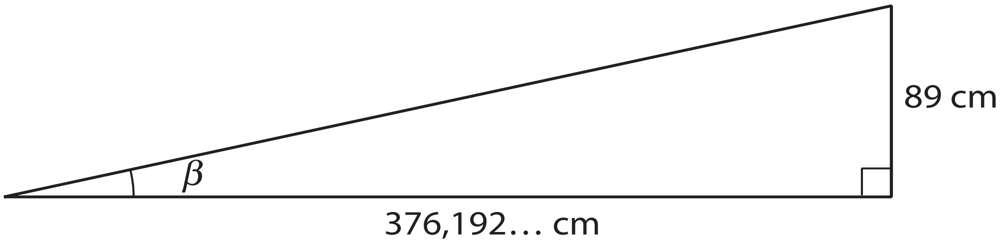
Lasketaan kolmiosta CDB sivun z pituus kosinin avulla.

$$\cos 33° = \frac{z}{168}$$
$$z = 140,896...\text{ cm}$$

Lasketaan kolmiosta ADB sivun x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 91,499...^2 + (224 + 140,896...)^2$$
$$x = \pm 376,192...\text{ cm}$$

Lävistäjän pituus on aina positiivinen luku, joten $x = 376{,}193\ldots$ cm.

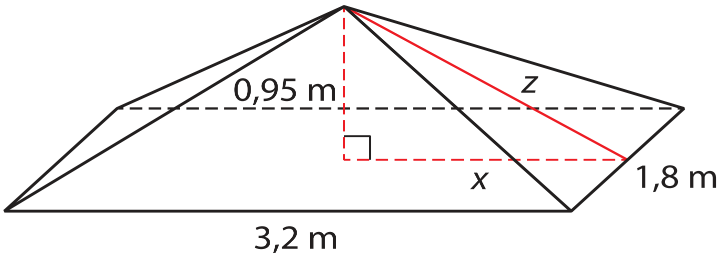


Nyt voidaan laskea kulman β suuruus tangentin avulla.

$$\tan\beta = \frac{89}{376{,}192...}$$

$$\beta = 13{,}310...^\circ \approx 13{,}3^\circ$$

196.

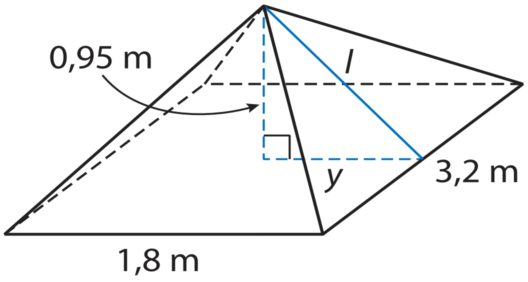


Sivun *x* pituus on puolet sivun 3,2 m pituudesta, eli $\frac{3,2\text{ m}}{2}=1,6\text{ m}$.

Lasketaan sivun *z* pituus Pythagoraan lauseella.

$$z^2=1,6^2+0,95^2$$
$$z=\pm 1,860...\text{ m}$$

Sivun pituus on aina positiivista, joten $z = 1,860…$ m.



Sivun *y* pituus on puolet sivun 1,8 m pituudesta, eli $\frac{1,8\text{ m}}{2}=0,9\text{ m}$.

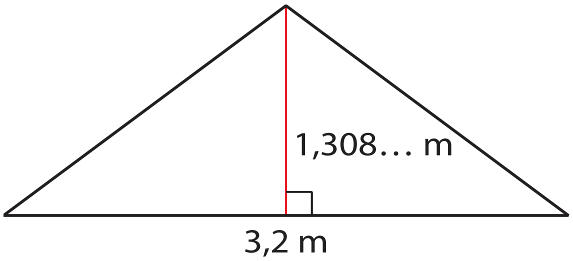
Lasketaan sivun l pituus Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} l^2 &= 0{,}9^2 + 0{,}95^2 \\ l &= \pm 1{,}308\ldots \text{ m} \end{aligned}$$

Sivun pituus on aina positiivista, joten $l = 1{,}308\ldots$ m.

Myyntikojun katto rakentuu neljästä kolmiosta. Lasketaan kolmioiden pinta-alat.

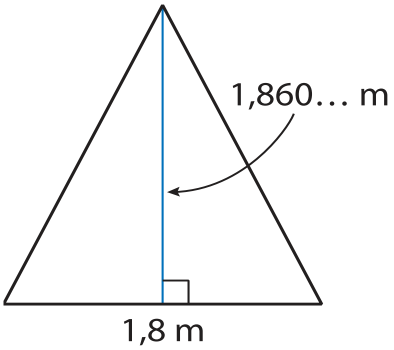
Kaksi katon kolmioista ovat



Näiden pinta-ala on

$$A_1 = 2 \cdot \frac{1{,}308\ldots \text{ m} \cdot 3{,}2 \text{ m}}{2} = 4{,}187\ldots \text{ m}^2$$

Kaksi katon kolmioista ovat



Näiden pinta-ala on

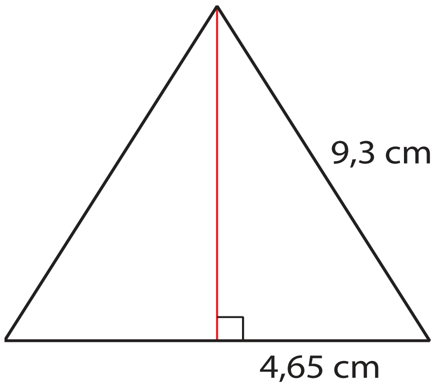
$$A_2 = 2 \cdot \frac{1,8\ \text{m} \cdot 1,860...\ \text{m}}{2} = 3,349...\ \text{m}^2$$

Katon pinta-ala on

$$A_2 + A_1 = 4,187...\ \text{m}^2 + 3,349...\ \text{m}^2 = 7,536...\ \text{m}^2 \approx 7,5\ \text{m}^2$$

197.

Tetraedrissä on neljä samanlaista tahkoa. Tahkot ovat tasasivuisia kolmioita.



Suorakulmaisen kannan pituus on puolet tasasivuisen kolmion kannasta, eli $\frac{9,3\text{ cm}}{2} = 4,65\text{ cm}$.

Lasketaan sivun *h* pituus Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 4,65^2 = 9,3^2$$
$$h = \pm 8,054...\text{ cm}$$

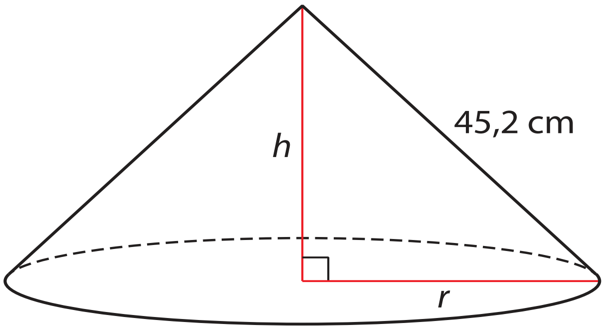
Sivun pituus on aina positiivinen luku, joten $h = 8,054\ldots$ cm.

Tetraedrin pinta-ala on

$$A = 4 \cdot \frac{9,3\text{ cm} \cdot 8,054...\text{ cm}}{2} = 149,805...\text{ cm}^2 \approx 150\text{ cm}^2$$

198.

a) Piirretään mallikuva. Kartion sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio.



- Kolmion korkeus on sama kuin kartion korkeus *h*.
- Kolmion toisen kateetin pituus on sama kuin kartion pohjaympyrän säde *r*.
- Kolmion hypotenuusa on sama kuin kartion sivujana eli 45,2 cm.

Lasketaan ensin säteen *r* pituus, kun tiedetään, että kartion vaipan ala on 45,3 dm^2 = 4 530 cm^2.

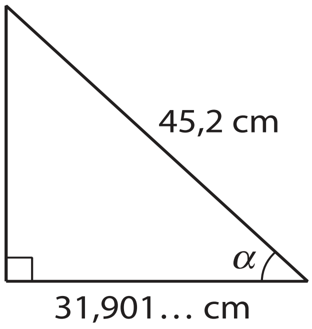
$$\begin{aligned} 4\,530\ \text{cm}^2 &= \pi \cdot r \cdot 45{,}2\ \text{cm} \\ r &= 31{,}901...\ \text{cm} \end{aligned}$$

Lasketaan Pythagoraan lauseella sivun *h* pituus.

$$\begin{aligned} h^2 + 31{,}901...^2 &= 45{,}2^2 \\ h &= \pm 32{,}020...\ \text{cm} \approx \pm 32{,}0\ \text{cm} = \pm 3{,}20\ \text{dm} \end{aligned}$$

Sivun pituus on aina positiivinen, joten *h* = 3,20 dm.

b) Merkitään pohjan säteen ja sivujanan väliin muodostuvaa kulmaa kirjaimella α. Ratkaistaan kulma kosinin avulla.

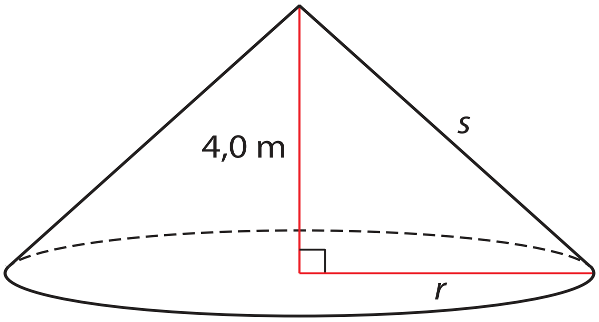


$$\cos\alpha = \frac{31,901...}{45,2}$$

$$\alpha = 45,107...° \approx 45,1°$$

199.

Piirretään mallikuva. Kartion sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio.



- Kolmion korkeus on sama kuin kartion korkeus 4,0 m.
- Kolmion toisen kateetin pituus on sama kuin kartion pohjaympyrän säde *r*.
- Kolmion hypotenuusa on sama kuin kartion sivujana *s*.

Lasketaan ensin säteen *r* pituus, kun tiedetään, että kartion tilavuus on 26 m^3.

$$26 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 4,0}{3}$$
$$r = \pm 2,491\ldots \text{ m}$$

Sivun pituus on aina positiivinen luku, joten $r = 2,491\ldots$ m.

Lasketaan sivun s pituus Pythagoraan lauseella.

$$s^2 = 4,0^2 + 2,491...^2$$
$$s = \pm 4,712... \text{ m}$$

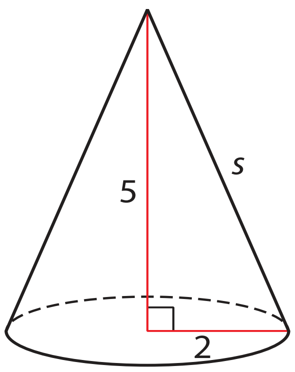
Sivun pituus on aina positiivinen luku, joten $s = 4{,}712\ldots$ m.

Lasketaan vaipan ala.

$$A = \pi \cdot 4,712... \text{ m} \cdot 2,491... \text{ m} = 36,878... \text{ m}^2 \approx 37 \text{ m}^2$$

200.

Piirretään mallikuva.



- Kolmion korkeus on sama kuin kartion korkeus 5.
- Kolmion toisen kateetin pituus on sama kuin kartion pohjaympyrän säde 2.
- Kolmion hypotenuusa on sama kuin kartion sivujana *s*.

Lasketaan sivun *s* pituus Pythagoraan lauseella.

$$s^2 = 2^2 + 5^2$$
$$s = \pm 5,385...$$

Lasketaan vaipan ala.

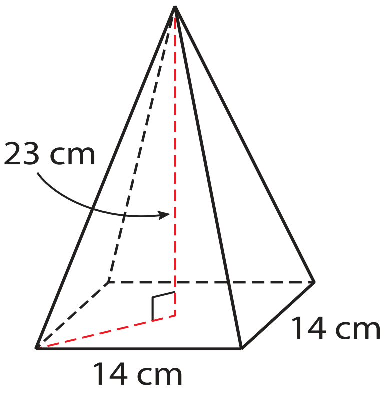
$$A_{\text{vaippa}} = \pi \cdot 2 \cdot 5,385... = 33,835... \approx 33,8$$

Lasketaan tilavuus.

$$V = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 5}{3} = 20,943... \approx 20,9$$

201.

a) Piirretään mallikuva.



Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$V = \frac{14\text{ cm} \cdot 14\text{ cm} \cdot 23\text{ cm}}{3} = 1\,502,666...\text{ cm}^3 = 1,502...\text{ dm}^3$$

Tiheys lasketaan painon ja tilavuuden suhteella

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

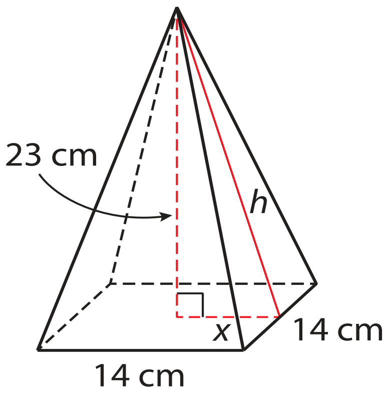
Paino lasketaan tiheyden ja tilavuuden tulona

$$m = \rho \cdot V.$$

Lasketaan pyramidin paino.

$$m = 2,70\text{ kg / dm}^3 \cdot 1,502\text{ dm}^3 = 4,0572\text{ kg} \approx 4,1\text{ kg}$$

b) Pyramidin vaippa koostuu neljästä samanlaisesta kolmiosta.

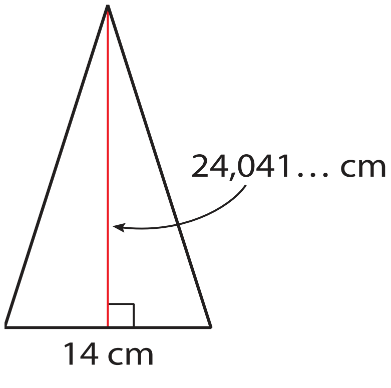


Sivun x pituus on puolet pyramidin pohjan sivusta, eli $x = \dfrac{14\text{ cm}}{2} = 7\text{ cm}$.

Lasketaan sivun h pituus Pythagoraan lauseella.

$$h^2 = 23^2 + 7^2$$
$$h = \pm 24{,}041...\text{ cm}$$

Sivun pituus on aina positiivinen luku, joten $h = 24{,}041\ldots$ cm.



Pyramidin vaipan sivut ovat kuvan mukaisia. Lasketaan vaipan pinta-ala.

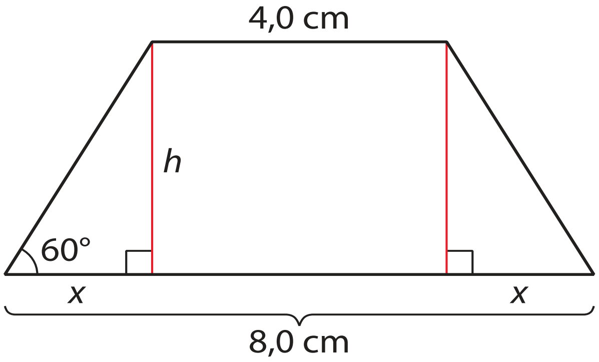
$$A = 4 \cdot \frac{14\text{ cm} \cdot 24,041\ldots\text{ cm}}{2} = 673,165\ldots\text{ cm}^2 = 0,0673\ldots\text{ m}^2$$

Lasketaan, kuinka paljon alumiinia tarvitaan.

$$m = 0,0673\ldots\text{ m}^2 \cdot 0,50\text{ kg/m}^2 = 0,0336\ldots\text{ kg} \approx 0,034\text{ kg} = 34\text{ g}$$

202.

Piirretään poikkileikkauksen mallikuva.



Sivun x pituus on

$$x + 4,0 + x = 8,0$$
$$x = 2,0 \text{ cm}$$

Lasketaan sivun h pituus tangentin avulla.

$$\tan 60° = \frac{h}{2,0}$$
$$h = 3,464... \text{ cm}$$

Lasketaan kolmen Toblerone-suklaapatukan tilavuus.

$$V = \left(\frac{8,0 \text{ cm} + 4,0 \text{ cm}}{2} \cdot 3,464... \text{ cm}\right) \cdot 28,0 \text{ cm} = 581,969... \text{ cm}^3 = 0,581... \text{ dm}^3$$

Tiheys lasketaan painon ja tilavuuden suhteella

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Paino lasketaan tiheyden ja tilavuuden tulona

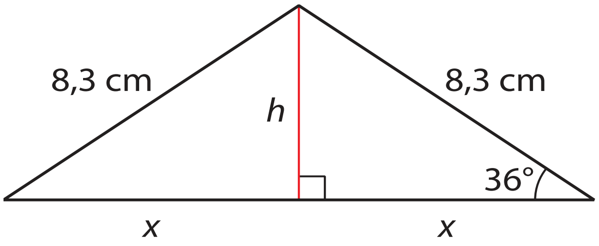
$$m = \rho \cdot V.$$

Lasketaan pakkauksen suklaapatukoiden paino.

$$m = 1{,}33\ \mathrm{kg/dm^3} \cdot 0{,}581...\ \mathrm{dm^3} = 0{,}774...\ \mathrm{kg} \approx 0{,}77\ \mathrm{kg} = 770\ \mathrm{g}.$$

203.

Mallikuva prisman pohjasta.



Lasketaan pohjan sivu *h* sinin avulla.

$$\sin 36° = \frac{h}{8,3}$$
$$h = 4,878...\text{ cm}$$

Lasketaan sivun *x* pituus kosinin avulla.

$$\cos 36° = \frac{x}{8,3}$$
$$x = 6,714...\text{ cm}$$

Lasketaan pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohja}} = \frac{4,878...\text{ cm} \cdot 6,714...\text{ cm}}{2} = 32,754...\text{ cm}^2$$

Lasketaan prisman tilavuus.

$$V = 32,754\ldots\ \text{cm}^2 \cdot 18,4\ \text{cm} = 602,691\ldots\ \text{cm}^3$$

Tiheys lasketaan painon ja tilavuuden suhteella

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Paino lasketaan tiheyden ja tilavuuden tulona

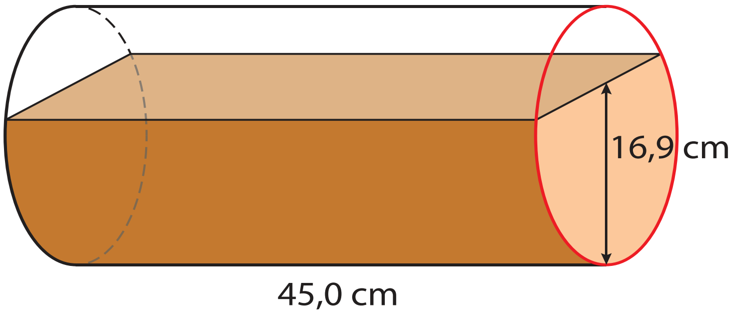
$$m = \rho \cdot V.$$

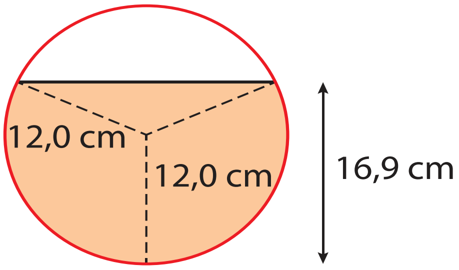
Lasketaan prisman paino.

$$m = 2,50\ \text{g/cm}^3 \cdot 602,691\ldots\ \text{cm}^3 = 1506,729\ldots\ \text{g} \approx 1500\ \text{g}.$$

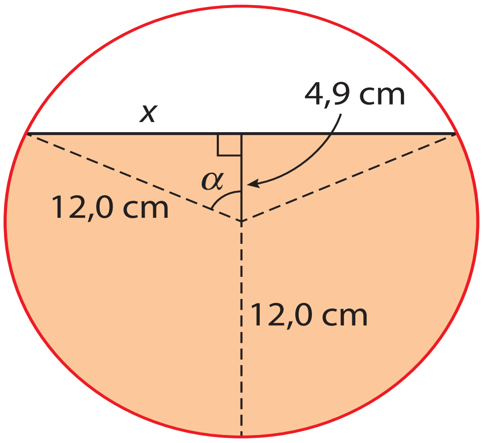
204.

Hahmotellaan mallikuva. Kyljellään olevan kanisterin juoma muodostaa lieriön, jonka pohjana on ympyrän segmentti. Kanisterin pohjan halkaisija on 24,0 cm, joten sen säde on 12,0 cm.


16,9 cm
45,0 cm


12,0 cm
12,0 cm
16,9 cm

Segmentin pinta-ala on sektorin ja tasakylkisen kolmion pinta-alojen summa.


x
4,9 cm
α
12,0 cm
12,0 cm

Koska nestepinnan korkeus on 16,9 cm, kolmion korkeus on
16,9 cm – 12,0 cm = 4,9 cm.

Merkitään muodostuneen suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituutta kirjaimella x. Ratkaistaan se Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 4,9^2 = 12,0^2$$
$$x = \pm 10,953\ldots \text{ cm}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 10,953\ldots$ cm

Tasakylkisen kolmion kanta on siis

$$2x = 2 \cdot 10,953\ldots \text{ cm} = 21,907\ldots \text{ cm}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{21,907\ldots \text{ cm} \cdot 4,9 \text{ cm}}{2} = 53,674\ldots \text{ cm}^2$$

Lasketaan sektorin pinta-ala. Merkitään tasakylkisen kolmion huippukulman puolikasta kirjaimella α. Ratkaistaan α kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{4,9}{12,0}$$
$$\alpha = 65,899\ldots^\circ$$

Tasakylkisen kolmion huippukulma on

$$2\alpha = 2 \cdot 65,899\ldots^\circ = 131,799\ldots^\circ$$

Sektorin keskuskulma

$$\beta = 360° - 131,799...° = 228,200...°$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{sektori}} &= \frac{228,200...°}{360°} \cdot \pi \cdot (12,0\text{ cm})^2 \\ &= 286,765...\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

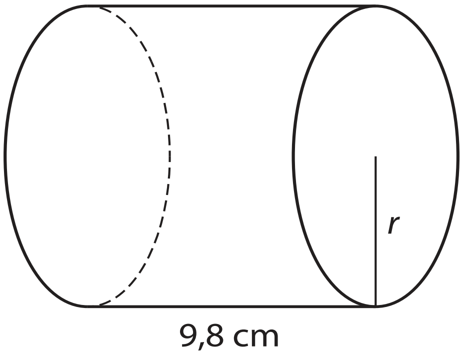
$$A_{\text{kolmio}} + A_{\text{sektori}} = 53,674...\text{ cm}^2 + 286,765...\text{ cm}^2 = 340,439...\text{ cm}^2$$

Juoman tilavuus V saadaan lieriön tilavuutena.

$$\begin{aligned} V &= 340,439...\text{ cm}^2 \cdot 45,0\text{ cm} \\ &= 15\,319,756...\text{ cm}^3 \approx 15\,300\text{ cm}^3 = 15,3\text{ dm}^3 = 15,3\text{ l} \end{aligned}$$

205.

Piirretään mallikuva juustosta.

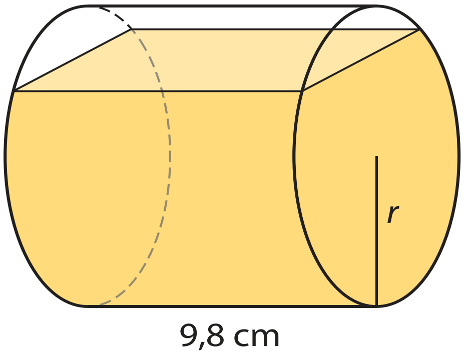


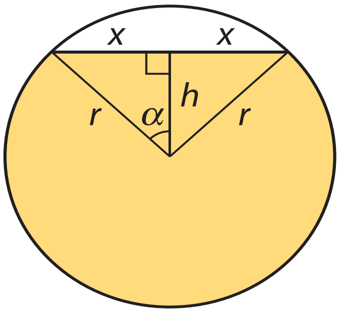
Juuston pohjan säde r on puolet sen halkaisijasta eli $r = \frac{11,2 \text{ cm}}{2} = 5,6 \text{ cm}$.

Juuston tilavuus on

$$V_1 = \pi \cdot (5,6 \text{ cm})^2 \cdot 9,8 \text{ cm} = 965,499... \text{ cm}^3$$

Hahmotellaan mallikuva juustosta, josta on leikattu segmentin muotoinen osa pois.





Tasasivuisen kolmion sivu $2x$ on pituudeltaan 4,2 cm, joten $x = 2,1$ cm.

Merkitään muodostuneen suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituutta kirjaimella h. Ratkaistaan se Pythagoraan lauseella.

$$2,1^2 + h^2 = 5,6^2$$
$$h = \pm 5,191\ldots\ \text{cm}$$

Koska $h > 0$, niin $h = 5,191\ldots$ cm.

Lasketaan tasasivuisen kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{5,191\ldots\ \text{cm} \cdot 4,2\ \text{cm}}{2} = 10,901\ldots\ \text{cm}^2$$

Lasketaan sektorin pinta-ala. Merkitään tasakylkisen kolmion huippukulman puolikasta kirjaimella α. Ratkaistaan α sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{2,1}{5,6}$$
$$\alpha = 22,024\ldots^\circ$$

Tasakylkisen kolmion huippukulma on

$$2\alpha = 2 \cdot 22,024\ldots^\circ = 44,048\ldots^\circ$$

Sektorin keskuskulma

$$\beta = 360^\circ - 44,048\ldots^\circ = 315,951\ldots^\circ$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{sektori}} &= \frac{315,951...°}{360°} \cdot \pi \cdot (5,6 \text{ cm})^2 \\ &= 86,465... \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} + A_{\text{sektori}} = 10,901... \text{ cm}^2 + 86,465.. \text{ cm}^2 = 97,366... \text{ cm}^2$$

Leikatun juuston tilavuus saadaan lieriön tilavuutena.

$$V_2 = V_1 - V = 965,499... \text{ cm}^3 - (97,366... \text{ cm}^2 \cdot 9,8 \text{ cm}) = 11,305... \text{ cm}^3$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia juustoa leikattiin pois.

$$1 - \frac{V_1 - V_2}{V_1} = 1 - \frac{965,499... \text{ cm}^3 - 11,305 \text{ cm}^3}{965,499... \text{ cm}^3} = 0,0117... \approx 0,012 = 1,2 \text{ \%}$$

206.

a) Janan x pituus on

$$x = \sqrt{74^2 + 45^2 + 68^2} = 110{,}113...\text{ cm} \approx 110\text{ cm}$$

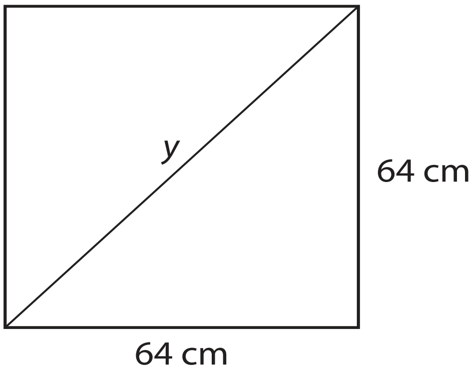
Lasketaan kulman α suuruus sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{68}{110{,}113}$$
$$\alpha = 38{,}137...^\circ \approx 38^\circ$$

Kulman β suuruus on

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 38{,}137...^\circ = 51{,}862...^\circ \approx 52^\circ\,.$$

b) Piirretään mallikuva pyramidin pohjasta, ja merkitään pohjan lävistäjän pituutta kirjaimella *y*.



Lasketaan pohjan lävistäjän pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$64^2 + 64^2 = y^2$$
$$y = \pm 90,509... \text{ cm}$$

Koska $y > 0$, niin $y = 90,509\ldots$ cm.

Punaisen suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on puolet pohjan lävistäjän pituudesta eli $\frac{90,509... \text{ cm}}{2} = 45,254... \text{ cm}$

Lasketaan punaisen kolmion hypotenuusan *x* pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 45,254...^2 + 130^2$$
$$x = \pm 137,651... \text{ cm} \approx \pm 140 \text{ cm} = \pm 1,4 \text{ m}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 1,4$ m.

Lasketaan kulman α suuruus sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{130}{137{,}651...}$$
$$\alpha = 70{,}806...° \approx 71°$$

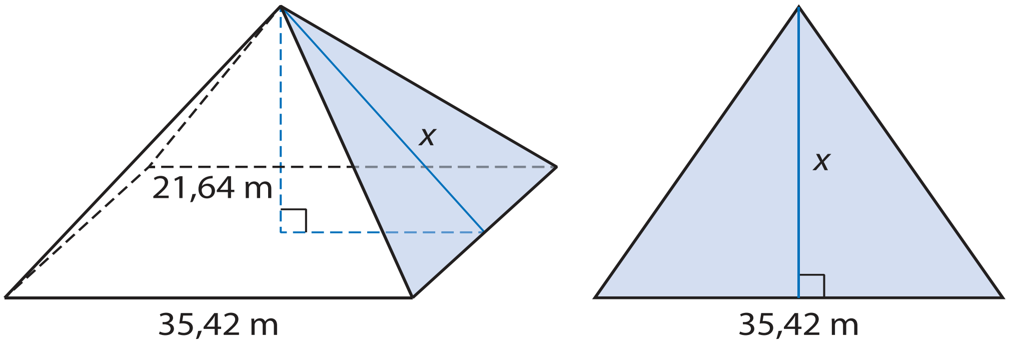
Sinisen kolmion toinen kateetti on pituudeltaan puolet pohjan sivun pituudesta eli $\frac{64\text{ cm}}{2} = 32\text{ cm}$.

Lasketaan kulman β suuruus tangentin avulla.

$$\tan\beta = \frac{130}{32}$$
$$\beta = 76{,}171...° \approx 76°$$

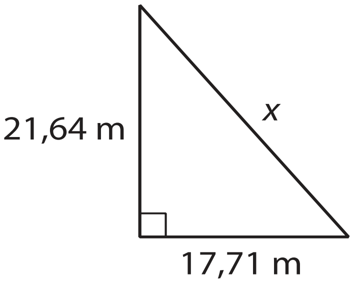
207.

Piirretään mallikuva pyramidista.



a) Vaippa koostuu neljästä tasasivuisesta kolmiosta, jonka kanta on 35,42 m ja korkeutta merkitään kirjaimella *x*.

Pyramidin sisälle muodostui suorakulmainen kolmio. Suorakulmaisen kolmion kanta on puolet pohjasärmän pituudesta.



Ratkaistaan sivun *x* pituus Pythagoraan lauseella.

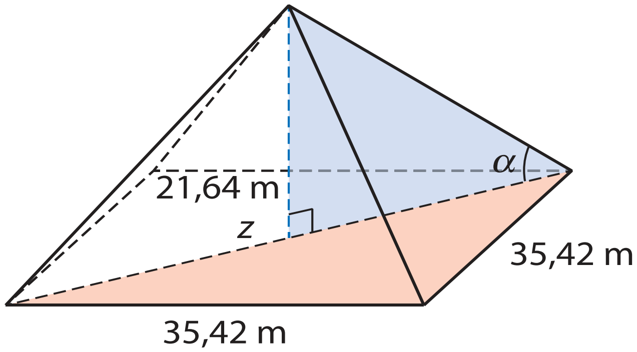
$$x^2 = 21,64^2 + 17,71^2$$
$$x = \pm 27,824... \text{ m}$$

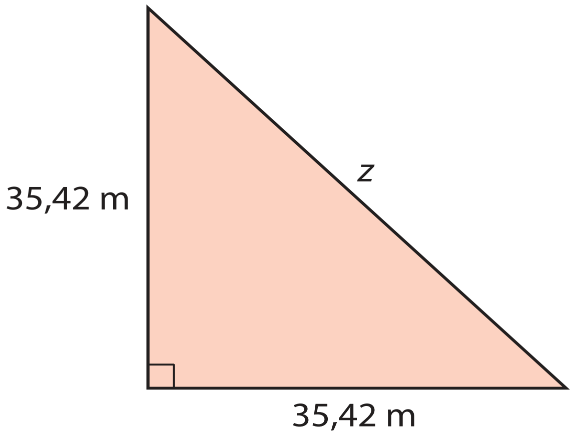
Koska $x > 0$, niin $x = 27,824...$ cm.

Vaipan pinta-ala on

$$A = 4 \cdot \frac{35,42 \text{ m} \cdot 27,824... \text{ m}}{2} = 1980,904... \text{ m}^2 \approx 1981 \text{ m}^2$$

b) Piirretään mallikuva pyramidista.





Lasketaan sivun z pituus Pythagoraan lauseella.

$$z^2 = 35,42^2 + 35,42^2$$
$$z = \pm 50,091... \text{ m}$$

Koska $z > 0$, niin $z = 50,091\ldots$ m.

Sinisen suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on puolet z:n pituudesta, eli $\frac{50,091... \text{ m}}{2} = 25,045... \text{ m}$.

Lasketaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{21,64}{25,045...}$$
$$\alpha = 40,827...° \approx 40,83°$$

c) Lasketaan pohjan pinta-ala.

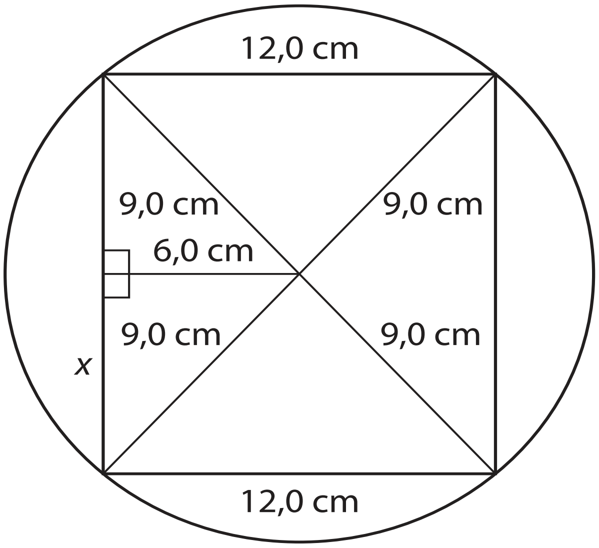
$$A_{\text{pohja}} = 35,42\ \text{m} \cdot 35,42\ \text{m} = 1\,254,5764\ \text{m}^2$$

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1254,5764\ \text{m}^2 \cdot 21,64\ \text{m}}{3} = 9049,677...\ \text{m}^3 \approx 9050\ \text{m}^3$$

208.

Piirretään mallikuva tukin poikkileikkauksesta.



Tukin halkaisija on 18,0 cm, joten sen säde on 9,0 cm.

Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta sivun x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + 6,0^2 = 9,0^2$$
$$x = 6,708... \text{ cm}$$

Palkin korkeus on maksimissaan

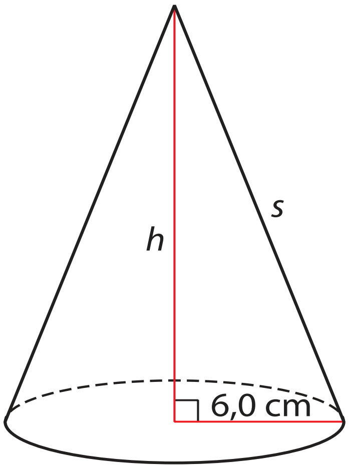
$$2x = 2 \cdot 6,708... \text{ cm} = 13,416... \text{ cm} \approx 13,4 \text{ cm}$$

Tällöin palkin tilavuus on

$$V = 13,416... \text{ cm} \cdot 12,0 \text{ cm} \cdot 250 \text{ cm} = 40\ 249,223... \text{ cm}^3 \approx 40\ 200 \text{ cm}^3 = 40,2 \text{ dm}^3$$

209.

Tötterön suuaukon halkaisija on 12 cm, joten sen säde *r* on 6,0 cm.



Lasketaan sivun *s* pituus vaipan pinta-alan avulla.

$$325 = \pi \cdot 6 \cdot s$$
$$s = 17{,}241\ldots \text{ cm}$$

Lasketaan sivun *h* pituus Pythagoraan lauseella.

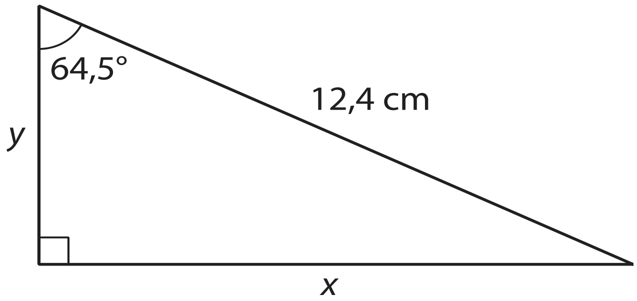
$$h^2 + 6{,}0^2 = 17{,}241\ldots^2$$
$$h = \pm 16{,}164\ldots \text{ cm}$$

Lasketaan tötterön tilavuus.

$$V = \frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3}$$
$$= \frac{\pi \cdot (6{,}0 \text{ cm})^2 \cdot 16{,}164\ldots \text{ cm}}{3}$$
$$= 609{,}373\ldots \text{ cm}^3 \approx 610 \text{ cm}^3 = 0{,}61 \text{ dm}^3 = 0{,}61 \text{ l} = 6{,}1 \text{ dl}$$

210.

Piirretään mallikuva kolmiosta.



Lasketaan sivun *x* pituus sinin avulla.

$$\sin 64,5° = \frac{x}{12,4}$$

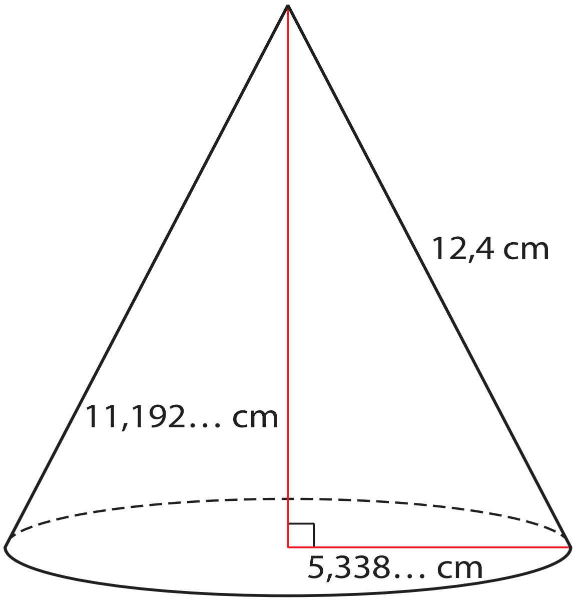
$$x = 11,192... \text{ cm}$$

Lasketaan sivun *y* pituus kosinin avulla.

$$\cos 64,5° = \frac{y}{12,4}$$

$$y = 5,338... \text{ cm}$$

Kolmio pyörähtää pitemmän kateettinsa ympäri.



Kartion vaipan ala on

$$A = \pi \cdot 5,338...\text{ cm} \cdot 12,4\text{ cm} = 207,958...\text{ cm}^2 \approx 208\text{ cm}^2$$

Kartion tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot (5,338...\text{ cm})^2 \cdot 11,192...\text{ cm}}{3} \\ &= 334,001...\text{ cm}^3 \\ &\approx 334\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

2.5 Geometriaa koordinaatistossa

211.

a) Suorakulmion kaikki kulmat ovat 90° ja vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

- Pisteen P tulee sijaita samalla korkeudella, kuin pisteen $(-2, -3)$, joten näiden pisteiden y-koordinaatit ovat samat.
- Pisteen P tulee sijaita suoraan pisteen $(6, 4)$ alapuolella, joten näiden pisteiden x-koordinaatit ovat samat.

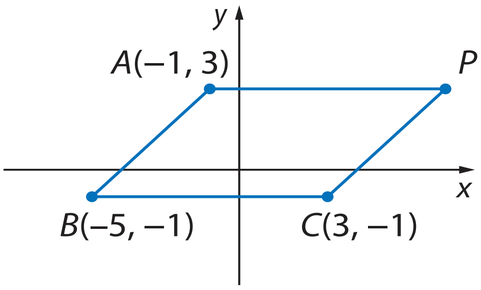
Pisteen D koordinaatit ovat $(-3, 4)$.

b) Suorakulmion kaikki kulmat ovat 90° ja vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

- Pisteen P tulee sijaita samalla korkeudella, kuin pisteen $(4, -7)$, joten näiden pisteiden y-koordinaatit ovat samat.
- Pisteen P tulee sijaita suoraan pisteen $(-3, 5)$ alapuolella, joten näiden pisteiden x-koordinaatit ovat samat.

Pisteen D koordinaatit ovat $(-3, -7)$.

c)



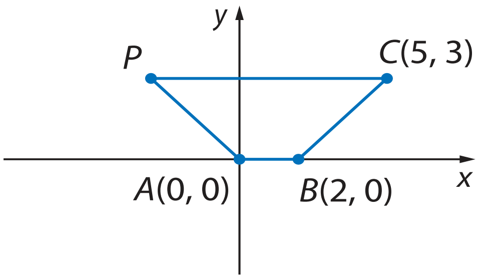
Suunnikkaan sivu AP on yhtä pitkä kuin sivu BC. Koska pisteillä B ja C on samat y-koordinaatit, niin tarvitsee tarkastella pelkästään x-koordinaatteja.

$|BC| = |3-(-5)| = |3+5| = 8$.

- Pisteen P tulee sijaita samalla korkeudella kuin pisteen A, joten näiden pisteiden y-koordinaatit ovat samat.
- Piste P tulee sijaita etäisyydellä 8 pisteestä A, joten lisätään pisteen A x-koordinaattiin 8. $-1 + 8 = 7$.

Pisteen P koordinaatit ovat (7, 3)

d)

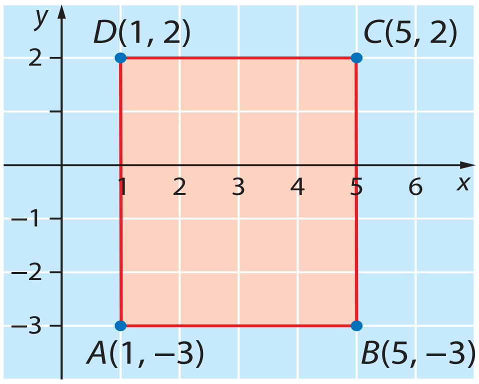


- Pisteen P tulee sijaita samalla korkeudella, kuin pisteen C, joten näiden pisteiden y-koordinaatit ovat samat.

- Piste C on x-koordinaatiltaan $|3-0|=3$ etäisyydellä pisteestä B, joten piste P on x-koordinaatiltaan 3 etäisyydellä pisteestä A, mutta pisteen P x-koordinaatti on selvästi negatiivista, joten sen x-koordinaatti on -3.

Pisteen P koordinaatit ovat $(-3, 3)$.

212.



a) Sivun AB pituus on $|AB|=\sqrt{(5-1)^2+(-3-(-3))^2}=\sqrt{4^2}=4$.

b) Sivun AD pituus on $|AD|=\sqrt{(1-1)^2+(2-(-3))^2}=\sqrt{(2+3)^2}=\sqrt{5^2}=5$.

c) Lävistäjän AC pituus on

$$\begin{aligned}|AC|&=\sqrt{(5-1)^2+(2-(-3))^2}\\&=\sqrt{4^2+5^2}\\&=\sqrt{16+25}\\&=\sqrt{41}\end{aligned}$$

d) Kolmion ABD kateetteina ovat sivut AD ja AB ja hypotenuusana on sivu DB. Lasketaan kolmion ala.

$$A=\frac{4\cdot 5}{2}=10$$

213.

a) Jana *AB* on ympyrän säde. Lasketaan janan pituus.

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1-(-3)^2+(-1-2)^2} \\ &= \sqrt{4^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ympyrän pinta-ala on

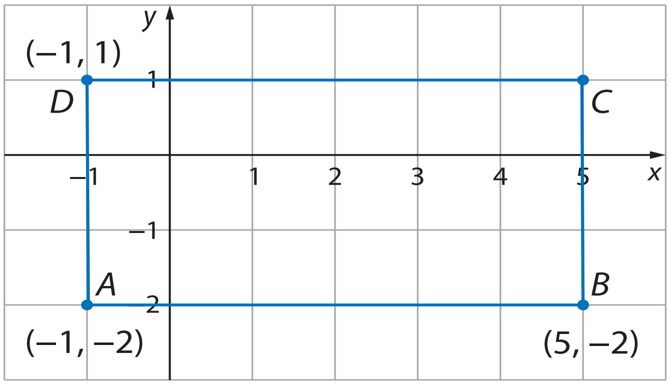
$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

b) Lasketaan kuinka kaukana piste (−5, 1) on ympyrän keskipisteestä *A*.

$$\sqrt{(-5-(-3)^2+(1-2)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Koska $5 > \sqrt{5}$, niin piste (−5, 1) on ympyrän kehän sisäpuolella.

214.



a) Suorakulmion kaikki kulmat ovat 90° ja vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

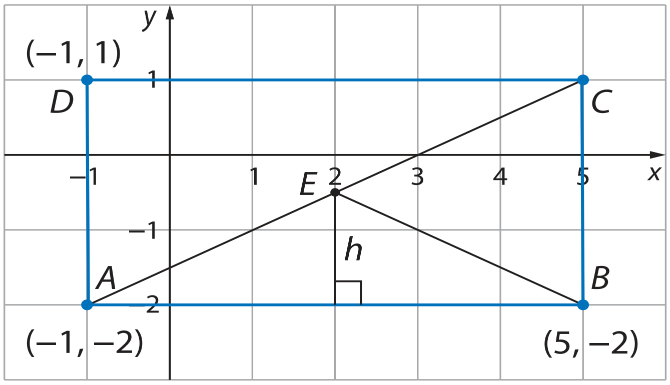
- Pisteen C tulee sijaita samalla korkeudella, kuin pisteen D, joten näiden pisteiden y-koordinaatit ovat samat.
- Pisteen C tulee sijaita suoraan pisteen B yläpuolella, joten näiden pisteiden x-koordinaatit ovat samat.

Pisteen C koordinaatit ovat (5, 1).

b) Lävistäjän BD pituus on

$$\begin{aligned}|BD| &= \sqrt{(-1-5)^2+(1-(-2))^2}\\ &= \sqrt{(-6)^2+3^2}\\ &= \sqrt{36+9}\\ &= \sqrt{45}\end{aligned}$$

c) Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään lävistäjän keskipistettä kirjaimella E.



Lasketaan pisteen E koordinaatit lävistäjän päätepisteiden avulla.

$$E=\left(\frac{5+(-1)}{2},\frac{-2+1}{2}\right)=\left(2,-\frac{1}{2}\right)$$

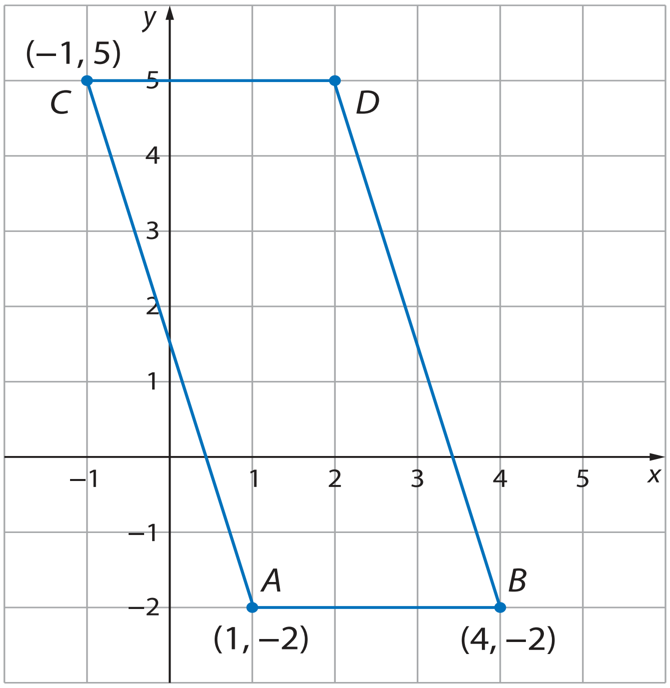
Kolmion korkeusjanan pituus h saadaan laskemalla pisteen E etäisyys kolmion kannasta AB.

Kolmion kanta AB on x-akselin suuntainen. Kannan kaikkien pisteiden y-koordinaatti on −2. Kolmion korkeusjanan pituus saadaan y-koordinaattien erotuksena.

$$h=\left|-\frac{1}{2}-(-2)\right|=\left|-\frac{1}{2}+2\right|=\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$$

215.

a)



- Pisteen D tulee sijaita samalla korkeudella, kuin pisteen C, joten näiden pisteiden y-koordinaatit ovat samat.

- Sivut AB ja CD ovat yhtä pitkiä, joten piste D on yhtä kaukana pisteestä C kuin piste B on pisteestä A. Lasketaan janan AB pituus.
$|AB| = |4-1| = |3| = 3$. Pisteen D x-koordinaatti on $-1 + 3 = 2$.

Pisteen D koordinaatit ovat (2, 5).

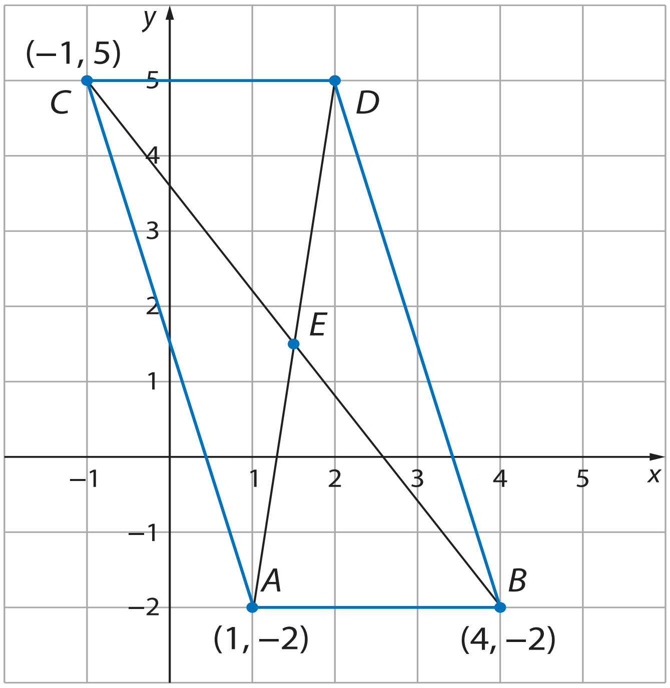
b) Lävistäjän *AD* pituus on

$$\left|AD\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (5-(-2)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

Lävistäjän *BC* pituus on

$$\left|BC\right| = \sqrt{(-1-4)^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

c)



y
(−1, 5)
C
D
E
A
B
(1, −2)
(4, −2)
x
−1
1
2
3
4
5
1
2
3
4
5
−1
−2

Lasketaan pisteen *E* koordinaatit.

$$E = \left(\frac{4+(-1)}{2}, \frac{-2+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

216.

a) Tasakylkisen kolmion kyljet ovat yhtä pitkät. Jotta kolmio *ABC* on tasakylkinen, sivut *AC* ja *BC* tulee olla yhtä pitkät.

Sivun *AC* pituus on

$$|AC| = \sqrt{(7-1)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

Sivun *BC* pituus on

$$|BC| = \sqrt{(7-5)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

Kolmio on tasakylkinen.

b) Lasketaan kolmion kannan *AB* keskipisteen koordinaatit.

$$D = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{8}{2}\right) = (3, 4)$$

c) Janan *CD* pituus on

$$|CD| = \sqrt{(3-7)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

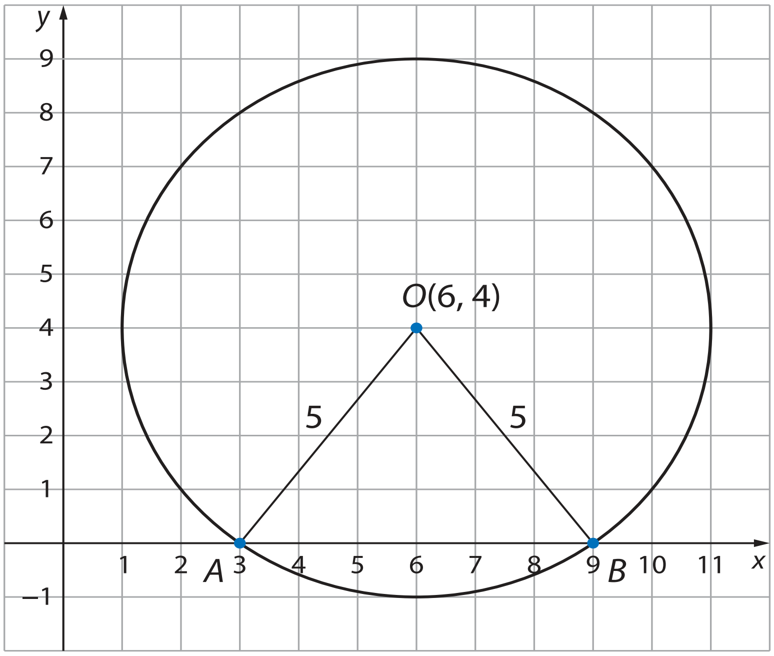
d) Lasketaan kolmion kannan *AB* pituus.

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

217.



y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
–1
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
O(6, 4)
5
5
A
B

Pisteistä *A* ja *B* tiedetään, että niiden *y*-koordinaatit ovat 0.

Merkitään niiden *x*-koordinaatteja kirjaimella *x* ja ratkaistaan ne pisteiden etäisyyden avulla.

$$|AO| = 5$$

$$\sqrt{(6-x)^2+(4-0)^2} = 5$$

$$\sqrt{6^2-2\cdot 6\cdot x+x^2+4^2} = 5$$

$$\sqrt{36-12x+x^2+16} = 5$$

$$\sqrt{x^2-12x+52} = 5 \qquad \Big|(\ )^2$$

$$x^2-12x+52 = 25$$

$$x^2-12x+27 = 0$$

Ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$y=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot1\cdot27}}{2\cdot1}$$

$$y=\frac{12\pm\sqrt{144-108}}{2}$$

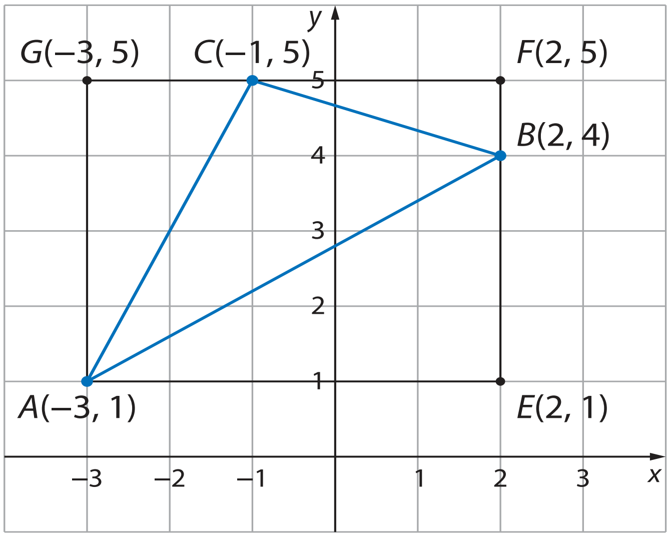
$$y=\frac{12\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$y=\frac{12\pm6}{2}$$

$$y=\frac{12+6}{2}=\frac{18}{2}=9 \quad \text{tai} \quad y=\frac{12-6}{2}=\frac{6}{2}=3$$

218.

Piirretään kolmion ympärille suorakulmio niin, että suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



Suorakulmion kärkipisteiden *E*, *F* ja *G* koordinaatit saadaan kolmion kärkipisteiden avulla. Merkitään kärkipisteet kuvaan.

Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

- $|AE| = |2-(-3)| = 5$
- $|GA| = |1-5| = |-4| = 4$

Lasketaan suorakulmion pinta-ala

$A_{\text{suorakulmio}} = 5 \cdot 4 = 20$

Kolmiot *AEB*, *BFC* ja *CGA* ovat suorakulmaisia. Lasketaan kolmioiden kateettien pituudet ja pinta-alat.

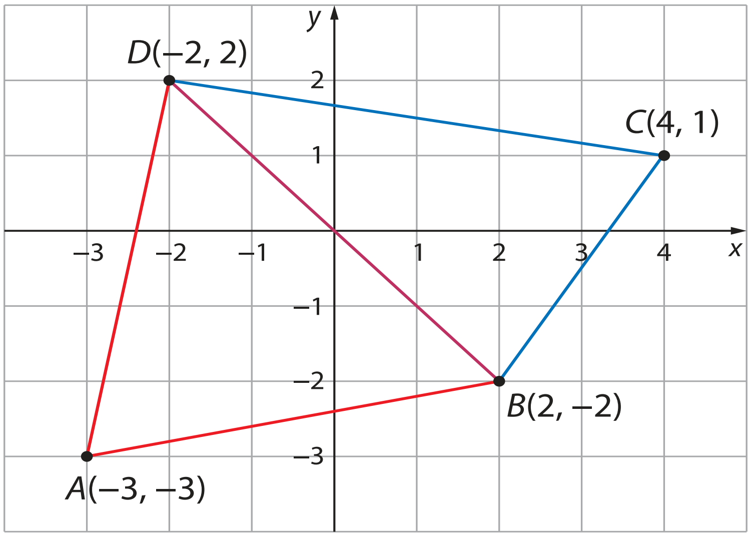
Kolmio *AEB*	Kolmio *BFC*	Kolmio *CGA*
• $\lvert AE\rvert = 2-(-3) =$ • $\lvert BE\rvert = 1-4 = 3$ • $A_{AEB} = \frac{5\cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$	• $\lvert FB\rvert = 4-5 = 1$ • $\lvert FC\rvert = \lvert -1-2\rvert =$ • $A_{BFC} = \frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$	• $\lvert CG\rvert = \lvert -3-(-1)\rvert =$ • $\lvert GA\rvert = \lvert 1-5\rvert = 4$ • $A_{CGA} = \frac{2\cdot 4}{2} = 4$

Kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään sinisten kolmioiden *AEB*, *BFC* ja *CGA* pinta-alat, jäljelle jää kysytty kolmion *ABC* pinta-ala.

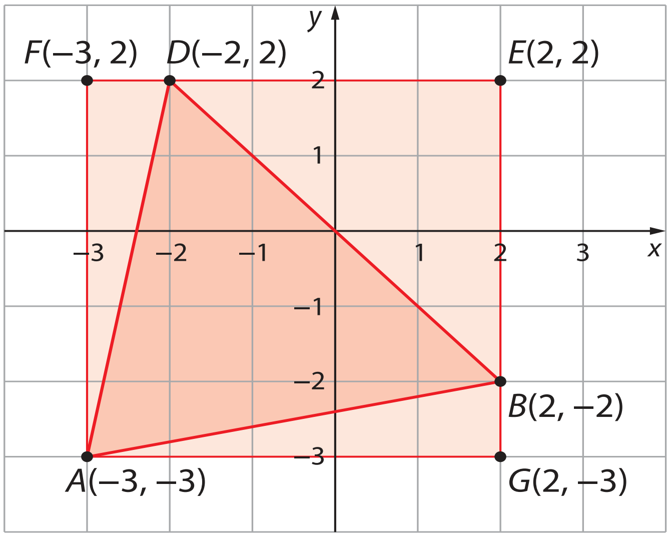
$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{\text{suorakulmio}} - \left(A_{AEB} + A_{BFC} + A_{CGA}\right) \\ &= 20 - \left(\frac{15}{2} + \frac{3}{2} + 4\right) = 20 - 13 = 7 \end{aligned}$$

219.

Jaetaan nelikulmio kahteen kolmioon *ABD* ja *BCD*.


y
D(−2, 2)
2
C(4, 1)
1
−3
−2
−1
1
2
3
4
x
−1
−2
B(2, −2)
−3
A(−3, −3)

Piirretään kolmioitten ympärille suorakulmio niin, että suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.


y
F(−3, 2)
D(−2, 2)
E(2, 2)
2
1
−3
−2
−1
1
2
3
x
−1
−2
B(2, −2)
−3
A(−3, −3)
G(2, −3)

Suorakulmion kärkipisteiden *E*, *F* ja *G* koordinaatit saadaan kolmion kärkipisteiden avulla. Merkitään kärkipisteet kuvaan.

Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

$$|GA| = |2-(-3)| = 5$$

$$|AF| = |2-(-3)| = 5$$

Suorakulmion pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio1}} = 5 \cdot 5 = 25$$

Kolmiot *AGB*, *BED* ja *DFA* ovat suorakulmaisia. Lasketaan kolmioiden kateettien pituudet ja pinta-alat.

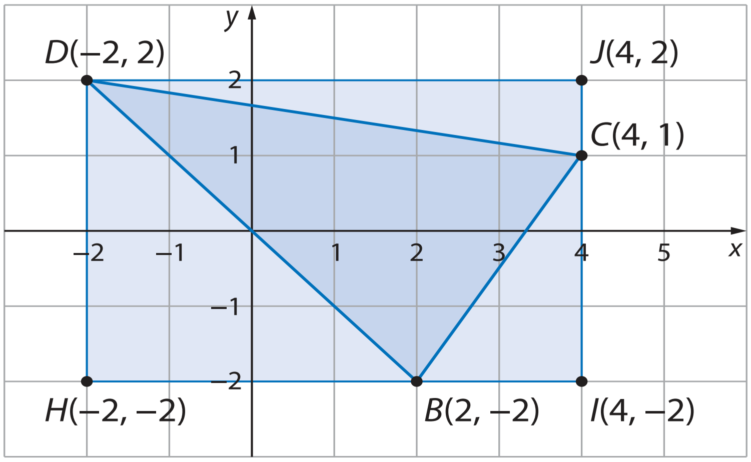
Kolmio *AGB*	Kolmio *BED*	Kolmio *DFA*
• $\|AG\| = 2-(-3) =$	• $\|BE\| = 2-(-2) =$	• $\|FD\| = \|-2-(-3)\|$
• $\|BG\| = -2-(-3)$	• $\|DE\| = \|2-(-2)\|$	• $\|AF\| = \|2-(-3)\| =$
• $A_{AGB} = \frac{5 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$	• $A_{BED} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	• $A_{DFA} = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$

Kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään sinisten kolmioiden *AEB*, *BFC* ja *CGA* pinta-alat, jäljelle jää kysytty kolmion *ABD* pinta- ala.

$$A_{ABD} = A_{\text{suorakulmio1}} - (A_{AGB} + A_{BED} + A_{DFA})$$

$$= 25 - \left(\frac{5}{2} + 8 + \frac{5}{2}\right) = 25 - 13 = 12$$

Piirretään toisen ympärille suorakulmio niin, että suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



Suorakulmion kärkipisteiden H, I ja J koordinaatit saadaan kolmion kärkipisteiden avulla. Merkitään kärkipisteet kuvaan.

Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

$$|HD| = |2-(-2)| = 4$$

$$|HI| = |4-(-2)| = 6$$

Suorakulmion pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio2}} = 4 \cdot 6 = 24$$

Kolmiot *HDB*, *BIC* ja *CJD* ovat suorakulmaisia. Lasketaan kolmioiden kateettien pituudet ja pinta-alat.

Kolmio *HDB*	Kolmio *BIC*	Kolmio *CJD*
• $\lvert HB\rvert = 2-(-2) =$ • $\lvert HD\rvert = 2-(-2) =$ • $A_{HDB} = \frac{4\cdot 4}{2} = 8$	• $\lvert BI\rvert = 4-2 = 2$ • $\lvert IC\rvert = \lvert 1-(-2)\rvert =$ • $A_{BIC} = \frac{2\cdot 3}{2} = 3$	• $\lvert CJ\rvert = \lvert 2-1\rvert = 1$ • $\lvert DJ\rvert = \lvert 4-(-2)\rvert =$ • $A_{CJD} = \frac{1\cdot 6}{2} = 3$

Kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään sinisten kolmioiden *HDB*, *BIC* ja *CJD* pinta-alat, jäljelle jää kysytty kolmion *DBC* pinta- ala.

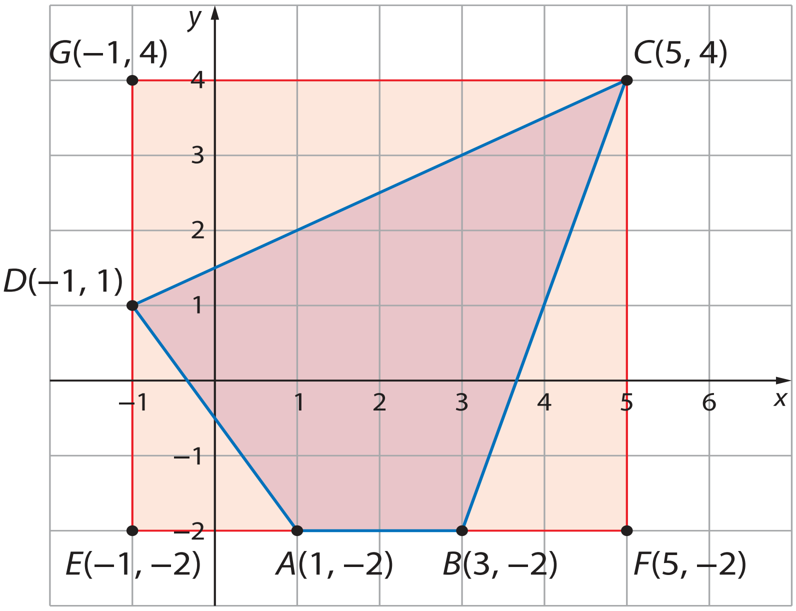
$$\begin{aligned} A_{DBC} &= A_{\text{suorakulmio2}} - (A_{HDB} + A_{BIC} + A_{CJD}) \\ &= 24-(8+3+3) = 24-14 = 10 \end{aligned}$$

Lasketaan kolmioiden *ABD* ja *DBC* alat yhteen, niin saadaan nelikulmion ala.

$$A_{\text{nelikulmio}} = A_{DBC} + A_{ABD} = 10+12 = 22$$

220.

Piirretään nelikulmion ympärille suorakulmio niin, että suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.


y
x
G(−1, 4)
C(5, 4)
D(−1, 1)
E(−1, −2)
A(1, −2)
B(3, −2)
F(5, −2)
4
3
2
1
−1
−2
−1
1
2
3
4
5
6

Suorakulmion kärkipisteiden E, F ja G koordinaatit saadaan kolmion kärkipisteiden avulla. Merkitään kärkipisteet kuvaan.

Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

- $|EG| = |4-(-2)| = 6$
- $|EF| = 5-(-1) = 6$

Lasketaan suorakulmion pinta-ala

$$A_{\text{suorakulmio}} = 6 \cdot 6 = 36$$

Kolmiot *EAD*, *BFC* ja *CGD* ovat suorakulmaisia. Lasketaan kolmioiden kateettien pituudet ja pinta-alat.

Kolmio *EAD*	Kolmio *BFC*	Kolmio *CGD*
• $\lvert AE\rvert = 1-(-1) =$ • $\lvert ED\rvert = 1-(-2) =$ • $A_{EAD} = \frac{2\cdot 3}{2} = 3$	• $\lvert BF\rvert = 5-3 = 2$ • $\lvert FC\rvert = \lvert 4-(-2)\rvert =$ • $A_{BFC} = \frac{2\cdot 6}{2} = 6$	• $\lvert GC\rvert = \lvert 5-(-1)\rvert =$ • $\lvert DG\rvert = \lvert 4-1\rvert = 3$ • $A_{CGA} = \frac{3\cdot 6}{2} = 9$

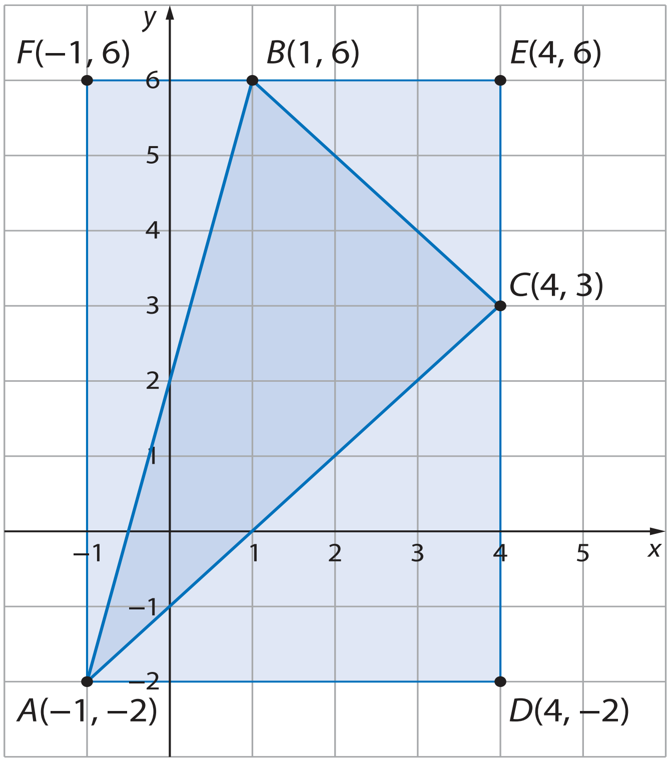
Kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään sinisten kolmioiden *AEB*, *BFC* ja *CGA* pinta-alat, jäljelle jää kysytty nelikulmio *ABCD* pinta- ala.

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{\text{suorakulmio}} - (A_{EAD} + A_{BFC} + A_{CGD}) \\ &= 36 - (3+6+9) = 18 \end{aligned}$$

Tontin pinta-ala on $A = 18\cdot(100\ \text{m})^2 = 180\,000\ \text{m}^2 = 1\,800\ \text{a}$

221.

a) Piirretään kolmion ympärille suorakulmio niin, että suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



y
F(−1, 6)
B(1, 6)
E(4, 6)
C(4, 3)
A(−1, −2)
D(4, −2)
x
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−1
1
2
3
4
5

Suorakulmion kärkipisteiden *D*, *E* ja *F* koordinaatit saadaan kolmion kärkipisteiden avulla. Merkitään kärkipisteet kuvaan.

Kärkipisteet ovat (−1, −2), (4, −2), (4, 6) ja (−1, 6).

b) Lasketaan kolmion *ABC* pinta-ala.

Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

- $|AF| = |6-(-2)| = 8$
- $|AD| = 4-(-1) = 5$

Lasketaan suorakulmion pinta-ala

$$A_{\text{suorakulmio}} = 5 \cdot 8 = 40$$

Kolmiot *ADC*, *CEB* ja *BFA* ovat suorakulmaisia. Lasketaan kolmioiden kateettien pituudet ja pinta-alat.

Kolmio *ADC*	Kolmio *CEB*	Kolmio *BFA*
• $\lvert AD\rvert = 4-(-1) = 5$ • $\lvert DC\rvert = 3-(-2) = 5$ • $A_{ADC} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$	• $\lvert CE\rvert = 6-3 = 3$ • $\lvert BE\rvert = 4-1 = 3$ • $A_{CEB} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$	• $\lvert AF\rvert = 6-(-2) = 8$ • $\lvert FB\rvert = 1-(-1) = 2$ • $A_{BFA} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8$

Kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään sinisten kolmioiden *ADC*, *CEB* ja *BFA* pinta-alat, jäljelle jää kysytty kolmion *ABC* pinta-ala.

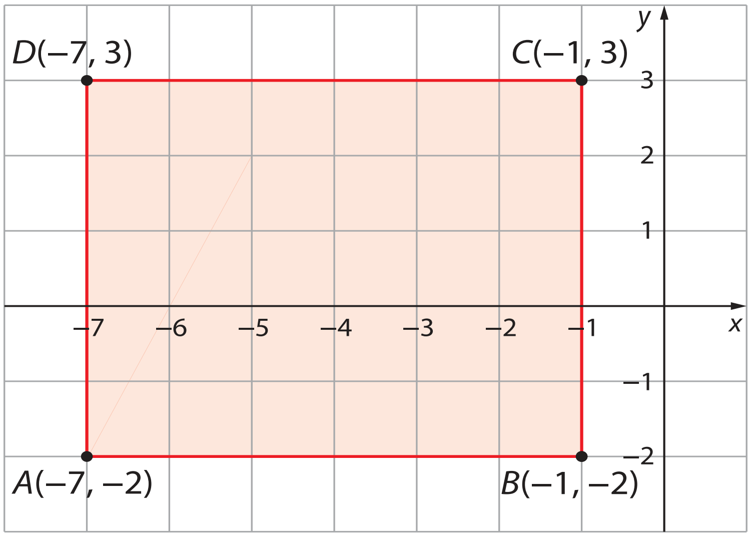
$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{\text{suorakulmio}} - \left(A_{ADC} + A_{CEB} + A_{BFA}\right) \\ &= 40 - \left(\frac{25}{2} + \frac{9}{2} + 8\right) = 40 - 25 = 15 \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka paljon kolmion pinta-ala on pienempi kuin suorakulmion pinta-ala.

$$\frac{A_{\text{suorakulmio}} - A_{ABC}}{A_{\text{suorakulmio}}} = \frac{40-15}{40} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$$

222.

Merkitään suorakulmion kärkipisteet koordinaatistoon ja piirretään suorakulmio *ABCD*.

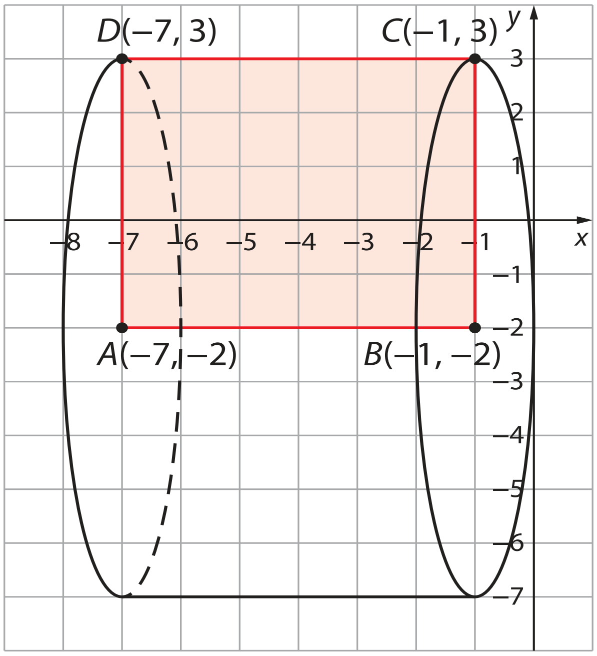


Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

- $|AB| = -1-(-7) = 6\text{ (cm)}$
- $|AD| = 3-(-2) = 5\text{ (cm)}$

Kun suorakulmio pyörähtää sivun *AB* ympäri, syntyy ympyrälieriö, jonka

- korkeus on $|AB| = 6\text{ cm}$
- pohjaympyrän säde on $|AD| = 5\text{ cm}$.


D(−7, 3)
C(−1, 3)
A(−7, −2)
B(−1, −2)
y
x
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1

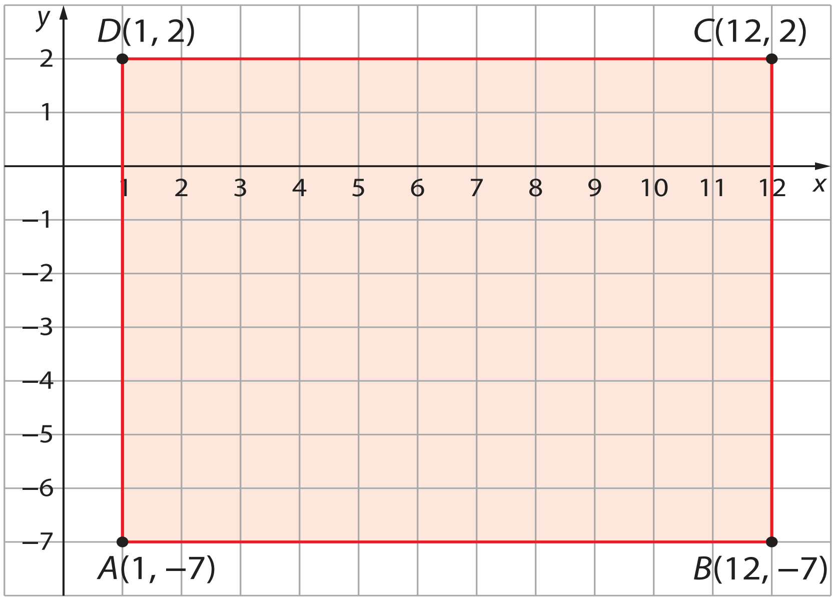
Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \cdot (5\text{ cm})^2 \cdot 6\text{ cm} = 471,238...\text{ cm}^3$$

$$= 0,471...\text{ dm}^3 = 0,471...\text{ l} = 4,712...\text{ dl} \approx 4,7\text{ dl}$$

223.

a) Merkitään suorakulmion kärkipisteet koordinaatistoon ja piirretään suorakulmio *ABCD*.

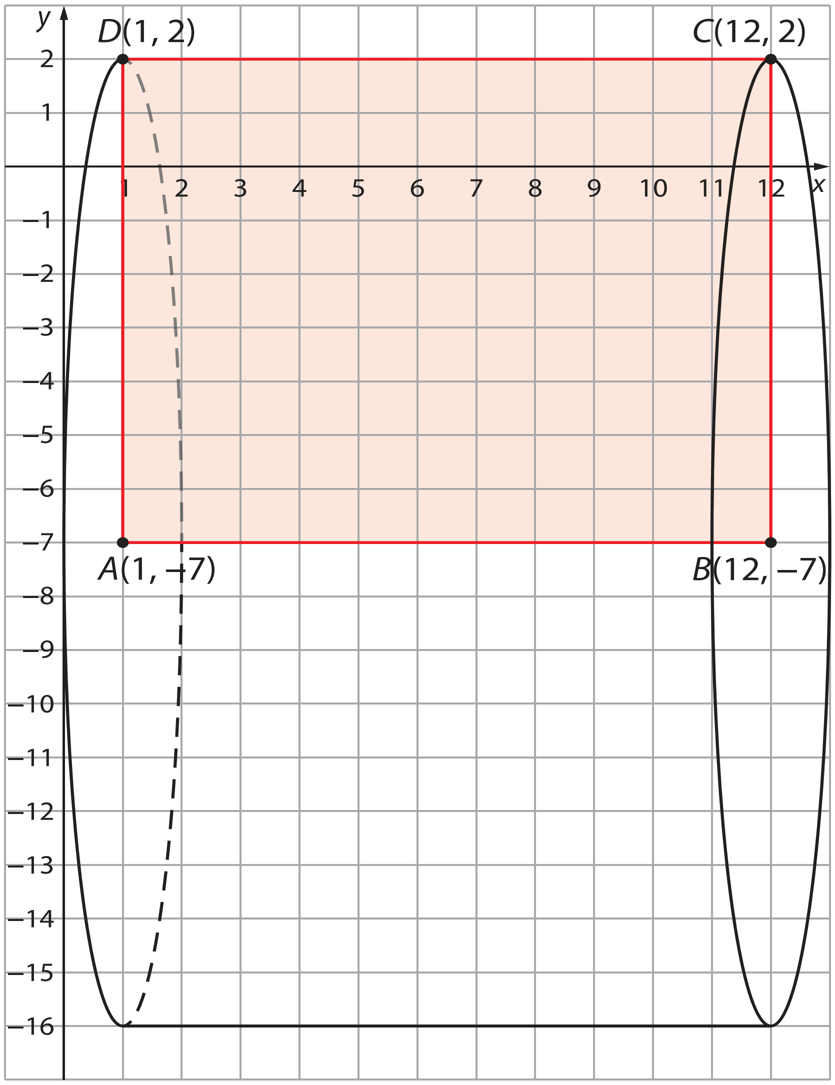

y
x
D(1, 2)
C(12, 2)
A(1, −7)
B(12, −7)
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Lasketaan suorakulmion sivujen pituudet.

- $|AB| = 12 - 1 = 11\ (\text{cm})$
- $|AD| = 2 - (-7) = 9\ (\text{cm})$

Kun suorakulmio pyörähtää pidemmän sivun, eli sivun *AB* ympäri, syntyy ympyrälieriö, jonka

- korkeus on $|AB| = 11\ \text{cm}$
- pohjaympyrän säde on $|AD| = 9\ \text{cm}$.


y
x
D(1, 2)
C(12, 2)
A(1, −7)
B(12, −7)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16

Lasketaan pyörähdyskappaleen vaipan ala.

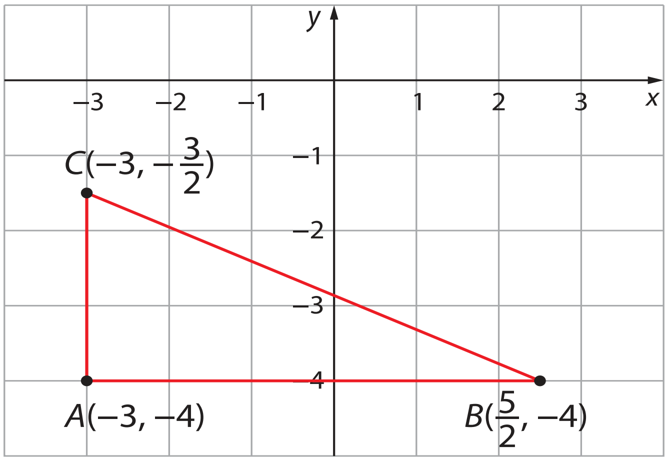
$$A = 2 \cdot \pi \cdot 9\ \text{cm} \cdot 11\ \text{cm} = 622{,}035...\ \text{cm}^2 \approx 622\ \text{cm}^2$$

b) Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \cdot (9\ \text{cm})^2 \cdot 11\ \text{cm} = 2\ 799{,}159...\ \text{cm}^3 = 2{,}799\ \text{dm}^3 = 2{,}799...\ \text{l} \approx 2{,}8\ \text{l}$$

224.

Merkitään suorakulmaisen kolmion kärkipisteet koordinaatistoon ja piirretään suorakolmio *ABC*.



Lasketaan suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet.

- $|AB| = \frac{5}{2} - (-3) = \frac{11}{2}$
- $|AC| = -\frac{3}{2} - (-4) = \frac{5}{2}$

Lasketaan K_1 tilavuus.

Kun suorakulmio pyörähtää lyhyemmän kateetin, eli sivun *AC* ympäri, syntyy ympyräkartio, jonka

- korkeus on $|AC| = \frac{5}{2}$
- pohjaympyrän säde on $|AB| = \frac{11}{2}$.

Kartion tilavuus on

$$V_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{2}}{3} = 79,194...$$

Lasketaan K_2 tilavuus.

Kun suorakulmio pyörähtää pidemmän kateetin, eli sivun *AB* ympäri, syntyy ympyräkartio, jonka

- korkeus on $|AB| = \frac{11}{2}$
- pohjaympyrän säde on $|AC| = \frac{5}{2}$.

Kartion tilavuus on

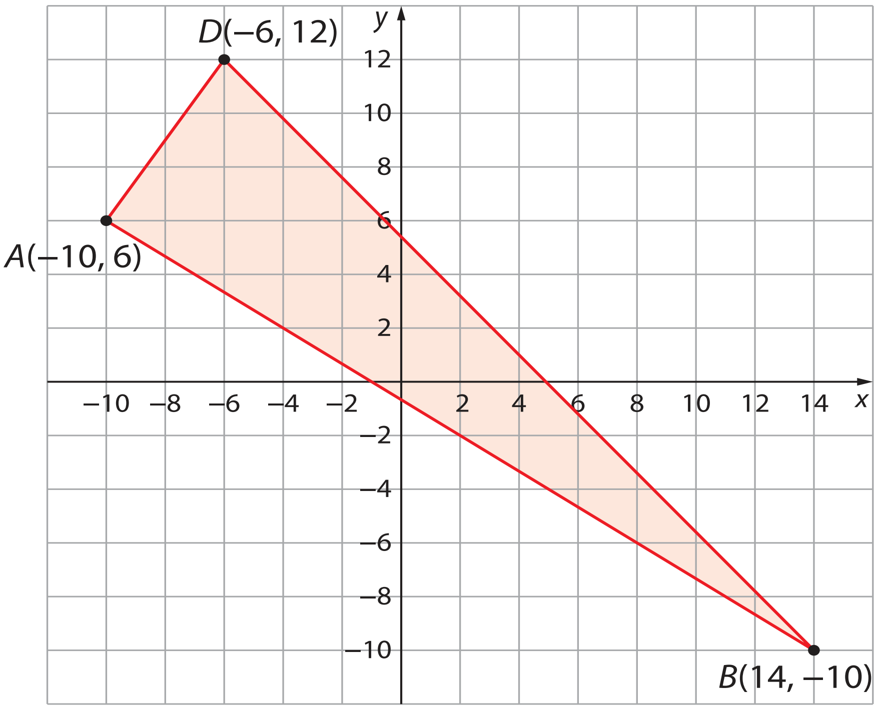
$$V_2 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{11}{2}}{3} = 35,997...$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia V_1 on suurempi verrattuna V_2.

$$\frac{V_1 - V_2}{V_2} = \frac{79,194... - 35,997...}{35,997...} = 1,200... \approx 1,2 = 120\ \%$$

225.

Piirretään mallikuva. Lasketaan kolmion kärkipisteiden avulla kolmion sivujen pituudet.

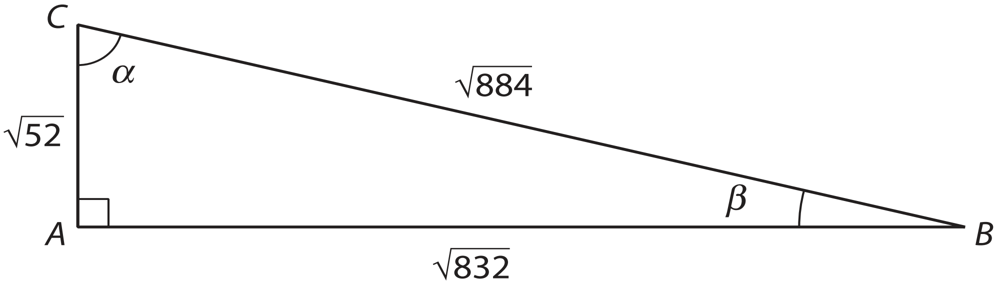


D(−6, 12)
A(−10, 6)
B(14, −10)
y
x
12
10
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−10
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14

- $|AB| = \sqrt{(14-(-10))^2 + (-10-6)^2} = \sqrt{832}$
- $|AC| = \sqrt{(-6-(-10)^2 + (12-6)^2} = \sqrt{52}$
- $|CB| = \sqrt{(14-(-6))^2 + (-10-12)^2} = \sqrt{884}$

Kolmion pisin sivu eli hypotenuusa on sivu *CB*. Kaksi muuta sivua ovat kateetteja.

Merkitään kolmion teräviä kulmia kirjaimilla α ja β.



Kun kolmion kaikkien sivujen pituudet tunnetaan, voidaan kulmien suuruudet ratkaista minkä tahansa trigonometrisen funktion avulla.

Ratkaistaan kulma α sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{832}}{\sqrt{884}}$$

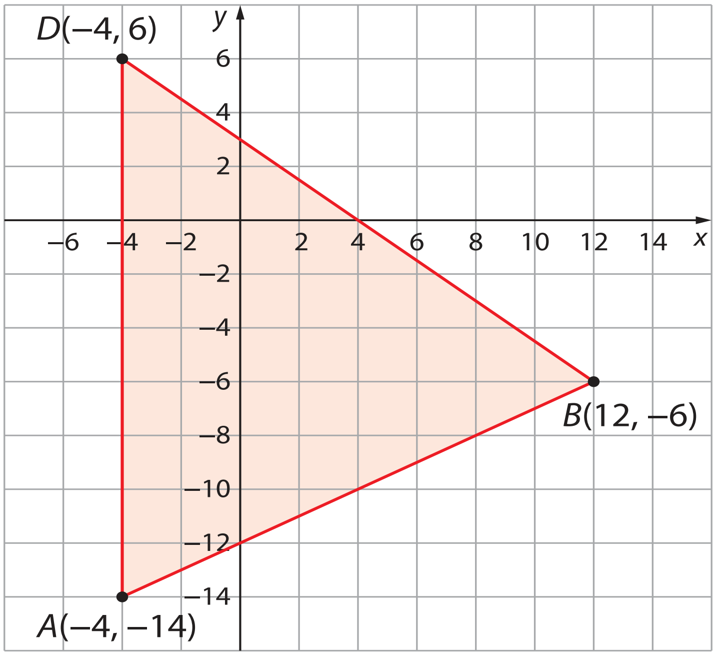
$$\alpha = 75{,}963...° \approx 76°$$

Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\beta = 180° - 90° - 75{,}963...° = 14{,}036...° \approx 14°$$

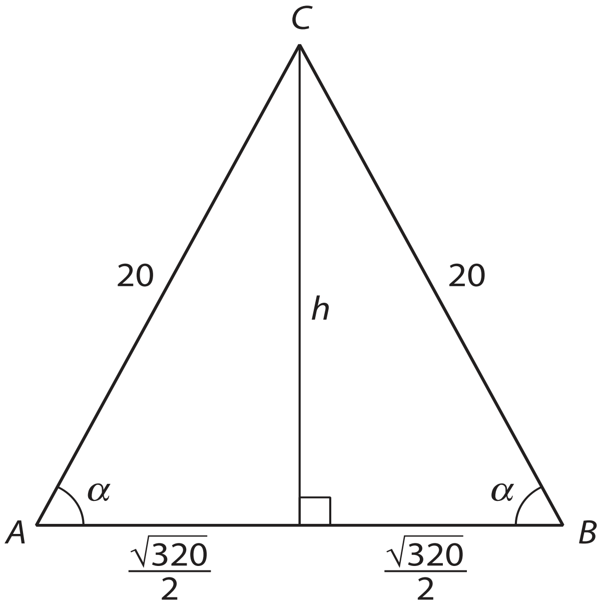
226.

Piirretään mallikuva. Lasketaan kolmion kärkipisteiden avulla kolmion sivujen pituudet.


D(−4, 6)
y
6
4
2
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14
x
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
B(12, −6)
A(−4, −14)

- $|AB| = \sqrt{(12-(-4))^2 + (-6-(-14))^2} = \sqrt{320}$
- $|AC| = \sqrt{(-4-(-4)^2 + (6-(-14))^2} = 20$
- $|CB| = \sqrt{(12-(-4))^2 + (-6-6)^2} = 20$

Merkitään kantakulmia kirjaimella α.



Kun kolmion kahden sivun pituudet tunnetaan, voidaan kulmien suuruudet ratkaista.

Ratkaistaan kulma α kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{320}}{2}}{20}$$

$$\alpha = 63,434...^\circ \approx 63^\circ$$

b) Lasketaan sivun *h* pituus sinin avulla.

$$\sin 63,434...^\circ = \frac{h}{20}$$

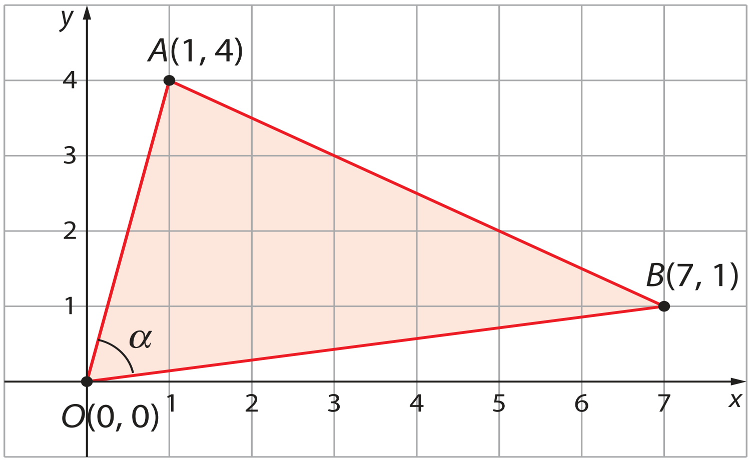
$$h = 17,888...$$

Kolmion pinta-ala on

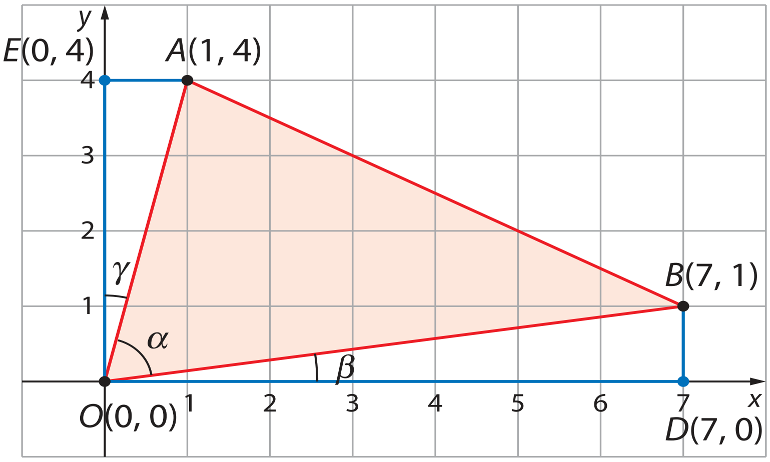
$$A = \frac{\sqrt{320} \cdot 17,888...}{2} = 160$$

227.

Piirretään mallikuva. Lasketaan kolmion kärkipisteiden avulla kolmion sivujen pituudet.


y
A(1, 4)
B(7, 1)
O(0, 0)
α
x
1
2
3
4
5
6
7

- $|AB| = \sqrt{(7-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{45}$
- $|OA| = \sqrt{(1-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$
- $|OB| = \sqrt{(7-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{50}$


y
E(0, 4)
A(1, 4)
B(7, 1)
O(0, 0)
D(7, 0)
γ
α
β
x
1
2
3
4
5
6
7

Suorakulmaisten kolmioiden kärkipisteiden *D* ja *E* koordinaatit saadaan kolmion kärkipisteiden avulla. Merkitään kärkipisteet kuvaan.

Lasketaan sivujen *EA* ja *DB* pituudet.

- $|EA| = \sqrt{(1-0)^2 + (4-4)^2} = 1$
- $|DB| = \sqrt{(7-7)^2 + (1-0)^2} = 1$

Kulman β voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$\beta = 8{,}130...°$$

Kulman γ voidaan laskea sinin avulla.

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\gamma = 14{,}036...°$$

Kulmat α, β ja γ muodostavat suoran kulman, joten

$$\alpha + \beta + \gamma = 90°$$

$$\alpha = 90° - \gamma - \beta$$

$$\alpha = 90° - 14{,}036...° - 8{,}130...°$$

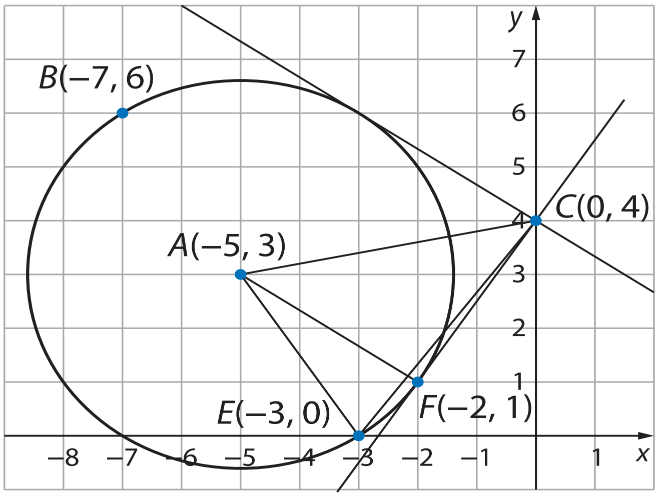
$$\alpha = 67{,}833...° \approx 68°$$

228.

a) Piirretään ensin ympyrä. Ympyrä voidaan piirtää keskipisteen *A* ja kehäpisteen *B* avulla.

Merkitään koordinaatistoon piste *C* ja piirretään ympyrälle pisteen *C* kautta kulkevat tangentit.

Piirretään kolmiot *ACF* ja *ACE*.



Jos piste E on tangentin sivuamispiste, kolmio *ACE* on suorakulmainen kolmio. Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

- $|AC| = \sqrt{(0-(-5))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}$
- $|EC| = \sqrt{(0-(-3))^2 + (4-0)^2} = 5$
- $|AE| = \sqrt{(-3-(-5))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$

Kolmio on suorakulmainen, jos Pythagoraan lause on voimassa.

$$\begin{aligned}\sqrt{26}^2 &= 5^2 + \sqrt{13}^2\\ 26 &= 38\\ &\text{epätosi}\end{aligned}$$

Pythagoraan lause ei ole voimassa, joten kolmio *ACE* ei ole suorakulmainen kolmio. Tällöin pisteeseen *E* piirretty suora ei ole tangentti.

Jos piste *F* on tangentin sivuamispiste, kolmio *ACF* on suorakulmainen kolmio. Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

- $|AC| = \sqrt{(0-(-5))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}$
- $|FC| = \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$
- $|AF| = \sqrt{(-2-(-5))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$

Kolmio on suorakulmainen, jos Pythagoraan lause on voimassa.

$$\begin{aligned}\sqrt{26}^2 &= \sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2\\ 26 &= 26\\ &\text{tosi}\end{aligned}$$

Pythagoraan lause on voimassa, joten kolmio *ACF* on suorakulmainen kolmio. Tällöin pisteeseen F piirretty suora on tangentti, joten *F* on sivuamispiste.

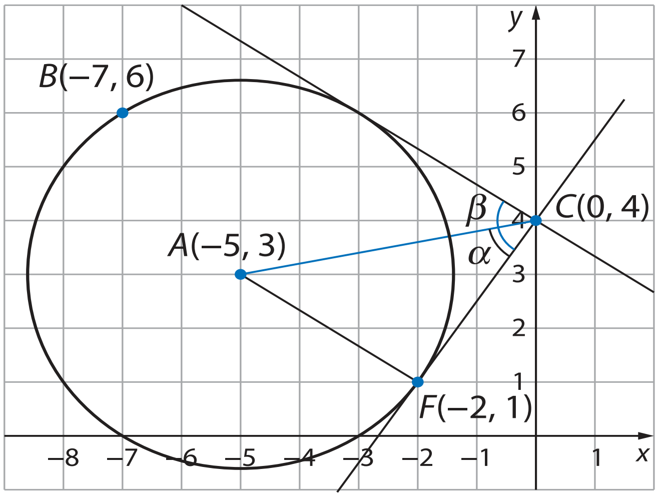
b) Jana *AB* on ympyrän säde.

$$r = |AB| = \sqrt{(-7-(-5))^2 + (6-3)^2} = \sqrt{13}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A = \pi \cdot \sqrt{13}^2 = 13\pi$$

c) Merkitään kolmion *ACF* toista terävää kulmaa kirjaimella α. Kulma α on puolet tangenttikulmasta β.



y
x
B(−7, 6)
A(−5, 3)
C(0, 4)
F(−2, 1)
β
α
7
6
5
4
3
2
1
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1

Ratkaistaan kulma α sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}}$$

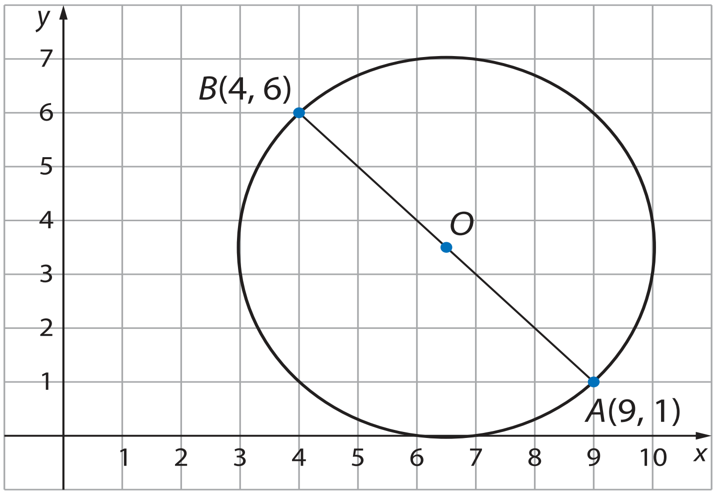
$$\alpha = 45°$$

Lasketaan tangenttikulman suuruus.

$$\beta = 2\alpha = 2 \cdot 45° = 90°$$

229.

a) Piirretään mallikuva. Merkitään ympyrän keskipistettä kirjaimella *O*.



Koska jana *AB* on ympyrän halkaisija, janan keskipiste on ympyrän keskipiste. Lasketaan janan *AB* keskipiste.

$$\left(\frac{4+9}{2}, \frac{6+1}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(6\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$$

Janan *OA* on ympyrän säde. Lasketaan janan *OA* pituus.

$$|OA| = \sqrt{\left(9-6\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-3\frac{1}{2}\right)^2}$$

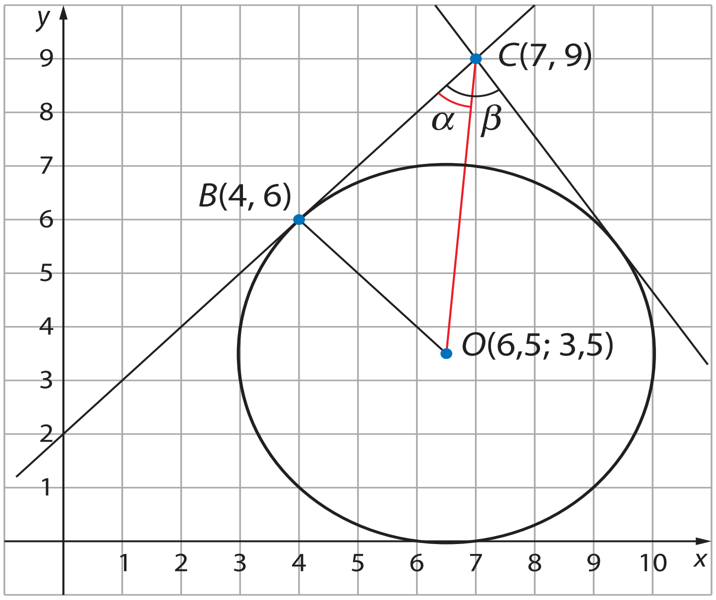
$$= \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

b) Lasketaan pisteen $\left(8,\ 5\frac{1}{2}\right)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä.

$$\sqrt{\left(8-6\frac{1}{2}\right)^2+\left(5\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$$

Koska säde on pidempi kuin pisteen $\left(8,\ 5\frac{1}{2}\right)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä, niin piste $\left(8,\ 5\frac{1}{2}\right)$ on ympyrän kehän sisäpuolella.

c) Merkitään kolmion *OBC* toista terävää kulmaa kirjaimella α. Kulma α on puolet tangenttikulmasta β.



Lasketaan janan *BC* pituus.

$$|BC| = \sqrt{(7-4)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{18}$$

Lasketaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{18}}$$

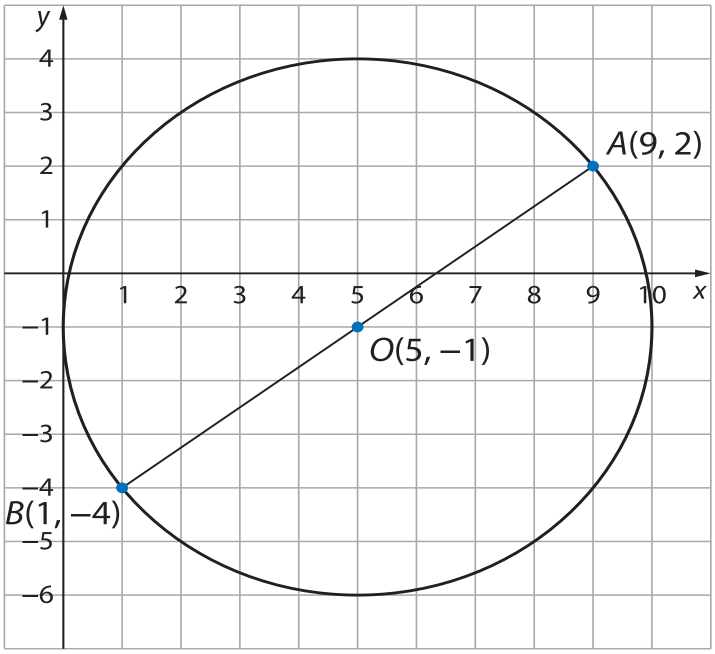
$$\alpha = 39{,}805...^\circ$$

Lasketaan tangenttikulman suuruus.

$$\beta = 2\alpha = 2 \cdot 39{,}805...^\circ = 79{,}611...^\circ \approx 80^\circ$$

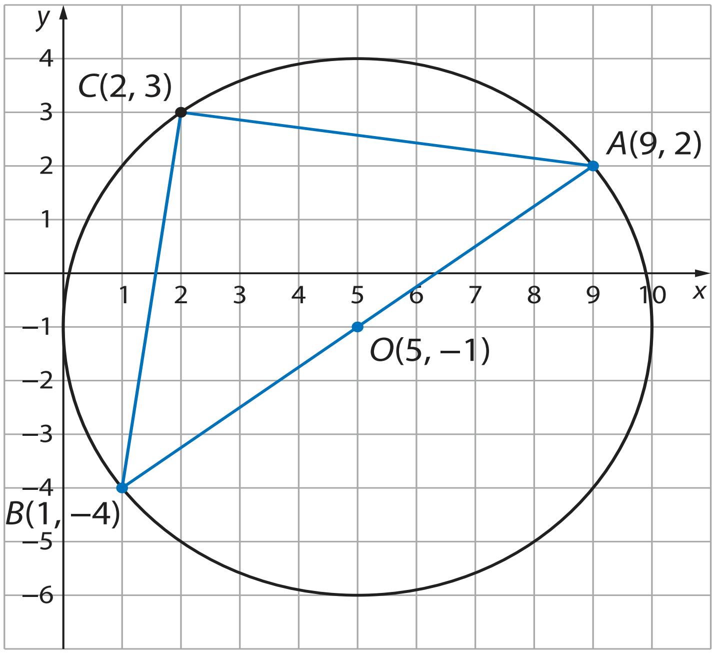
230.

a)



y
x
A(9, 2)
O(5, −1)
B(1, −4)

b)



y
x
C(2, 3)
A(9, 2)
O(5, −1)
B(1, −4)

c) Jana *AB* on kolmion kanta ja jana *OC* on kolmion korkeus. Lasketaan janajoen pituudet.

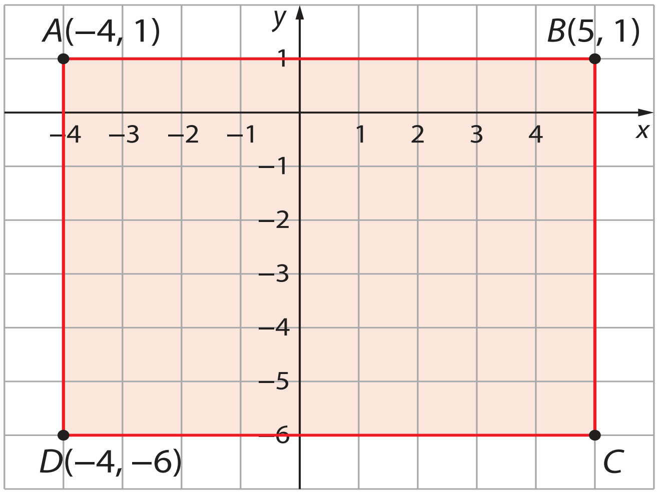
- $|AB| = \sqrt{(1-9)^2 + (-4-2)^2} = 10$
- $|OC| = \sqrt{(2-5)^2 + (3-(-1))^2} = 5$

Lasketaan kolmion *ABC* ala.

$$A_{ABC} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$$

231.

a) Merkitään annetut suorakulmion kärkipisteet koordinaatistoon ja hahmotellaan niiden avulla suorakulmio *ABCD*.



Suorakulmion kaikki kulmat ovat 90° ja vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

- Pisteen *C* tulee sijaita samalla korkeudella, kuin pisteen *D*, joten näiden pisteiden y-koordinaatit ovat samat.

- Pisteen *C* tulee sijaita suoraan pisteen *B* alapuolella, joten näiden pisteiden x-koordinaatit ovat samat.

Pisteen *C* koordinaatit ovat $(5, -6)$.

b) Lasketaan janan *AC* pituus.

$$
\begin{aligned}
|AC| &= \sqrt{\left(5-(-4)\right)^2+(-6-1)^2} \\
&= \sqrt{9^2+(-7)^2} \\
&= \sqrt{81+49} \\
&= \sqrt{130}
\end{aligned}
$$

c) Lasketaan janat *DA* ja *DC*.

$$|DA| = \sqrt{(-4-(-4))^2+(1-(-6))^2} = \sqrt{0+7^2} = 7$$

$$|DC| = \sqrt{(5-(-4))^2+(-6-(-6))^2} = \sqrt{9^2+0} = 9$$

Suorakulmion ala on

$$A = 7\cdot 9 = 63$$

232.

a) Lasketaan janojen *AB*, *AC* ja *CB* pituudet.

$$|AB| = \sqrt{(6-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4^2 + 0} = 4$$

$$|AC| = \sqrt{(2-2)^2 - (4-1)^2} = \sqrt{0 + 3^2} = 3$$

$$|CB| = \sqrt{(6-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Kolmio on suorakulmainen, jos Pythagoraan lause on voimassa.

$$\begin{aligned} 5^2 &= 4^2 + 3^2 \\ 25 &= 16 + 9 \\ 25 &= 25 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Kolmio on suorakulmainen.

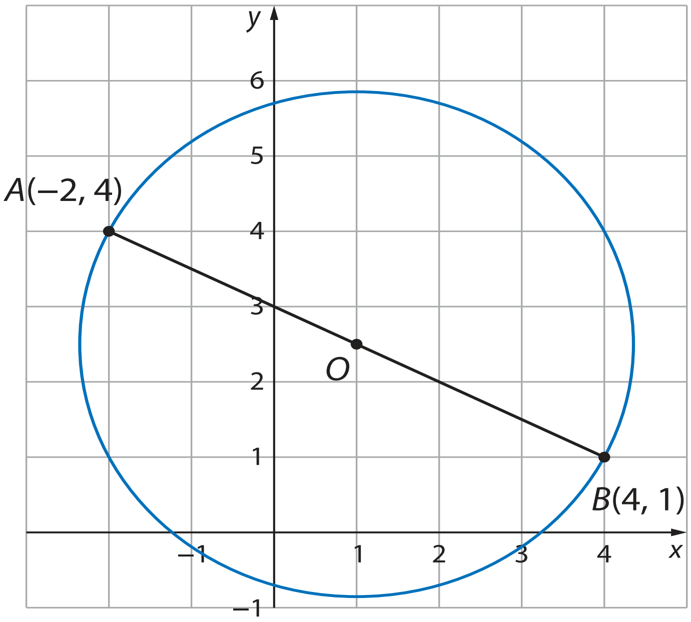
b) Pyörähdyskappaleen korkeus on $|AC| = 3$ ja pohjan säde on $|AB| = 4$.

Lasketaan ympyräkartion tilavuus.

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = 16\pi$$

233.

a) Piirretään mallikuva. Merkitään ympyrän keskipistettä kirjaimella *O*.



Koska jana *AB* on ympyrän halkaisija, janan keskipiste on ympyrän keskipiste. Lasketaan janan *AB* keskipiste.

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(1, 2\frac{1}{2}\right)$$

b) Lasketaan säteen *OB* pituus.

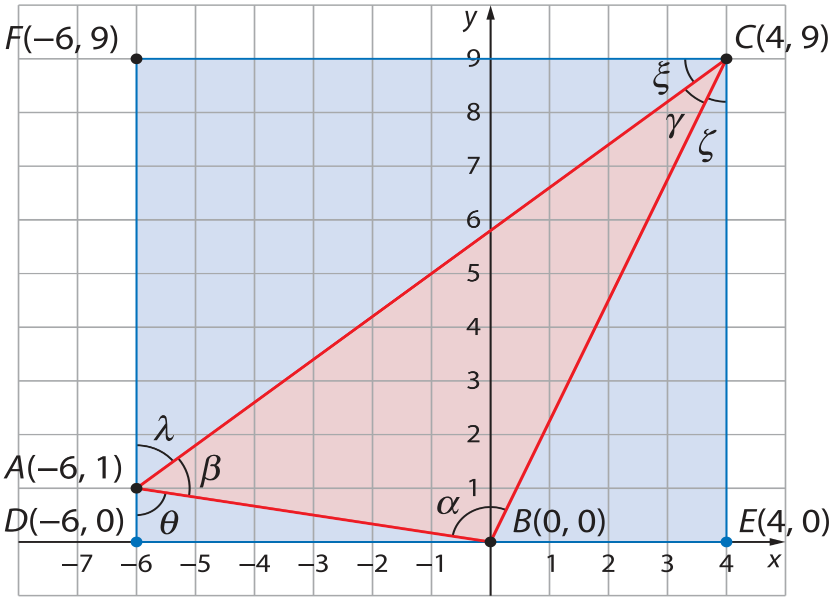
$$\begin{aligned}|OB| &= \sqrt{(4-1)^2 + \left(1 - 2\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{9 + \frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{45}{4}}\end{aligned}$$

Ympyrän ala on

$$A = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2 = \frac{45\pi}{4}$$

234.

a) Piirretään kolmion ympärille suorakulmio niin, että suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.


F(−6, 9)
C(4, 9)
A(−6, 1)
D(−6, 0)
B(0, 0)
E(4, 0)
λ
β
θ
α
ξ
γ
ζ
x
y
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Suorakulmion kärkipisteiden D, E ja F koordinaatit saadaan kolmion kärkipisteiden avulla. Merkitään kärki pisteet ja kulmat kuvaan.

Lasketaan kulmat λ, θ, ζ ja ξ, niin voidaan laskea kulmat α, β ja γ.

Kulman θ voidaan laskea tangentin avulla, kun tiedetään kaikki koordinaattipisteet.

$$\tan\theta = \frac{|DB|}{|DA|} = \frac{6}{1} \quad ,$$

$$\theta = 80{,}537...^\circ$$

Kulman λ voidaan laskea tangentin avulla, kun tiedetään kaikki koordinaattipisteet.

$$\tan\lambda = \frac{|FC|}{|AF|} = \frac{10}{8}$$

$$\lambda = 51{,}340°$$

Kulmat λ, θ ja β muodostavat oikokulman, joten

$$\lambda + \theta + \beta = 180°$$

$$\beta = 48{,}122..° \approx 48{,}1°$$

Kulman ζ voidaan laskea tangentin avulla, kun tiedetään kaikki koordinaattipisteet.

$$\tan\zeta = \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{4}{9}$$

$$\zeta = 23{,}962...°$$

Kulman ξ voidaan laskea tangentin avulla, kun tiedetään kaikki koordinaattipisteet.

$$\tan\xi = \frac{|AF|}{|FC|} = \frac{8}{10}$$

$$\xi = 38{,}659...°$$

Kulmat ξ, ζ ja γ muodostavat suorakulman, joten

$$\begin{aligned}\xi+\zeta+\gamma&=90^\circ\\ \gamma&=27,378...^\circ\approx 27,4^\circ\end{aligned}$$

Kulmat β, α ja γ muodostavat kolmion, joten

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=180^\circ\\ \alpha&=104,5^\circ\end{aligned}$$

b) Lasketaan koko nelikulmion pinta-ala ja vähennetään siitä suorakulmaisten kolmioiden alat, niin saadaan kysytyn kolmion pinta-ala.

Nelikulmion pinta-ala on

$$A_{\text{nelikulmio}} = |DE| \cdot |EC| = 10 \cdot 9 = 90$$

Kolmion *DAB* pinta-ala on

$$A_{DAB} = \frac{|DA| \cdot |DB|}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3$$

Kolmion *BEC* pinta-ala on

$$A_{BEC} = \frac{|BE| \cdot |EC|}{2} = \frac{4 \cdot 9}{2} = 18$$

Kolmion *CFA* pinta-ala on

$$A_{CFA} = \frac{|FC| \cdot |AF|}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40$$

Kolmion *ABC* pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{\text{nelikulmio}} - (A_{DAB} + A_{BEC} + A_{CFA}) \\ &= 90 - (3 + 18 + 40) \\ &= 29,0 \end{aligned}$$

235.

a) Lasketaan jana origosta ympyrän keskipisteeseen.

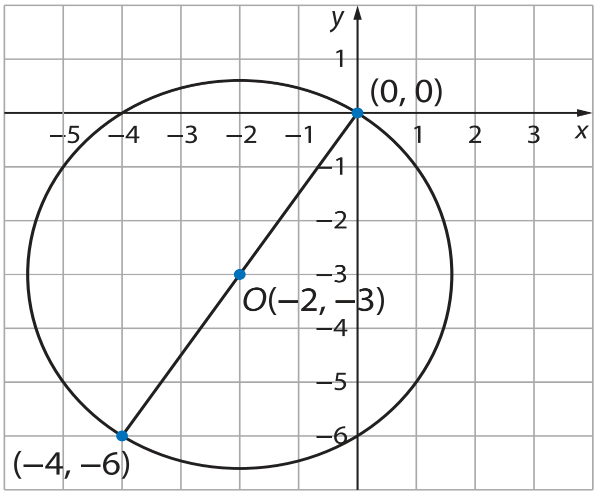
$$r=\sqrt{(-2-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{13}$$

b) Lasketaan janan *AO* pituus. Jos janan *AB* pituus on eri kuin säteen pituus, piste ei ole ympyrän kehällä.

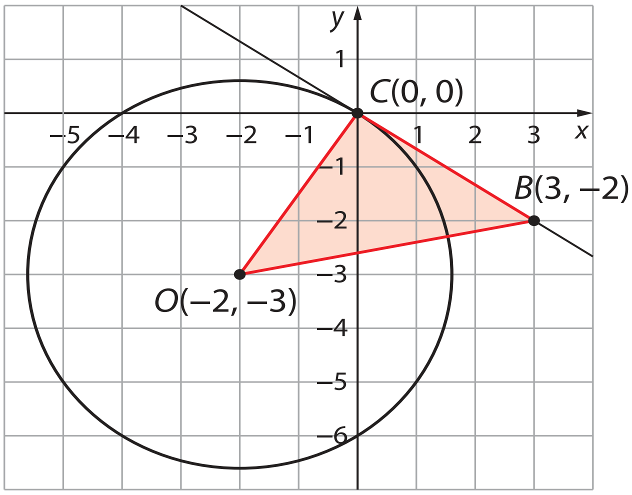
$$\left|AO\right|=\sqrt{(-2-(-5))^2+(-1-(-3))^2}=\sqrt{13}$$

Piste *A* on kehällä.

c)


y
x
1
(0, 0)
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3
O(−2, −3)
−4
−5
−6
(−4, −6)

d) Piirretään mallikuva. Merkitään origoa kirjaimella *C*.



Lasketaan kolmion *OCB* sivujen pituudet ja tarkistetaan, toteutuuko Pythagoraan lause.

$$|OB| = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{26}$$

$$|CB| = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$\sqrt{26}^2 = \sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2$$

$$26 = 26$$

tosi

Pythagoraan lause toteutuu, joten kolmio *OCB* on suorakulmainen. Koska kolmio on suorakulmainen, tangentti sivuaa ympyrää origossa.

3 Yhtälöpari

3.1 Kuvioiden yhdenmuotoisuus

236.

a) Yhdenmuotoisilla pöytälampuilla vastinsivujen suhde on sama. Merkitään isomman varjostimen sivujanan pituutta kirjaimella *x*.

$$\frac{20}{45}=\frac{16}{x}$$

$$20x = 720 \qquad |:20$$

$$x = 36\text{ cm}$$

b) Merkitään pienemmän varjostimen jalan pohjaympyrän halkaisijaa kirjaimella *y*.

$$\frac{20}{45}=\frac{y}{18}$$

$$45y = 360 \qquad |:45$$

$$y = 8\text{ cm}$$

Säde saadaan jakamalla halkaisija kahdella.

8 cm : 2 = 4 cm

237.

Kolmioilla on yhteinen kulma A.

Jos janat BC ja DE ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat B ja D ovat yhtä suuret. Myös kulmat C ja E ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Kaksi kolmiota on yhdenmuotoiset, jos kolmiossa on kaksi yhtä suurta vastinkulmaparia. (kk-lause)

238.

a) Sivun *AB* vastinsivu pienemmässä kolmiossa on sivu *DE* ja sivun *BC* vastinsivu on sivu *EC*. Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama.

$$\begin{aligned}\frac{|BC|}{|EC|} &= \frac{|AB|}{|DE|}\\ \frac{50}{30} &= \frac{x}{12}\\ 30x &= 600 \qquad \qquad \qquad |:30\\ x &= 20\text{ cm}\end{aligned}$$

b) Sivun *AB* vastinsivu pienemmässä kolmiossa on sivu *DE* ja sivun *BC* vastinsivu on sivu *EC*. Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama.

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|DE|} &= \frac{|BC|}{|EC|}\\ \frac{2,5}{1,5} &= \frac{4,0+x}{x}\\ 2,5x &= 1,5x+6\\ x &= 6\text{ cm}\end{aligned}$$

239.

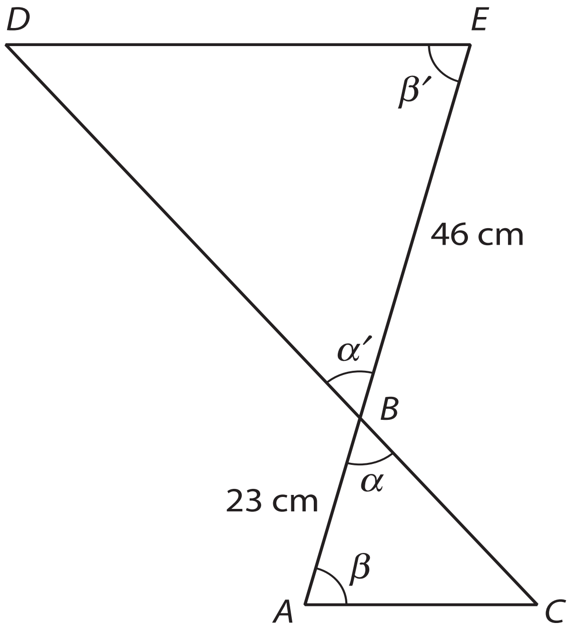
Sivun *AB* vastinsivu suuremmassa suunnikkaassa on sivu *EF,* ja sivun *BC* vastinsivu on *FG*.

Sivut *BC* ja *AD* ovat yhtä pitkiä. Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama. Merkitään sivun *AB* pituutta kirjaimella *x*.

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|EF|} &= \frac{|AD|}{|FG|}\\ \frac{x}{6} &= \frac{10}{16}\\ 16x &= 60 \qquad\qquad\qquad |:16\\ x &= 3,75\text{ cm} \approx 4\text{ cm}\end{aligned}$$

240.

a)



Kulmat α ja α' ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret.

Kulmilla β ja $\beta\,'$ on jana EA vasempana kylkenä, joten kulmat ovat samankohtaisia kulmia. Koska janat AC ja DE ovat yhdensuuntaisia, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\beta = \beta'$.

Kolmioilla ABC ja EBD on siis kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten ne ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

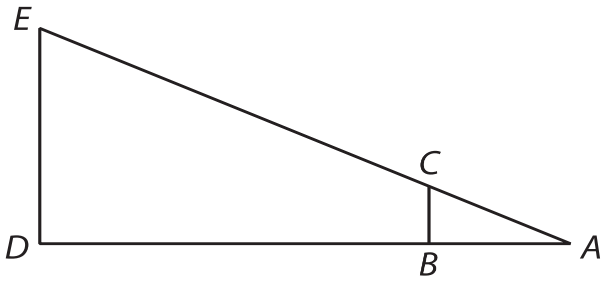
b) Sivun DB vastinsivu on sivu CB.

c) Sivun EB vastinsivu kolmiossa ABC on sivu AB. Sivun x vastinsivu kolmiossa ABC on 22 cm, joten

$$\begin{aligned} \frac{46}{23} &= \frac{x}{22} \\ 23x &= 1012 && \Big|: 23 \\ x &= 44 \text{ cm} \end{aligned}$$

241.

Piirretään mallikuva.



Pekan silmät ovat pisteessä *A*. Keppi Pekan kädessään on jana *BC*, ja puu on jana *DE*.

- Kolmioilla on yhteinen kulma *A*.
- Molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana.

Kk-lauseen nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Jana *BA* on mitaltaan 62 cm, kuten myös jana *BC*. Jana *DA* on mitaltaan 21 m. Merkitään janan *ED* pituutta kirjaimella *x*.

Lasketaan janan *DE* pituus.

$$\frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

$$\frac{0,62}{21} = \frac{0,62}{x}$$

$$0,62x = 21 \cdot 0,62 \qquad |:0,62$$

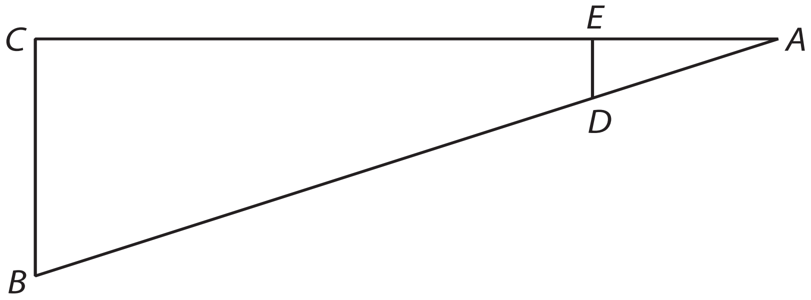
$$x = 21\,\text{m}$$

Koska piste *A* on 1,8 m:n korkeudella maanpinnasta, piste *D* on myös 1,8 m maanpinnasta.

Puun korkeus on 1,8 m + 21 m = 22,8 m.

242.

Piirretään mallikuva.



Auton valot ovat pisteessä A. Piste E on 5 m:n etäisyydellä pisteestä A, ja piste D on 5 cm:n etäisyydellä pisteestä E.

- Kolmioilla on yhteinen kulma A.
- Molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana.

Kk-lauseen nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Janan EA vastinsivu on CA, ja janan ED vastinsivu on CB.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhteet ovat samat. Merkitään janan CA pituutta kirjaimella x ja muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla verranto.

$$\frac{|CA|}{|EA|}=\frac{|CB|}{|EA|}$$

$$\frac{x}{5}=\frac{0,60}{0,05}$$

$$0,05x=3,0 \qquad |:0,05$$

$$x=60 \text{ m}$$

243.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhteet ovat samat. Lasketaan sivujen suhteet.

Kyljen pituuksien suhde on

$$\frac{7}{16{,}8}=0{,}416...$$

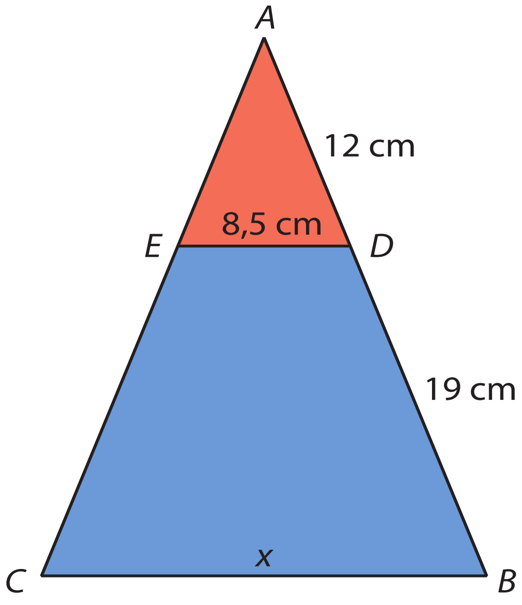
Kantojen pituuksien suhde on

$$\frac{15}{34{,}5}=0{,}434...$$

Koska suhteet ovat erisuuruisia, kolmiot eivät ole yhdenmuotoisia.

244.

Piirretään mallikuva.



Kolmioilla *ABC* ja *ADE* on yhteinen kulma *A*.

Janat *ED* ja *CB* ovat yhdensuuntaiset koska *EDCB* on tasakylkinen puolisuunnikas. Koska janat *AC* ja *DE* ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat *B* ja *D* ovat yhtä suuret.

Kk-lauseen nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhteet ovat samat. Merkitään janan CB pituutta kirjaimella x ja muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla verranto.

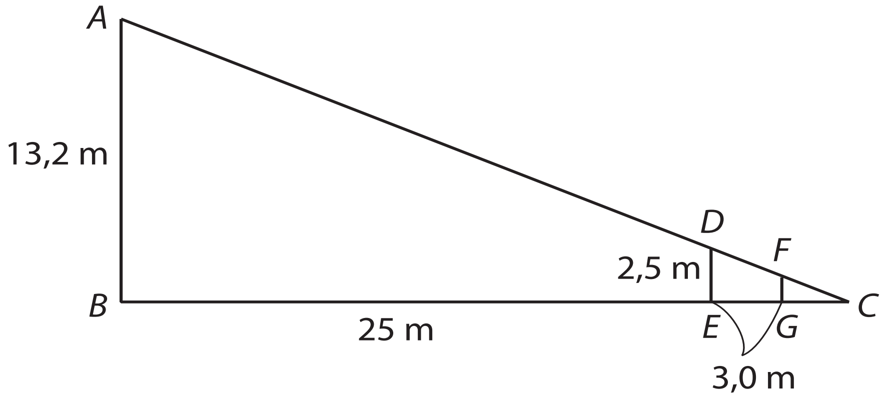
$$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|ED|}{|CB|}$$

$$\frac{12}{(19+12)}=\frac{8,5}{x}$$

$$x=21,958\ldots\text{ cm}\approx 22\text{ cm}$$

245.

Piirretään mallikuva. Tutkitaan, miten pitkä henkilön pitää vähintään olla, jotta Joona juuri ja juuri näkee hänet terassilta. Merkitään henkilön pituutta kirjaimella *x*.



Kolmiot *ABC*, *DEC* ja *FGC* ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla:

- kaikilla kolmioilla on suora kulma vastinkulmana
- kulma *C* on yhteinen.

Henkilön pituus *x* voidaan ratkaista, jos kolmiosta *FGC* tunnetaan jonkin toisen sivun pituus. Merkitään sivun *GC* pituutta kirjaimella *y*. Tällöin

- sivun *EC* pituus on $y + 3,0$
- sivun *BC* pituus on $25,0 + 3,0 + y = 28,0 + y$.

Muodostetaan kolmioiden ABC ja DEC vastinsivujen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä y.

$$\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\frac{13,2}{2,5}=\frac{28,0+y}{3,0+y}$$

$$y=2,841\ldots\ (\text{m})$$

Muodostetaan sitten kolmioiden ABC ja FGC vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{|AB|}{|FG|}=\frac{|BC|}{|GC|}$$

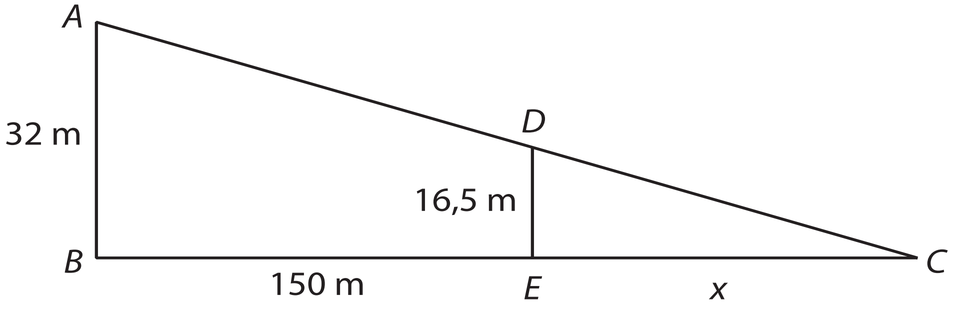
$$\frac{13,2}{x}=\frac{28,0+y}{y}$$

$$x=0,822\ldots\ \text{m}$$

Koska Millan pituus 1,6 m > x, niin Joona näkee Millan.

246.

Piirretään mallikuva. Tutkitaan, kuinka kaukana retkeilijän tulee olla, että hän juuri ja juuri näkee valon. Merkitään retkeilijän ja purjeveneen välistä etäisyyttä kirjaimella x.



Kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla:

- kolmioilla on suora kulma vastinkulmana
- kulma C on yhteinen.

Muodostetaan sitten kolmioiden ABC ja EDC vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan siitä x.

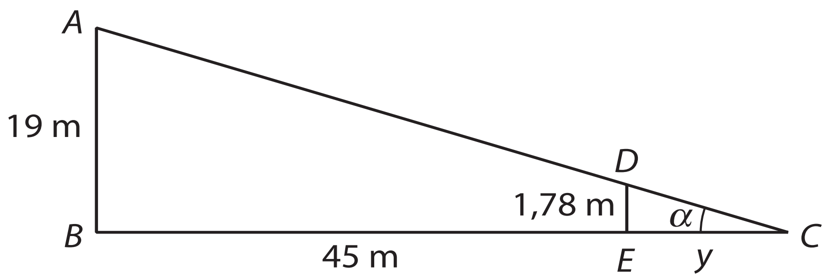
$$\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\frac{32}{16,5}=\frac{150+x}{x}$$

$$x=159,677...\text{ m}\approx 160\text{ m}$$

247.

Piirretään mallikuva.



Kolmiot *ABC* ja *DEC* ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla:

- kolmioilla on suora kulma vastinkulmana
- kulma *C* on yhteinen.

Muodostetaan sitten kolmioiden *ABC* ja *EDC* vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan siitä *y*.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\frac{19}{1,78} = \frac{45+y}{y}$$

$$y = 4,651\ldots \text{ m}$$

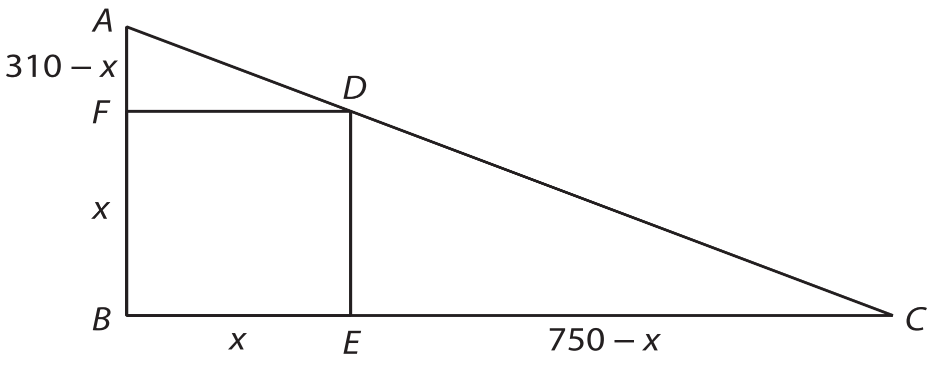
Lasketaan tangentin avulla kulman α suuruus.

$$\tan\alpha = \frac{1,78}{4,651\ldots}$$

$$\alpha = 20,940\ldots^\circ \approx 21^\circ$$

248.

Piirretään mallikuva.



Kolmiot *ABC* ja *DEC* ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla:

- kolmioilla on suora kulma vastinkulmana
- kulma *C* on yhteinen.

Muodostetaan sitten kolmioiden *ABC* ja *EDC* vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\frac{310}{x} = \frac{750}{750 - x}$$

$$x = 219{,}339\ldots \text{ m} \approx 220 \text{ m}$$

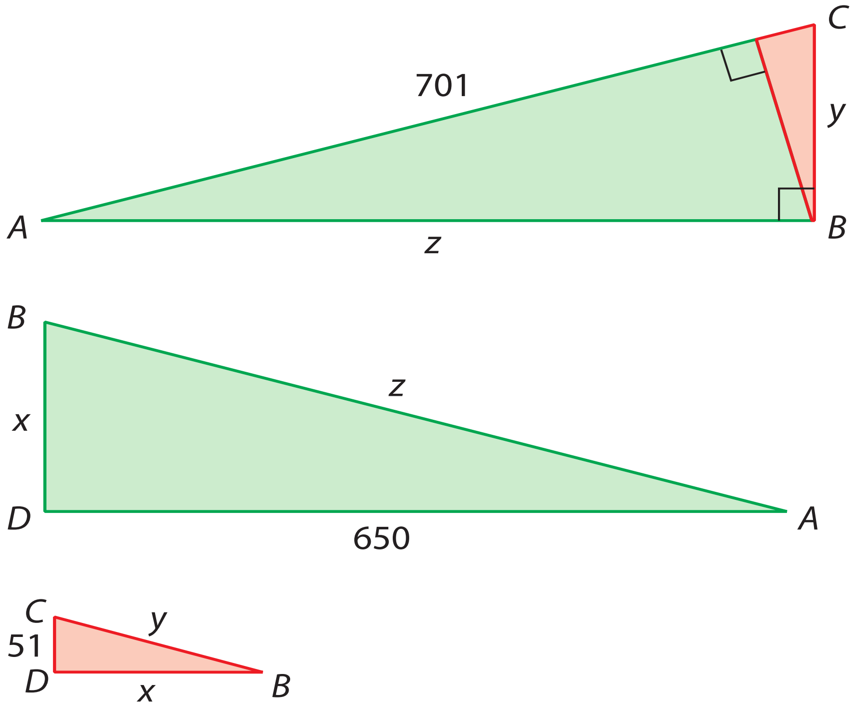
249.

Kaikissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana. Kolmioilla *ABC* ja *ADB* on kulma A yhteinen. Kolmioilla *ABC* ja *BDC* on kulma *C* yhteinen.

Kk-lauseen nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Merkitään janojen pituudet.

$|AC| = 701\text{ m}$, $|AD| = 650\text{ m}$, $|DC| = 51\text{ m}$



Muodostetaan sitten kolmioiden ABC, ABD ja BDC vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö.

$$\begin{aligned}\frac{|CD|}{|BD|}&=\frac{|DB|}{|DA|}\\ \frac{51}{x}&=\frac{x}{650}\\ x&=\pm 182{,}071...\text{ m}\end{aligned}$$

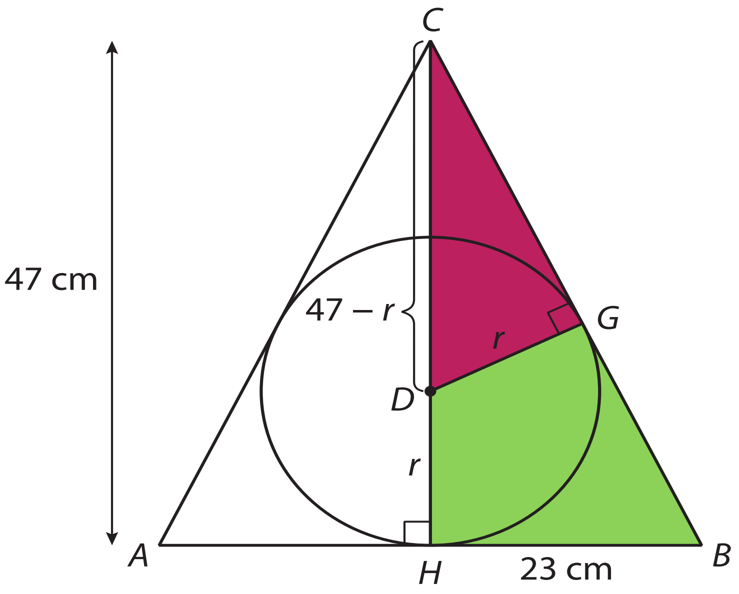
Koska $x > 0$, niin $x = 182{,}071\ldots$ m.

Lasketaan kolmion ADB pinta-ala.

$$A=\frac{182{,}071...\text{ m}\cdot 650\text{ m}}{2}=59\,173{,}209....\text{ m}^2=5{,}917...\text{ ha}\approx 5{,}9\text{ ha}$$

250.

Piirretään poikkileikkauskuva. Pyramidin poikkileikkaus on tasakylkinen kolmio ABC. Pallon poikkileikkaus on ympyrä, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja. Kolmion sivut ovat siis ympyrän tangentteja.



Merkitään pallon sädettä kirjaimella r ja keskipistettä kirjaimella D. Pallon keskipisteen ja kartion huipun välisen janan pituus on $|CD| = 47 - r$ (cm).

Koska kolmion ABC sivujana BC on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot BCH ja CDG ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma C on kolmioille yhteinen.

Merkitään kyljen BC pituutta kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 23^2 + 47^2$$
$$x = \pm\sqrt{2\,738}$$

Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{2\,738}$

Muodostetaan kolmioiden BCH ja CDG vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä r.

$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|BH|}{|DG|}$$
$$\frac{\sqrt{2\,738}}{47 - r} = \frac{23}{r}$$
$$r = 14{,}350\ldots\ \text{cm}$$

Pallon tilavuus on

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi(14{,}350\ldots\ \text{cm})^3 = 12\,380{,}342\ldots\ \text{cm}^3$$

Pyramidin tilavuus on

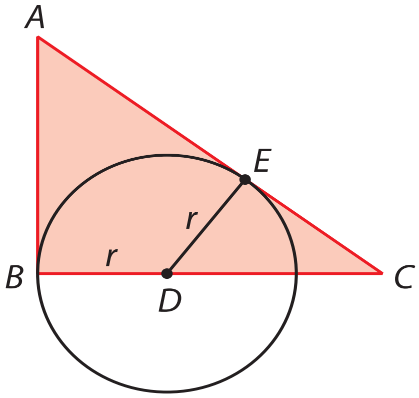
$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{46\ \text{cm} \cdot 46\ \text{cm} \cdot 47\ \text{cm}}{3} = 33\,150{,}666\ldots\ \text{cm}^3$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on pyramidin tilavuudesta.

$$1-\frac{V_{\text{pyramidi}}-V_{\text{pallo}}}{V_{\text{pyramidi}}}=1-\frac{33\,150,666...\ \text{cm}^3-12\,380,342...\ \text{cm}^3}{33\,150,666...\ \text{cm}^3}$$

$$=0,373...\approx 0,37=37\ \%$$

251.



Merkitään pallon keskipistettä kirjaimella D ja sädettä kirjaimella r.

Koska kolmion ABC sivujana AC on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma C on kolmioille yhteinen.

Lasketaan sivu AC Pythagoraan lauseella.

$$|AC|^2 = 3^2 + 4^2$$
$$|AC| = \pm 5$$

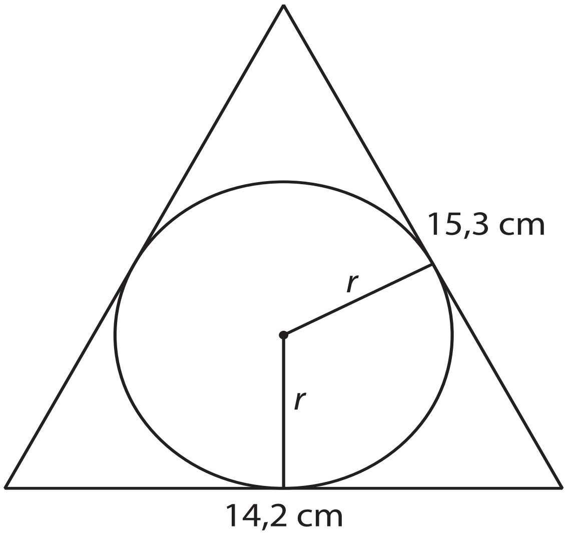
Sivun pituus on positiivinen luku, joten $|AC| = 5$.

Muodostetaan kolmioiden ABC ja DEC vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä r.

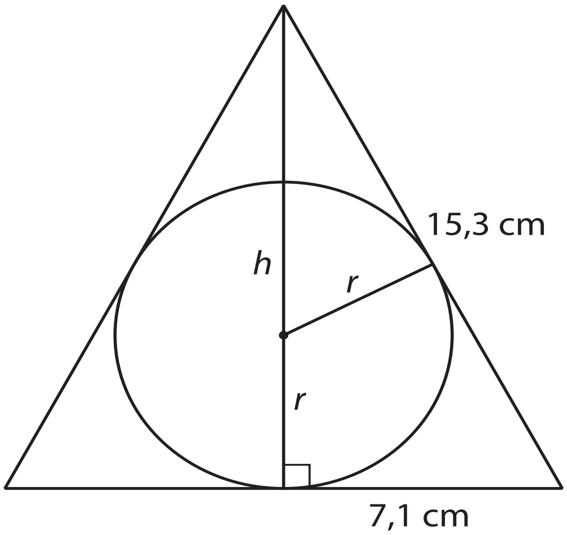
$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|DE|}&=\frac{|AC|}{|DC|}\\ \frac{3}{r}&=\frac{5}{4-r}\\ r&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

252.

a) Pallon poikkileikkauskuva on ympyrä ja ympyräkartion poikkileikkauskuva on tasasivuinen kolmio.


15,3 cm
r
r
14,2 cm

b) Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kantasivun. Suorakulmaisen kolmion toinen kanta on $\frac{14,2\text{ cm}}{2}=7,1\text{ cm}$.

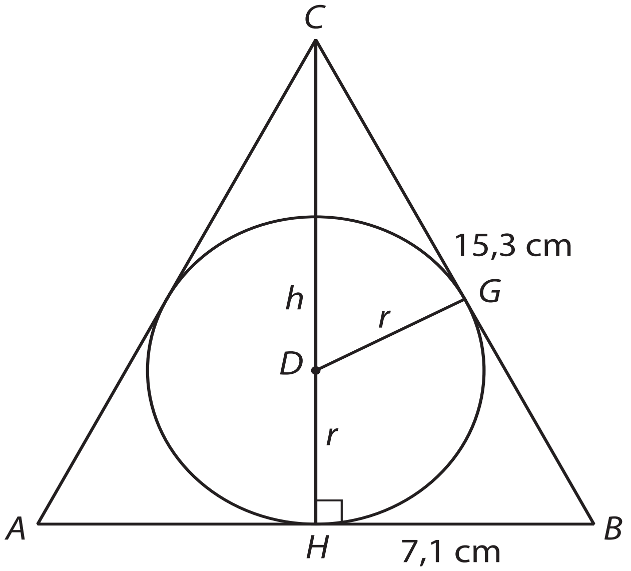


Lasketaan korkeusjanan *h* pituus Pythagoraan lauseella.

$$15,3^2=h^2+7,1^2$$
$$h=\pm 13,552...\text{ cm}\approx \pm 13,6\text{ cm}$$

Koska $h>0$, niin $h = 13{,}6$ cm.

c)



Merkitään pallon sädettä kirjaimella *r* ja keskipistettä kirjaimella *D*. Pallon keskipisteen ja kartion huipun välisen janan pituus on
$\left|CD\right| = 13,552... - r$ (cm).

Koska kolmion *ABC* sivujana *BC* on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot *BCH* ja *CDG* ovat yhdenmuotoiset, koska

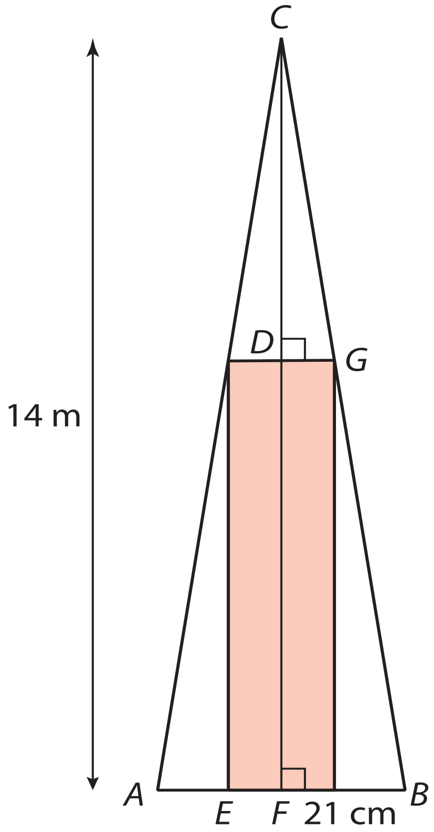
- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma *C* on kolmioille yhteinen.

Muodostetaan kolmioiden BCH ja CDG vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä r.

$$\begin{aligned}\frac{|HB|}{|GD|}&=\frac{|CB|}{|CD|}\\ \frac{7,1}{r}&=\frac{15,3}{13,552...-r}\\ r&=4,295...\text{ cm}\approx 4,30\text{ cm}\end{aligned}$$

253.

Piirretään poikkileikkauskuva.



Ympyrälieriön huipun keskipisteen D ja kartion huipun pisteen C etäisyys on $|CD| = 14\text{ m} - x$.

Poikkileikkauskuvaan kolmiot BFC ja CDG ovat yhdenmuotoiset, koska

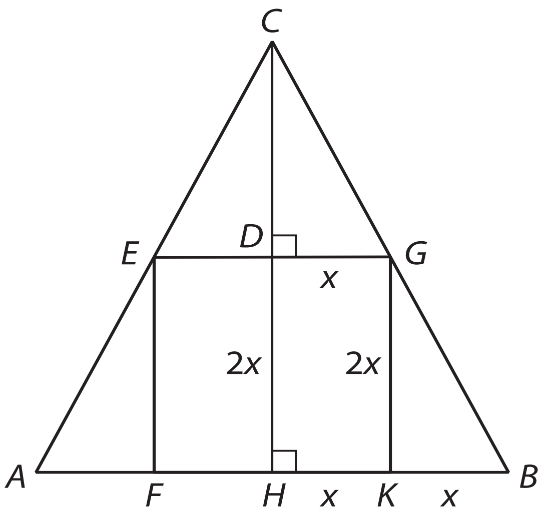
- kolmioilla on yhteinen kulma C
- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana.

Muodostetaan kolmioiden *BCF* ja *CDG* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned}\frac{|CF|}{|CD|} &= \frac{|FB|}{|DG|} \\ \frac{14}{14-x} &= \frac{0,21}{0,09} \\ x &= 8,0 \text{ m}\end{aligned}$$

254.

Piirretään poikkileikkauskuva.



Poikkileikkauskuvaan kolmiot *KBG*, *BHC* ja *CDG* ovat yhdenmuotoiset, koska

- kaikissa kolmiossa on suora kulma vastinkulmana
- kolmioilla *CDG* ja *BHC* on kulma *C* yhteinen
- kolmioilla *KBG* ja *BHC* on kulma *B* yhteinen.

Muodostetaan kolmioiden *KBG* ja *CDG* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä $|CD|$.

$$\frac{|KB|}{|DG|}=\frac{|GK|}{|CD|}$$

$$\frac{x}{x}=\frac{2x}{|CD|}$$

$$|CD|=2x$$

Kartion korkeus on

$$|CH| = |DH| + |CD| = 2x + 2x = 4x$$

Lieriön tilavuus on $V_{\text{lieriö}} = \pi \cdot x^2 \cdot 2x = 2\pi x^3$.

Kartion tilavuus on

$$V_{\text{kartio}} = \frac{\pi \cdot (2x)^2 \cdot 4x}{3} = \frac{16\pi x^3}{3}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kartion tilavuudesta.

$$1 - \frac{V_{\text{kartio}} - V_{\text{lieriö}}}{V_{\text{kartio}}} = 1 - \frac{\frac{16\pi x^3}{3} - 2\pi x^3}{\frac{16\pi x^3}{3}}$$

$$= \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\ \%$$

255.

a) Muodostetaan kolmioiden *ABC* ja *DBE* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä *x*.

$$\frac{|AC|}{|DE|}=\frac{|CB|}{|EB|}$$

$$\frac{x}{16}=\frac{30}{24}$$

$$24x=480 \qquad |:24$$

$$x=20\text{ cm}$$

b) Muodostetaan kolmioiden *BAC* ja *DAE* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä *x*.

$$\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|CB|}$$

$$\frac{x}{x+4,0}=\frac{3,0}{5,0}$$

$$5x=3x+12$$

$$2x=12 \qquad |:2$$

$$x=6,0\text{ m}$$

256.

Kolmiot *BDC* ja *GHC* ovat yhdenmuotoiset, koska

- kolmioilla on yhteinen kulma *C*
- molemmissa kolmioissa on suorakulma vastinkulmana.

Kolmio *ABC* on tasakylkinen kolmio, jonka korkeusjana *BD* puolittaa kantasivun *AC*, joten sivut *AD* ja *CD* ovat yhtä pitkiä.

Lasketaan jana *HC*.

$|HC| = |DC| - |DH| = 3{,}5\text{ m} - 1{,}2\text{ m} = 2{,}3\text{ m}$

Muodostetaan kolmioiden *BDC* ja *GHC* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä *x*.

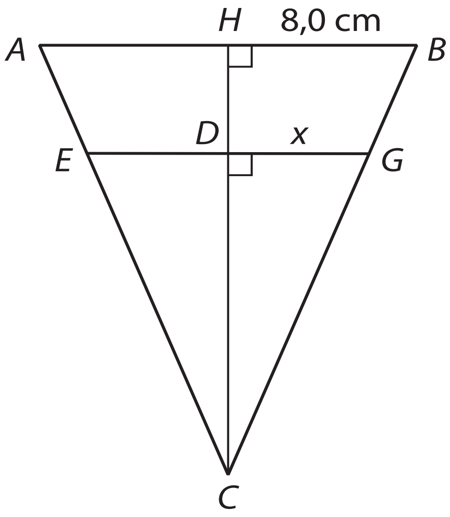
$$\frac{|BD|}{|GH|} = \frac{|DC|}{|HC|}$$

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{3{,}5}{2{,}3}$$

$$x = 2{,}282\ldots\text{ m} \approx 2{,}3\text{ m}$$

257.

Piirretään poikkileikkauskuva. Isomman tötterön pohjaympyrän halkaisija on 16 cm, joten sen säde on 8,0 cm.



Merkitään isomman tötterön korkeutta kirjaimella y, jolloin pienemmän tötterön korkeus on $0,75y$. Merkitään pienemmän kartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella x.

Kolmiot GDC ja BHC ovat yhdenmuotoiset, koska

- kolmioilla on yhteinen kulma C
- molemmissa kolmioissa on suorakulma vastinkulmana.

Muodostetaan kolmioiden GDC ja BHC vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{|HB|}{|DG|}=\frac{|HC|}{|DC|}$$

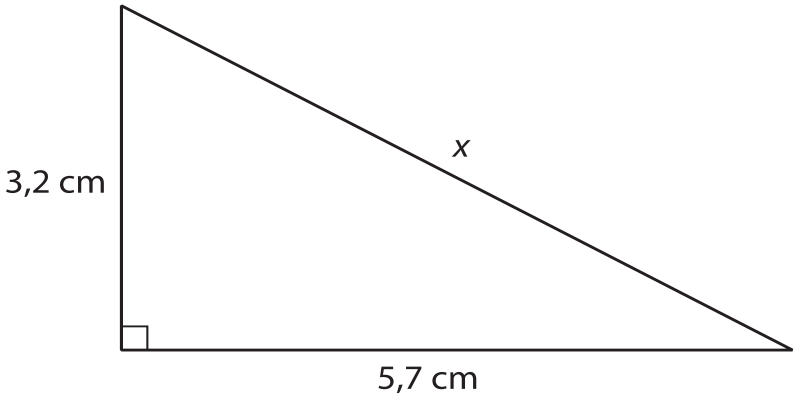
$$\frac{8,0}{x}=\frac{y}{0,75y}$$

$$x=6,0\text{ cm}$$

Pienemmän tötterön halkaisija on $2x=2\cdot 6,0\text{ cm}=12\text{ cm}$.

258.

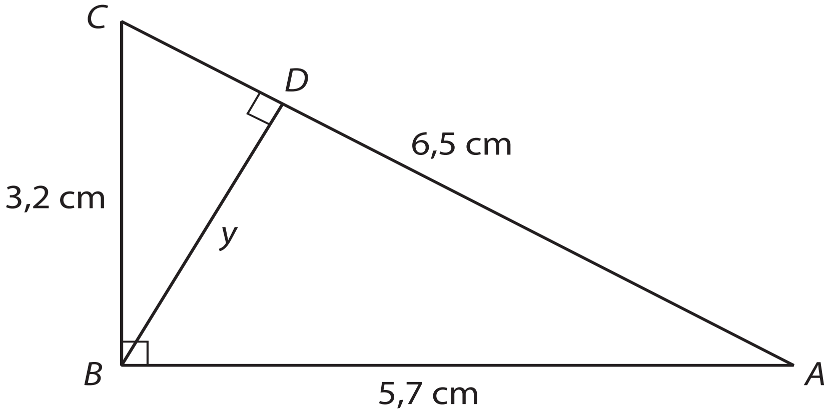
Piirretään mallikuva. Merkitään hypotenuusaa kirjaimella x.



Lasketaan hypotenuusan pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 3,2^2 + 5,7^2$$
$$x = \pm 6,536... \text{ cm} \approx \pm 6,5 \text{ cm}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 6,5$ cm.


C
D
6,5 cm
3,2 cm
y
B
5,7 cm
A

Kolmiot ABC, ADB ja BDC ovat yhdenmuotoisia, koska

- kaikissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kolmioilla ABC ja ADB on kulma A yhteinen
- kolmioilla ABC ja BDC on kulma C yhteinen.

Muodostetaan kolmioiden ABC ja BDC vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä y.

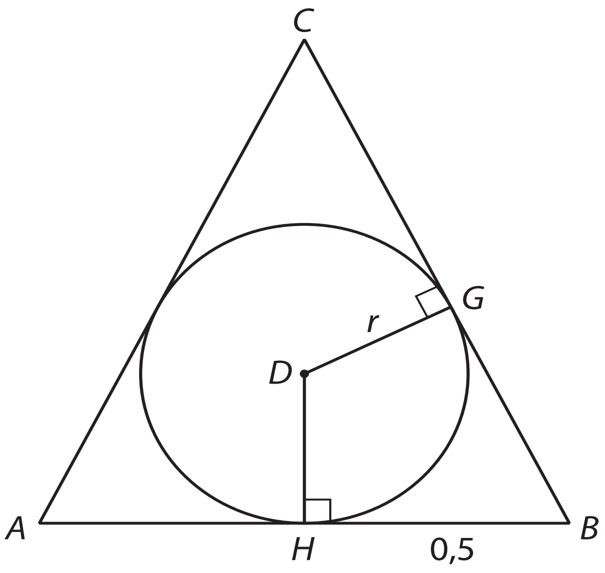
$$\frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|DB|}{|BA|}$$

$$\frac{3,2}{6,5} = \frac{y}{5,7}$$

$$y = 2,806\ldots \text{ cm} \approx 2,8 \text{ cm}$$

259.

Piirretään poikkileikkauskuva.



Merkitään pallon sädettä kirjaimella r ja keskipistettä kirjaimella D. Pallon keskipisteen ja kartion huipun välisen janan pituus on $|CD| = 1 - r$.

Lasketaan janan CB pituus Pythagoraan lauseella.

$$|CB|^2 = 1^2 + 0,5^2$$
$$|CB| = \pm 1,118...$$

Koska sivun pituus on aina positiivinen luku, $|CB| = 1,118...$.

Koska kolmion *ABC* sivujana *BC* on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot *BCH* ja *CDG* ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma *C* on kolmioille yhteinen.

Muodostetaan kolmioiden *BCH* ja *CDG* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä *r*.

$$\frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|HB|}{|GD|}$$

$$\frac{1{,}118...}{1-r} = \frac{0{,}5}{r}$$

$$r = 0{,}309...$$

Pallon tilavuus on $V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}309)^3 = 0{,}123...$

Kartion tilavuus on

$$V_{\text{kartio}} = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 1}{3} = 0{,}261...$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on ympyräkartion tilavuudesta.

$$1 - \frac{V_{\text{kartio}} - V_{\text{pallo}}}{V_{\text{kartio}}} = 1 - \frac{0{,}261... - 0{,}123...}{0{,}261...} = 0{,}471... \approx 0{,}47 = 47\ \%$$

3.2 Yhdenmuotoisuussuhde

260.

a) Koska pituus kartalla yleensä ilmoitetaan senttimetreinä, muutetaan 100 m senttimetreiksi.

100 m = 10 000 cm.

Merkitään todellista pituutta kirjaimella x.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin pituuksien suhde

$$\frac{1}{10\,000} = \frac{3,5}{x}$$

$$x = 3,5 \cdot 10\,000 = 35\,000 \text{ cm} = 350 \text{ m}$$

b) Muutetaan 10,2 mm senttimetreiksi.

10,2 mm = 1,02 cm.

Merkitään todellista pituutta kirjaimella x.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin pituuksien suhde

$$\frac{1}{10\,000} = \frac{1,02}{x}$$

$$x = 1,02 \cdot 10\,000 = 10\,200 \text{ cm} = 102 \text{ m}$$

c) Muutetaan 0,57 m senttimetreiksi.

0,57m = 57 cm.

Merkitään todellista pituutta kirjaimella x.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin pituuksien suhde

$$\frac{1}{10\,000} = \frac{57}{x}$$

$$x = 57 \cdot 10\,000 = 570\,000 \text{ cm} = 5700 \text{ m}$$

261.

a) Merkitään huoneen todellista pituutta kirjaimella x ja leveyttä kirjaimella y. Yhdenmuotoisuuden perusteella vastinosien suhde eli mittakaava on vakio.

Pituus on

$$\frac{5}{x}=\frac{1}{80}$$

$$x=5\cdot 80=400\text{ cm}=4\text{ m}$$

Leveys on

$$\frac{7{,}5}{x}=\frac{1}{80}$$

$$x=7{,}5\cdot 80=600\text{ cm}=6\text{ m}$$

Olohuoneen todelliset mitat ovat 4 m × 6 m.

b) Lasketaan olohuoneen pinta-ala.

$$4\text{ m}\cdot 6\text{ m}=24\text{ m}^2$$

Laatoitus tulee maksamaan

$$24\text{ m}^2\cdot 60\text{ €/m}^2=1440\text{ €}$$

262.

a) Merkitään korun todellisen halkaisijan pituutta kirjaimella x. Yhdenmuotoisuuden perusteella vastinosien suhde eli mittakaava on vakio.

$$\begin{aligned}\frac{10}{x} &= \frac{5}{2} \\ 5x &= 20 \qquad \Big| :5 \\ x &= 4\ \text{cm}\end{aligned}$$

b) Merkitään suurennoksen timantin halkaisijaa kirjaimella x. Yhdenmuotoisuuden perusteella vastinosien suhde eli mittakaava on vakio.

$$\begin{aligned}\frac{x}{3{,}0} &= \frac{5}{2} \\ 2x &= 15 \qquad \Big| :2 \\ x &= 7{,}5\ \text{mm}\end{aligned}$$

263.

a) Muutetaan 250 m senttimetreiksi.

250 m = 25 000 cm.

Mittakaava on

$$\frac{1}{25\,000} = 1 : 25\,000$$

b) Muutetaan 6 km senttimetreiksi.

6 km = 6 000 m = 600 000 cm

Mittakaava on

$$\frac{3}{600\,000} = \frac{1}{200\,000} = 1 : 200\,000$$

c) Muutetaan 750 m senttimetreiksi.

750 m = 75 000 cm

Mittakaava on

$$\frac{2,5}{75\,000} = \frac{1}{30\,000} = 1 : 30\,000$$

264.

a) Isomman pullon korkeus on kaksinkertainen pienempään pulloon verrattuna. Lasketaan pullojen mittakaava.

$$2=\frac{2}{1}$$

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}}=\left(\frac{2}{1}\right)^2=\frac{4}{1}=4$$

Isommassa pullossa on 4-kertainen muovimäärä verrattuna pienempään pulloon.

b) Lasketaan pullojen mittakaava.

$$\frac{24}{8}=\frac{3}{1}=3:1$$

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}}=\left(\frac{3}{1}\right)^2=\frac{9}{1}=9$$

Isommassa pullossa on 9-kertainen muovimäärä verrattuna pienempään pulloon.

265.

a) Kuvio K_2 on suurennos kuviosta K_1.

b) Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Merkitään isomman kuvion pinta-alaa kirjaimella x.

$$\frac{8{,}0}{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{8{,}0}{x} = \frac{4}{9}$$

$$4x = 72 \qquad \big| :4$$

$$x = 18\ \text{cm}^2$$

266.

Merkitään pienoismallin pituutta kirjaimella x.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin pituuksien suhde

$$\frac{x}{66,9} = \frac{1}{250}$$

$$x = 0,2676 \text{ m} \approx 0,268 \text{ m} = 26,8 \text{ cm}$$

Merkitään siipien kärkivälin pituutta kirjaimella y.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin pituuksien suhde

$$\frac{y}{64,8} = \frac{1}{250}$$

$$y = 0,2592 \text{ m} \approx 0,259 \text{ m} = 25,9 \text{ cm}$$

267.

a) Koska pituus kartalla yleensä ilmoitetaan senttimetreinä, muutetaan 1,4 km senttimetreiksi.

1,4 km = 1 400 m = 140 000 cm

Merkitään matkaa kartalla kirjaimella *x*.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin reitin pituuksien suhde.

$$\frac{x}{140\,000} = \frac{1}{20\,000}$$

$$x = 7 \text{ cm}$$

b) Lasketaan mittakaava

$$\frac{5,6}{140\,000} = \frac{1}{25\,000} = 1:25\,000$$

268.

a) Muutetaan 930 km senttimetreiksi.

930 km = 930 000 m = 93 000 000 cm

Lasketaan mittakaava.

$$\frac{31}{93\,000\,000}=\frac{1}{3\,000\,000}=1:3\,000\,000$$

b) Merkitään todellista matkaa kirjaimella x.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin reitin pituuksien suhde.

$$\frac{42}{x}=\frac{1}{3\,000\,000}$$

$$x=126\,000\,000\text{ cm}=1\,260\,000\text{ m}=1\,260\text{ km}$$

269.

Merkitään todellista matkaa kirjaimella x.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin reitin pituuksien suhde.

$$\frac{51}{x} = \frac{1}{200\,000}$$

$$x = 10\,200\,000 \text{ cm} = 102\,000 \text{ m} = 102 \text{ km}$$

Nopeus lasketaan matkan ja nopeuden suhteella.

$$v = \frac{s}{t}$$

Aika lasketaan matkan ja nopeuden suhteella.

$$t = \frac{s}{v}$$

Lasketaan, kuinka paljon matkaan kuluu aikaa.

$$t = \frac{102 \text{ km}}{95 \text{ km / h}} = 1{,}073... \text{ h} = 1 \text{ h } 4{,}421... \text{ min} \approx 1 \text{ h } 4 \text{ min}$$

270.

a) Merkitään Gardajärven todellista alaa kirjaimella x.

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{23{,}125}{x} = \left(\frac{1}{400\,000}\right)^2$$

$$x = 3\,700\,000\,000\,000\ \text{cm}^2 = 370\ \text{km}^2$$

b) Lasketaan mittakaava.

$$\frac{59{,}2}{3\,700\,000\,000} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$x = \pm 250\,000$$

Koska $x > 0$, niin $x = 250\,000$

Mittakaava on 1:250 000.

271.

a) Merkitään rantaviivan pituutta kartalla kirjaimella x.

Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin pituuksien suhde.

$$\frac{x}{312} = \frac{1}{15\,000}$$

$$x = 0{,}0208 \text{ m} = 2{,}08 \text{ cm} \approx 2{,}1 \text{ cm}$$

b) Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Merkitään pinta-alaa kartalla kirjaimella x.

$$\frac{x}{0{,}80} = \left(\frac{1}{15\,000}\right)^2$$

$$x = 0{,}00000000355... \text{ ha} = 0{,}355... \text{cm}^2 \approx 0{,}36 \text{ cm}^2$$

272.

a) Muutetaan 75 m senttimetreiksi.

75 m = 7 500 cm

Lasketaan kartan mittakaava.

$$\frac{2}{7\ 500} = 1 : 3\ 750$$

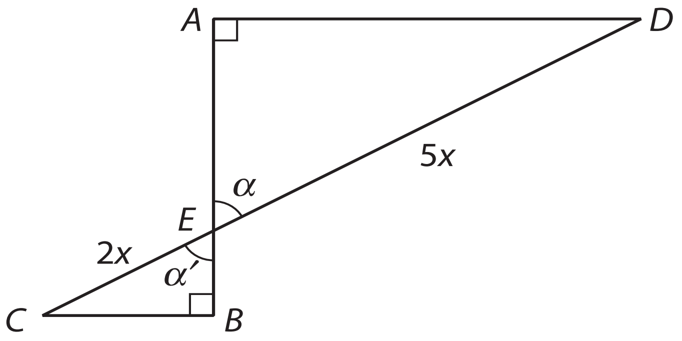
b) Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Merkitään todellista pinta-alaa kirjaimella *x*.

$$\frac{3{,}7}{x} = \left(\frac{1}{3\ 750}\right)^2$$

$$x = 52\ 031\ 250\ \text{cm}^2 = 52{,}031...\ \text{a} \approx 52\ \text{a}$$

273.



Kulmat α ja α' ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret ja molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana. Kolmioilla *ADE* ja *CBE* on siis kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten ne ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

Sivun *DE* vastinsivu on sivu *CE*. Lasketaan kuvioiden mittakaava.

$$\frac{|DE|}{|CE|} = \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} = 5:2$$

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

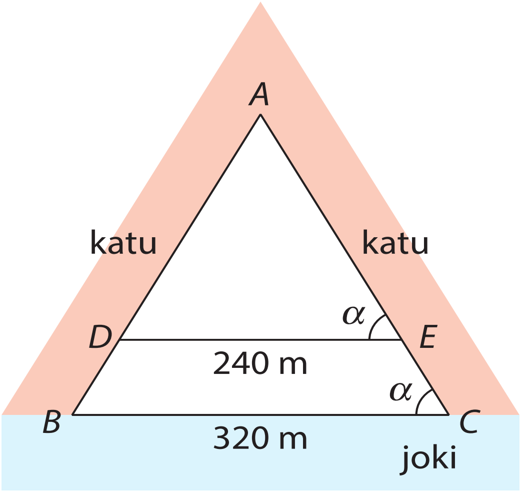
Merkitään isomman kolmion pinta-alaa kirjaimella *x*.

$$\frac{x}{3{,}65} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x = 22{,}8125\ \text{m}^2 \approx 22{,}8\ \text{m}^2$$

274.

Piirretään mallikuva.



Puisto on ylhäältä katsottuna tasakylkisen kolmion muotoinen.

Kolmiot *ABC* ja *ADE* ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmiossa on kulma *A*
- kolmion sivut *DE* ja *BC* ovat yhdensuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat *E* ja *C* ovat yhtä suuret.

Kummastakin kolmiosta tunnetaan niiden kanta, joten muodostetaan näiden avulla mittakaava.

$$k = \frac{240\text{ m}}{320\text{ m}} = \frac{3}{4}$$

Kysytty pinta-ala on kolmion *ABC* ala A_1. Kolmion *ADE* pinta-ala on $A_2 = 260\ \text{m}^2$.

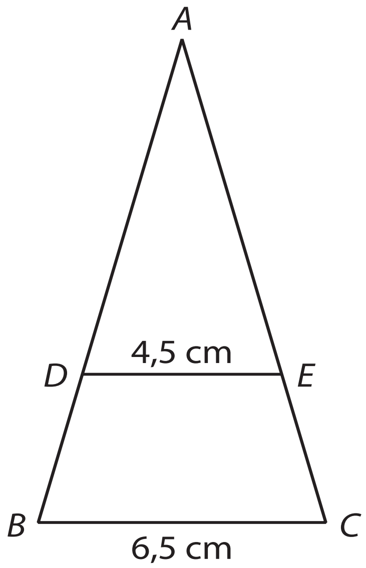
Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan kysytty pinta-ala A_1.

$$\frac{260}{A_1} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$A_1 = 462{,}222...\ \text{m}^2 \approx 460\ \text{m}^2$$

275.

Piirretään mallikuva.



Kolmiot *ABC* ja *ADE* ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmiossa on kulma *A*
- kolmion sivut *DE* ja *BC* ovat yhdensuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat *E* ja *C* ovat yhtä suuret.

Kummastakin kolmiosta tunnetaan niiden kanta, joten muodostetaan näiden avulla mittakaava.

$$k = \frac{4,5\text{ cm}}{6,5\text{ cm}} = \frac{9}{13}$$

Kolmion *ABC* pinta-ala on 39 cm^2. Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan kolmion *ADE* pinta-ala A_1.

$$\frac{39}{A_1} = \left(\frac{13}{9}\right)^2$$

$$A_1 = 18{,}692\ldots \text{ cm}^2$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A_{\text{puolisuunnikas}} = A_{ABC} - A_1 = 39 \text{ cm}^2 - 18{,}692\ldots \text{ cm}^2 = 20{,}307\ldots \text{ cm}^2 \approx 20 \text{ cm}^2$$

276.

A4-kokoisen kartan mittakaava on $k = 1 : 20\,000$.

A4-kokoisella kartalla 1 cm on A5-kokoisella kartalla x cm.

Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{A5}{A4} = \frac{1}{2} = \left(\frac{x}{1}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2}{1}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Koska $x > 0$, joten $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

A5-kokoisen mittakaava on

$$\frac{x}{20\,000} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{20\,000} = \frac{1}{28\,284{,}271...} \approx \frac{1}{28\,300}$$

277.

a) Muutetaan 60 m senttimetreiksi.

60 m = 6 000 cm.

Merkitään koulurakennuksen todellista korkeutta kirjaimella x. Yhdenmuotoisuuden perusteella vastinosien suhde eli mittakaava on vakio.

$$\frac{120}{6000} = \frac{20}{x}$$

$$120x = 20 \cdot 6000$$

$$120x = 120\,000 \qquad \Big| :120$$

$$x = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$$

b) Pienoismallin mittakaava on

$$k = \frac{120\text{ cm}}{6\,000\text{ cm}} = \frac{1}{50}$$

Merkitään katon todellista pinta-alaa kirjaimella x. Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{120}{x} = \left(\frac{1}{50}\right)^2$$

$$\frac{120}{x} = \frac{1}{2500}$$

$$x = 120 \cdot 2500 = 300\,000\text{ dm}^2 = 3000\text{ m}^2$$

Lasketaan, kuinka paljon katon uusiminen maksaa.

$$3000\text{ m}^2 \cdot 50\text{ €/m}^2 = 150\,000\text{ €}$$

278.

a) Kuvan alkuperäinen leveys on 10 cm ja uusi leveys on 12 cm.

Suurennoksen mittakaava on

$$k=\frac{12\text{ cm}}{10\text{ cm}}=\frac{6}{5}=6:5$$

b) Kuvan alkuperäinen pinta-ala on

$$10\text{ cm}\cdot 15\text{ cm}=150\text{ cm}^2$$

Merkataan uutta mittakaavaa $\frac{x}{1}$. Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{600}{150}=\left(\frac{x}{1}\right)^2$$

$$\frac{600}{150}=\frac{x^2}{1}$$

$$150x^2=600 \qquad |:150$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

Koska $x > 0$, niin $x = 2$.

Mittakaava on 2:1.

279.

Pienoismallin 1 mittakaava on 1:500. Merkitään pienoismalli 1 korkeutta kirjaimella x. Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin korkeuksien suhde.

$$\frac{x}{96{,}3}=\frac{1}{500}$$

$$x=0{,}1926\text{ m}\approx 0{,}193\text{ m}=19{,}3\text{ cm}$$

Pienoismallin 2 mittakaava on 2:3. Merkitään pienoismalli 2 korkeutta kirjaimella y. Merkitään mittakaava yhtä suureksi kuin korkeuksien suhde.

$$\frac{y}{0{,}1926}=\frac{2}{3}$$

$$y=0{,}1284\text{ m}\approx 0{,}128\text{ m}=12{,}8\text{ cm}$$

280.

a) Merkitään järven pinta-alaa kartalla kirjaimella x. Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{x}{18\,200} = \left(\frac{1}{5\,000\,000}\right)^2$$

$$x = 0{,}000000000728 \text{ km}^2 = 7{,}28 \text{ cm}^2$$

b) Muutetaan 12 800 km senttimetreiksi.

12 800 km = 12 800 000 m = 1 280 000 000 cm.

Lasketaan karttapallon mittakaava.

$$\frac{30 \text{ cm}}{1\,280\,000\,000 \text{ cm}} = \frac{3}{128\,000\,000}$$

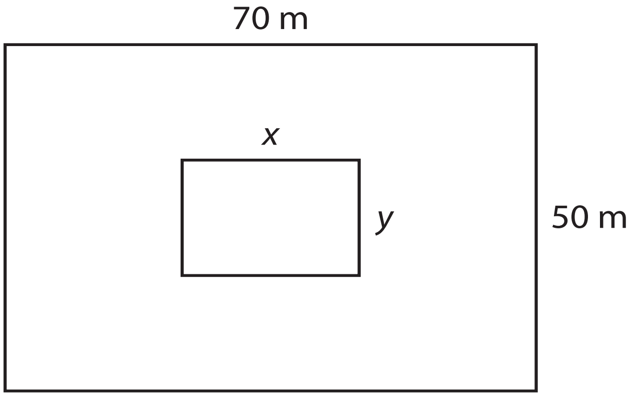
Merkitään järven pinta-alaa kartalla kirjaimella x. Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{x}{18\,200} = \left(\frac{3}{128\,000\,000}\right)^2$$

$$x = 0{,}00000000000999... \text{ km}^2 = 0{,}0999... \text{ cm}^2 \approx 0{,}10 \text{ cm}^2$$

281.

Piirretään mallikuva.



Tontin pinta-ala on

$$A_1 = 70\text{ m} \cdot 50\text{ m} = 3\,500\text{ m}^2$$

Mökin pinta-ala on $A_2 = 65\text{ m}^2$.

Tontin leveys on 70 m, mökin leveys on x m. Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{65}{3\,500} = \left(\frac{x}{70}\right)^2$$

$$\frac{65}{3\,500} = \frac{x^2}{4\,900}$$

$$x = \pm 9{,}539\ldots\text{ m} \approx \pm 9{,}5\text{ m}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 9{,}5$ m.

Tontin pituus on 50 m, mökin leveys on y m. Muodostetaan pinta-alojen suhteen ja mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{65}{3\,500} = \left(\frac{y}{50}\right)^2$$

$$y = \pm 6{,}813\ldots \text{ m} \approx \pm 6{,}8 \text{ m}$$

Koska $y > 0$, niin $y = 6{,}8$ m.

Mökin mitat ovat 9,5 m × 6,8 m.

4 Lisämateriaali

4.1 Yksikönmuunnokset

282.

mm	cm	dm	m	km
570 000	57 000	5700	570	0,57
32 000	3200	320	32	0,032
$6{,}3 \cdot 10^4$	6300	630	63	0,063
2 500 000	250 000	25 000	2500	2,5

283.

a) 4,8 m = 480 cm = 4800 mm

b) $2{,}4 \cdot 10^6$ cm $= 24\ 000$ m $= 24$ km

284.

mm^2	cm^2	dm^2	m^2	a
$5{,}7 \cdot 10^8$	$5{,}7 \cdot 10^6$	57 000	570	5,7
320 000	3 200	32	0,32	0,0032
$6{,}3 \cdot 10^4$	630	6,3	0,063	0,00063
$2{,}5 \cdot 10^8$	$2{,}5 \cdot 10^6$	25 000	250	2,5

285.

a) $0{,}52\ m^2 = 5\ 200\ cm^2 = 520\ 000\ mm^2$

b) $3{,}7\ a = 370\ m^2 = 3\ 700\ 000\ cm^2$

c) $3051\ cm^2 = 30{,}51\ dm^2 = 0{,}3051\ m^2$

d) $9{,}01 \cdot 10^7\ cm^2 = 9010\ m^2 = 90{,}1\ a = 0{,}901\ ha$

286.

mm^3	cm^3	dm^3	m^3	dl
$4{,}2 \cdot 10^9$	$4{,}2 \cdot 10^6$	4 200	4,2	42 000
$8{,}5 \cdot 10^7$	85 000	85	0,085	850
$3{,}7 \cdot 10^9$	$3{,}7 \cdot 10^6$	3700	3,7	37 000
$6{,}4 \cdot 10^6$	6400	6,4	0,0064	64

287.

ml	cl	dl	l	cm^3
6800	680	68	6,8	6800
5600	560	56	5,6	5600
$1{,}3 \cdot 10^4$	1300	130	13	13 000
720	72	7,2	0,72	720

288.

a) 0,81 m^3 = 810 dm^3 = 810 000 cm^3 = $8{,}1 \cdot 10^5$ cm^3

b) 1,05 l = 10,5 dl = 105 cl

c) 905,3 dl = 90,53 l = 90,53 dm^3 = 90 530 cm^3

d) $2{,}8 \cdot 10^3$ cm^3 = 2,8 dm^3 = 2,8 l = 28 dl = 280 cl = 2800 ml

289.

a) 5402 cm = 540,2 dm = 54,02 m = 0,05402 km

b) 0,87 a = 87 m^2 = 8700 dm^2 = $8{,}7 \cdot 10^5$ cm^2

c) 741 ml = 74,1 cl = 7,41 dl = 0,741 l

d) 0,093 dm^3 = 93 cm^3 = 93 000 mm^3

290.

a) $5{,}6 \cdot 10^8$ cm^2 = $5{,}6 \cdot 10^6$ dm^2 = $5{,}6 \cdot 10^4$ m^2

b) $7{,}01 \cdot 10^9$ cm^3 = $7{,}01 \cdot 10^6$ dm^3 = 7010 m^3

c) $3{,}5 \cdot 10^9$ mm^2 = $3{,}5 \cdot 10^7$ cm^2 = $3{,}5 \cdot 10^5$ dm^2 = $3{,}5 \cdot 10^3$ m^2
= 35 a = 0,35 ha

d) $6{,}15 \cdot 10^6$ mm^3 = $6{,}15 \cdot 10^3$ cm^3 = 6,16 dm^3 = 6,16 l = 61,6 dl
= 616 cl = 6 160 ml

291.

a) Muutetaan 5 min sekunneiksi. Suhdeluku on 60.

$$5\ \text{min} \cdot 60\ \frac{\text{s}}{\text{min}} = 300\ \text{s}$$

300 s + 35 s = 335 s

b) Muutetaan 45 s minuuteiksi. Suhdeluku on 1/60.

$$45\ \text{s} \cdot \frac{1}{60\ \frac{\text{s}}{\text{min}}} = 0,75\ \text{min}$$

3 min + 0,75 min = 3,75 min

c) Muutetaan 1,8 min sekunneiksi. Suhdeluku on 60.

$$1,8\ \text{min} \cdot 60\ \frac{\text{s}}{\text{min}} = 108\ \text{s}$$

d) Muutetaan 204 s minuuteiksi. Suhdeluku on 1/60.

$$204\ \text{s} \cdot \frac{1}{60\ \frac{\text{s}}{\text{min}}} = 3,4\ \text{min}$$

292.

a) $$582\ \mathrm{s} \cdot \frac{1}{60\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}} = 9{,}7\ \mathrm{min}$$

b) $$6\ \mathrm{s} \cdot \frac{1}{60\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}} = 0{,}1\ \mathrm{min}$$

7 min + 0,1 min = 7,1 min

c) $$16\ \mathrm{min} \cdot 60\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} = 960\ \mathrm{s}$$

17 s + 960 s = 977 s

d) $$6{,}05\ \mathrm{min} \cdot 60\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} = 363\ \mathrm{s}$$

293.

a) Lasketaan, kuinka monta minuuttia 315 s on.

$$315\text{ s}\cdot\frac{1}{60\,\dfrac{\text{s}}{\text{min}}}=5,25\text{ min}$$

Lasketaan, kuinka monta sekuntia 0,25 min on.

$$0,25\text{ min}\cdot 60\frac{\text{s}}{\text{min}}=15\text{ s}$$

315 s = 5 min 15 s

b) Lasketaan, kuinka monta minuuttia 294 s on.

$$294\text{ s}\cdot\frac{1}{60\,\dfrac{\text{s}}{\text{min}}}=4,9\text{ min}$$

Lasketaan, kuinka monta sekuntia 0,9 min on.

$$0,9\text{ min}\cdot 60\frac{\text{s}}{\text{min}}=54\text{ s}$$

294 s = 4 min 54 s

c) Lasketaan, kuinka monta minuuttia 738 s on.

$$738\,\text{s}\cdot\frac{1}{60\,\frac{\text{s}}{\text{min}}}=12,3\,\text{min}$$

Lasketaan, kuinka monta sekuntia 0,3 min on.

$$0,3\,\text{min}\cdot 60\frac{\text{s}}{\text{min}}=18\,\text{s}$$

738 s = 12 min 18 s

d) Lasketaan, kuinka monta minuuttia 447 s on.

$$447\,\text{s}\cdot\frac{1}{60\,\frac{\text{s}}{\text{min}}}=7,45\,\text{min}$$

Lasketaan, kuinka monta sekuntia 0,45 min on.

$$0,45\,\text{min}\cdot 60\frac{\text{s}}{\text{min}}=27\,\text{s}$$

447 s = 7 min 27 s

4.2 Erilaisia kulmia

294.

a) Kulma α muodostaa 51 asteen kulman kanssa oikokulman.

$$\begin{aligned} \alpha + 51^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 129^\circ \end{aligned}$$

kulma β muodostaa kulman α ja 51°:n kulman kanssa täyden kulman.

$$\begin{aligned} \beta + \alpha + 51^\circ &= 360^\circ \\ \beta &= 360^\circ - 51^\circ - 129^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

b) Kulma α on 38°:n kulman ristikulma. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

$$\alpha = 38^\circ$$

Kulma β on 38°:n kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$\begin{aligned} \beta + 38^\circ &= 180^\circ \\ \beta &= 142^\circ \end{aligned}$$

295.

a) Kulma α on 30°:n kulman ristikulma. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

$\alpha = 30°$

Kulma β on 30°:n ja 70°:n kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$\begin{aligned} \beta + 30° + 70° &= 180° \\ \beta &= 80° \end{aligned}$$

Kulma γ on α kulman vieruskulma.

$$\begin{aligned} \gamma + \alpha &= 180° \\ \gamma &= 180° - 30° = 150° \end{aligned}$$

b) Kulma α on 60°:n kulman ristikulma. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

$\alpha = 60°$

Kulma γ on α kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$\begin{aligned} \gamma + \alpha &= 180° \\ \gamma &= 180° - 60° = 120° \end{aligned}$$

Kulma β on 50°:n ja 60°:n kulman vieruskulma.

$$\begin{aligned} \beta + 50° + 60° &= 180° \\ \beta &= 180° - 50° - 60° = 70° \end{aligned}$$

296.

a) Kulma x on 15°:n ja 33°:n kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$x+15°+33°=180°$$
$$x=180°-15°-33°=132°$$

Kulma x on y kulman vieruskulma.

$$x+y=180°$$
$$y=180°-132°=48°$$

b) Kulma x on 25°:n kulman ristikulma. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

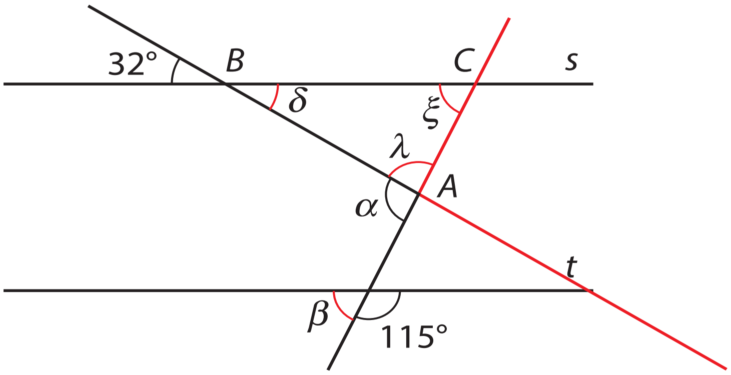
$$x=25°$$

Kulma y on x ja 128°:n kulman vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$y+x+128°=180°$$
$$y=180°-128°-25°$$
$$y=27°$$

297.

Jatketaan kulman α kylkiä ja määritetään kolmion ABC kulmat, jonka jälkeen voidaan laskea kulma α.



Kulma β on kulman 115° vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned}\beta + 115° &= 180°\\ \beta &= 65°\end{aligned}$$

Koska suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset, kulmat β ja ξ ovat samankohtaiset kulmat. Samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten

$$\xi = \beta = 65°$$

Kulman δ ristikulma on kulma 32°. Ristikulmat ovat yhtä suuret, joten

$$\delta = 32°$$

Kulmat δ, ξ ja λ muodostavat kolmion. Kolmion kulmien summa on 180°, joten

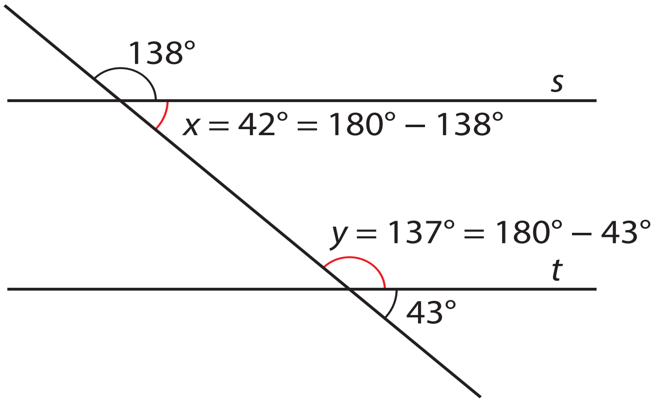
$$\begin{aligned}\delta+\xi+\lambda&=180^\circ\\ \lambda&=180^\circ-32^\circ-65^\circ\\ \lambda&=83^\circ\end{aligned}$$

Kulmat λ ja α ovat vieruskulmat, joten

$$\begin{aligned}\lambda+\alpha&=180^\circ\\ \alpha&=180^\circ-83^\circ\\ \alpha&=97^\circ\end{aligned}$$

298.

a)

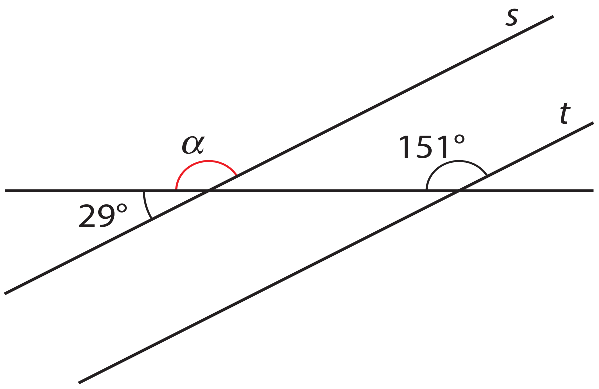


138°
s
x = 42° = 180° − 138°
y = 137° = 180° − 43°
t
43°

Jos suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaiset, kulma *x* on samankohtainen kulman 43° kanssa ja kulma *x* on kulman 138° vieruskulma.

Koska 138° vieruskulma on $42°(\neq 43°)$, niin suorat *s* ja *t* eivät ole yhdensuuntaisia.

b)



Jotta suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaiset, kulman α pitää olla 29°:n kulman vieruskulma ja samankohtainen kulma 151°:n kulman kanssa.

Lasketaan kulman 29° vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$\alpha + 29^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 29^\circ = 151^\circ$$

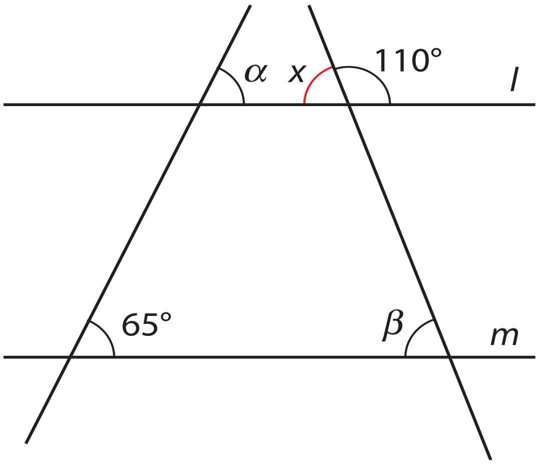
Samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten kulman 151° samankohtainen kulma on

$$\alpha = 151^\circ$$

Suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaiset.

299.

a)



Kulma α on samankohtainen kulma 65°:n kulman kanssa. Samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten

$$\alpha = 65°$$

Kulma x on kulman 110° vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

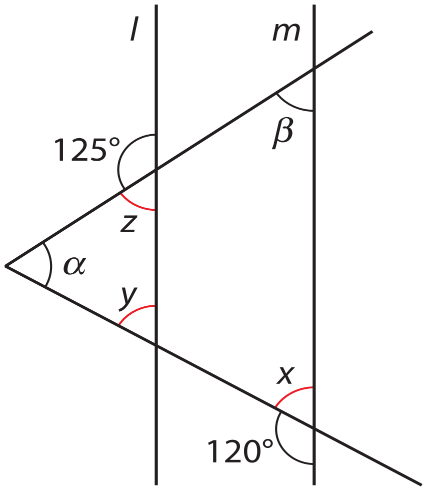
$$x + 110° = 180°$$

$$x = 180° - 110° = 70°$$

Kulma x on samankohtainen kulma β kulman kanssa.

$$\beta = 70°$$

b)



Kulma x on kulman 120° vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$x + 120° = 180°$$
$$x = 180° - 120° = 60°$$

Kulma y on samankohtainen kulma x kulman kanssa. Samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

$$y = x = 60°$$

Kulma z on kulman 125° vieruskulma.

$$z + 125° = 180°$$
$$z = 180° - 125° = 55°$$

Kulma β on samankohtainen kulma z kulman kanssa.

$$\beta = z = 55°$$

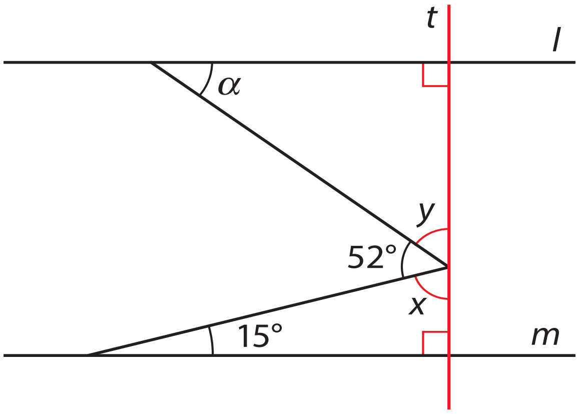
Kulmat z, y ja α muodostavat kolmion. Kolmion kumien summa on 180°.

$$z + y + \alpha = 180°$$

$$\alpha = 180° - 55° - 60° = 65°$$

300.

a) Piirretään suora t, joka kulkee kulman 52°:n kärjen kautta ja joka on ristikkäissuuntainen suorien l ja m kanssa.



Kulmat 15°, 90° ja x muodostavat kolmion. Kolmion kulmien summa on 180°.

$$15° + 90° + x = 180°$$

$$x = 180° - 90° - 15° = 75°$$

Kulmat x, 52° ja y muodostavat oikokulman. Oikokulma on 180°.

$$x + 52° + y = 180°$$

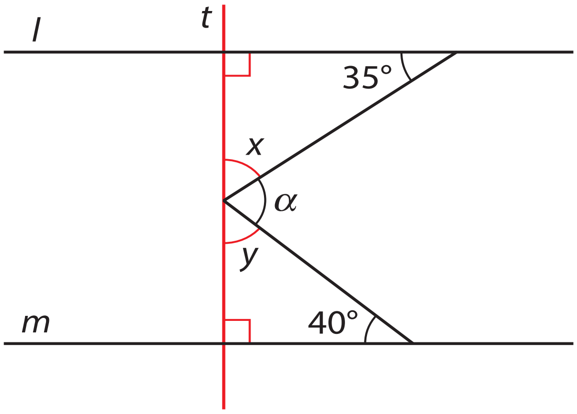
$$y = 180° - 52° - 75° = 53°$$

Kulmat y, 90° ja α muodostavat kolmion.

$$y + 90° + \alpha = 180°$$

$$\alpha = 180° - 90° - 53° = 37°$$

b) Piirretään suora t, joka kulkee kulman α kärjen kautta ja joka on ristikkäissuuntainen suorien l ja m kanssa.



Kulmat 40°, y ja 90° muodostavat kolmion. Kolmion kulmien summa on 180°

$$y + 90° + 40° = 180°$$
$$y = 180° - 90° - 40° = 50°$$

Kulmat 35°, 90° ja x muodostavat kolmion.

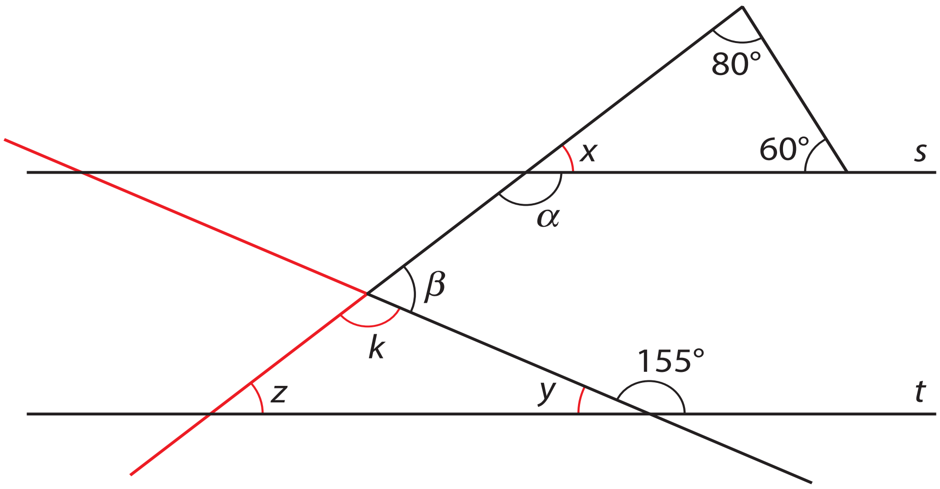
$$35° + 90° + x = 180°$$
$$x = 180° - 90° - 35° = 55°$$

Kulmat x, y ja α muodostavat oikokulman. Oikokulma on 180°.

$$x + y + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 180° - 50° - 55° = 75°$$

301.

Jatketaan kulman β kylkiä ja määritetään tuntemattomat kulmat.



Kulmat 80°, 60° ja x muodostavat kolmion. Kolmion kulmien summa on 180°.

$$80° + 60° + x = 180°$$
$$x = 180° - 80° - 60° = 40°$$

Kulma x on kulman α vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180°.

$$x + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 180° - 40° = 140°$$

Kulma x on samankohtainen kulma kulman z kanssa. Samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

$$z = x = 40°$$

Kulma y on kulman 155° vieruskulma.

$$\begin{aligned} y+155^\circ &= 180^\circ \\ y &= 180^\circ-155^\circ = 25^\circ \end{aligned}$$

Kulmat z, k ja y muodostavat kolmion.

$$\begin{aligned} z+k+y &= 180^\circ \\ k &= 180^\circ-40^\circ-25^\circ = 115^\circ \end{aligned}$$

Kulma k on kulman β vieruskulma.

$$\begin{aligned} k+\beta &= 180^\circ \\ \beta &= 180^\circ-115^\circ = 65^\circ \end{aligned}$$

4.3 Säännölliset monikulmiot

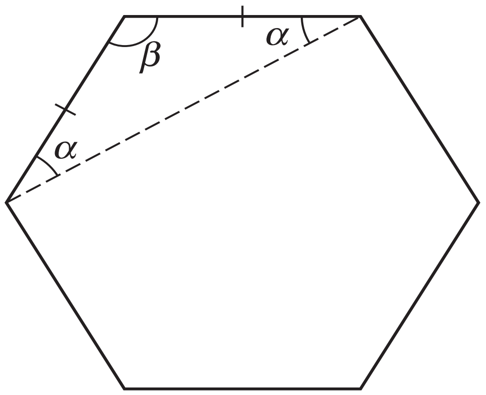
302.

a) $(6-2)\cdot 180° = 4\cdot 180° = 720°$

b) $(8-2)\cdot 180° = 6\cdot 180° = 1\,080°$

303.

a)



6-kulmion kulmien summat on

$$(6-2)\cdot 180° = 720°$$

Kulman β suuruus on

$$\beta = \frac{720°}{6} = 120°$$

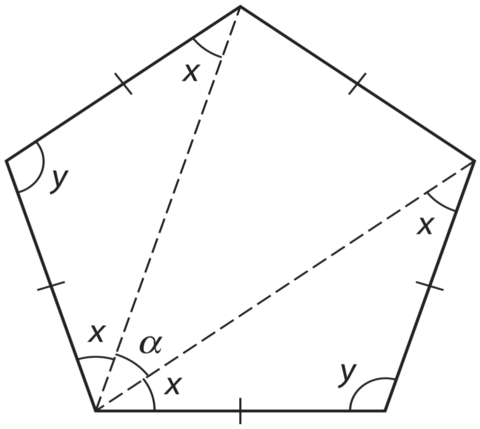
Tasakylkisellä kolmiolla kantakulmat ovat samat, joten kulman α suuruus on

$$\beta + \alpha + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 30°$$

b) Kahdeksan α kulmaa muodostavat täyden kulman, joten kulman α suuruus on

$$8\alpha = 360°$$
$$\alpha = 45°$$

c)



5-kulmion kulmien summa on

$$(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$$

Kulman *y* suuruus on

$$y = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

Tasakylkisellä kolmiolla kantakulmat ovat samat, joten kulman *x* suuruus on

$$\begin{aligned} x + y + x &= 180^\circ \\ x &= 36^\circ \end{aligned}$$

Kulmat *x*, *x* ja α muodostavat 108° kulman, joten kulman α suuruus on

$$\begin{aligned} \alpha + x + x &= 108^\circ \\ \alpha &= 36^\circ \end{aligned}$$

304.

a) 10-kulmion kulmien summa on

$$(10-2)\cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

Säännöllisen monikulmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret. Kulmia on 10, joten yhden kulman suuruus on

$$\alpha = \frac{1\,440^\circ}{10} = 144^\circ.$$

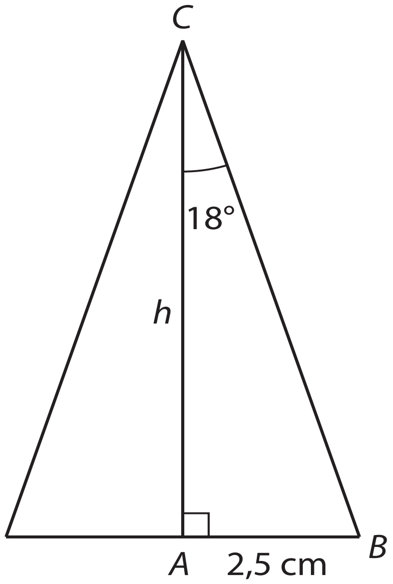
Monikulmion lävistäjät jakavat monikulmion kymmeneksi samanlaiseksi, tasakylkiseksi kolmioksi, joiden huippukulma on

$$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

Kulma β on neljän huippukulman summa.

$$\beta = 36^\circ \cdot 4 = 144^\circ$$

b) Lasketaan yhden tasakylkisen kolmion pinta-ala. Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman 36°.



Suorakulmaisen kolmion *ABC* kannan pituus on 2,5 cm ja huippukulma 18°. Korkeus *h* ratkaistaan tangentin avulla

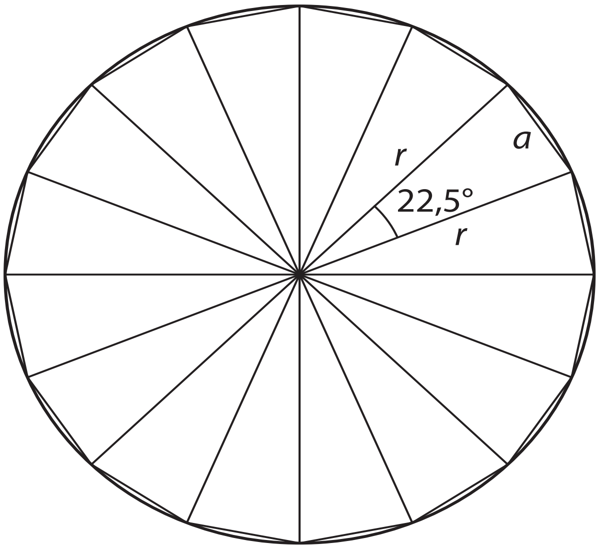
$$\tan 18° = \frac{2,5}{h}$$
$$h = 7,694... \text{ cm}$$

Monikulmion pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= 10 \cdot A_{\text{kolmio}} \\ &= 10 \cdot \frac{5 \text{ cm} \cdot 7,694... \text{ cm}}{2} \\ &= 192,355... \text{ cm}^2 \approx 190 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

305.

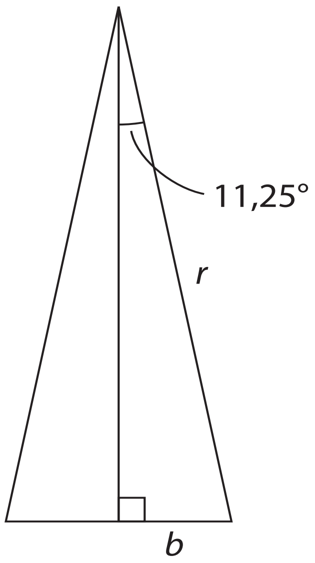
Piirretään mallikuva.



Tasakylkisen kolmion huippukulman suuruus on $\frac{360°}{16} = 22,5°$.

Merkitään monikulmion sivun pituutta kirjaimella a. Monikulmion piiri $p = 16a$.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman. Merkitään kannan puolikasta kirjaimella b.



$$\sin 11,25° = \frac{b}{r}$$

$$b = r\sin 11,25°$$

Tällöin $a = 2b = 2r\sin 11,25°$

Monikulmion piiri:

$$p = 16 \cdot a = 16 \cdot 2r\sin 11,25° = 6,242...r$$

Ympyrän kehän pituus on toisaalta $2\pi r$, joten

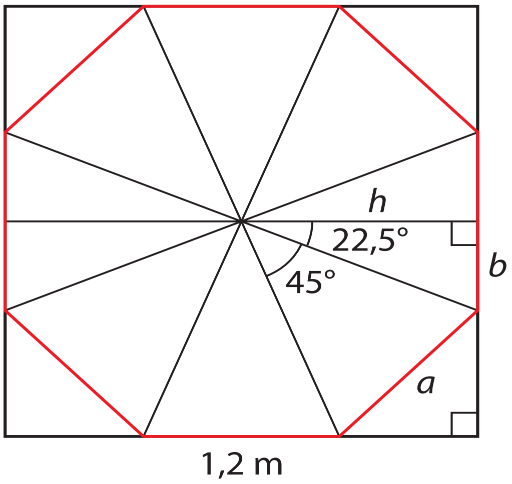
$$2\pi r = 6,242...r$$

$$\pi = 3,121$$

Koska $\pi = 3,14159...$, likiarvossa on kaksi oikeaa numeroa.

306.

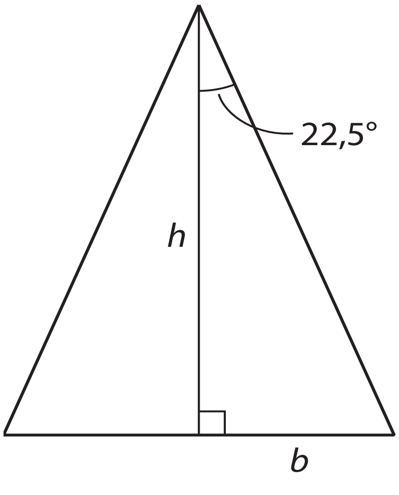
Piirretään mallikuva.



Tasakylkisen kolmion huippukulman suuruus on $\frac{360°}{8} = 45°$.

Merkitään monikulmion sivun pituutta kirjaimella *a*. Monikulmion piiri $p = 8a$.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman. Merkitään kannan puolikasta kirjaimella *b*.



$$2h = 1,2 \text{ m}$$
$$h = 0,6 \text{ m}$$

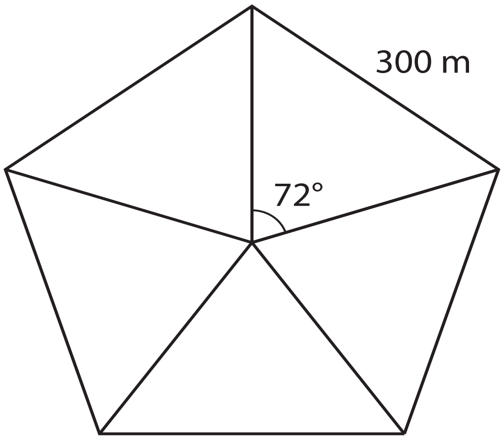
$$\tan 22,5^\circ = \frac{b}{h}$$
$$b = h \tan 22,5^\circ$$

Tällöin

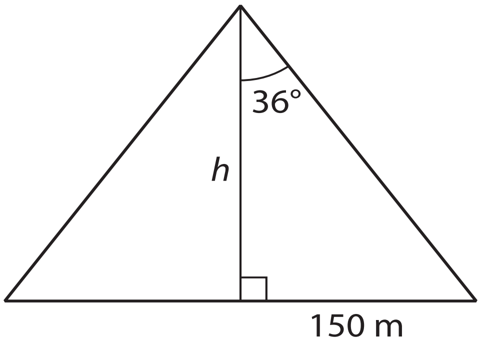
$$\begin{aligned} p &= 8a \\ &= 8 \cdot 2b \\ &= 16h \tan 22,5^\circ \\ &= 16 \cdot 0,6 \text{ m} \cdot \tan 22{,}5^\circ \\ &= 3,976... \text{ m} \approx 4{,}0 \text{ m} \end{aligned}$$

307.

Piirretään mallikuva.



Lasketaan yhden tasakylkisen kolmion pinta-ala. Korkeusjana puolittaa kannan 300 m ja huippukulman 72°.



Suorakulmaisen kolmion kannan pituus on 150 m ja huippukulma on 36°. Ratkaistaan korkeus *h*.

$$\tan 36° = \frac{150}{h}$$

$$h = 206,457... \text{ m}$$

Monikulmion pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
A &= 5 \cdot A_{\text{kolmio}} \\
&= 5 \cdot \frac{300\ \text{m} \cdot 206{,}457\ \text{m}}{2} \\
&= 154\,842{,}966...\ \text{m}^2 = 15{,}484\ \text{ha} \approx 15\ \text{ha}
\end{aligned}
$$

4.4 Maapallo

308.

a) Muutetaan pituuspiirejä kuvaavat kulmat asteiksi.

$$50°\,38' = 50° + \frac{38}{60}° = \frac{3038}{60}° = \frac{1519}{30}° \approx 50{,}63°$$

b) Muutetaan pituuspiirejä kuvaavat kulmat asteiksi.

$$43°\,15' = 43° + \frac{15}{60}° = \frac{2595}{60}° = \frac{173}{4}° \approx 43{,}25°$$

c) Muutetaan pituuspiirejä kuvaavat kulmat asteiksi.

$$75°\,23' = 75° + \frac{23}{60}° = \frac{4523}{60}° \approx 75{,}38°$$

309.

a)

$$\begin{aligned} 15,62^\circ &= 15^\circ + 0,62 \cdot 60' \\ &= 15^\circ + 37,2' \\ &\approx 15^\circ\ 37' \end{aligned}$$

b)

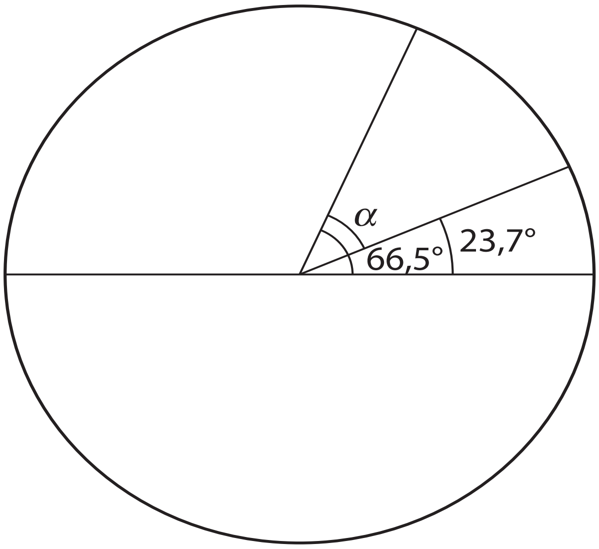
$$\begin{aligned} 35,87^\circ &= 35^\circ + 0,87 \cdot 60' \\ &= 35^\circ + 52,2' \\ &\approx 35^\circ\ 52' \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 26,08^\circ &= 26^\circ + 0,08 \cdot 60' \\ &= 26^\circ + 4,8' \\ &\approx 26^\circ\ 5' \end{aligned}$$

310.

a) Etäisyys Maan pintaan pitkin saadaan laskemalla kaaren pituus, joka rajoittuu pohjoisen napapiirin ja Ateenan väliin. Piirretään tilanteesta mallikuva ja lasketaan kaarta vastaava keskuskulman suuruus.



Kulman α suuruus on

$$\alpha = 66{,}5° - 23{,}7° = 42{,}8°$$

Lasketaan keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus

$$\begin{aligned} b &= \frac{42{,}8°}{360°} \cdot 40\,000 \text{ km} \\ &= 4\,755{,}555\ldots \text{ km} \\ &\approx 4\,760 \text{ km} \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin sen keskuskulman suuruus, joka vastaa Maan pinnalla 1500 kilometrin mittaista kaarta.

$$1\,500 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 40\,000$$
$$\alpha = 13,5^\circ$$

Koska matka kuljetaan suoraan etelään, kysytyn leveyspiirin asteluku saadaan, kun Ateenan asteluvusta vähennetään laskettu asteluku.

$$23,7^\circ - 13,5^\circ = 10,2^\circ \text{ N}$$

311.

Muutetaan kummankin leveyspiirit asteiksi.

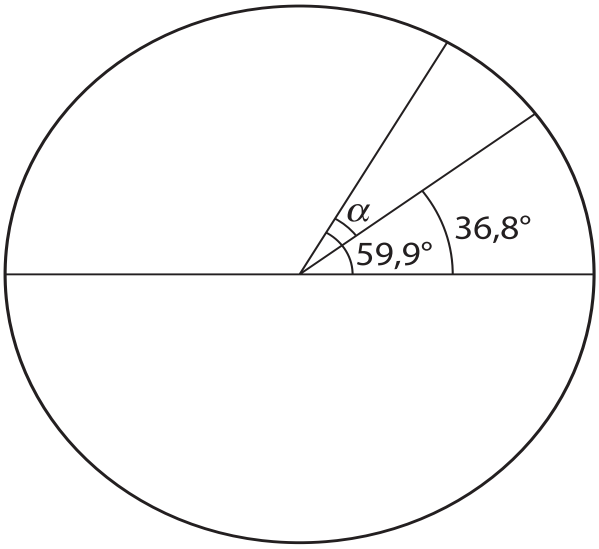
Tunisin leveyspiiri on

$$36^\circ + \left(48' \cdot \frac{1^\circ}{60'}\right) = 36,8^\circ\text{N}$$

Oslon leveyspiiri on

$$59^\circ + \left(54' \cdot \frac{1^\circ}{60'}\right) = 59,9^\circ\text{N}$$

Etäisyys Maan pintaan pitkin saadaan laskemalla kaaren pituus, joka rajoittuu kaupunkien väliin. Piirretään tilanteesta mallikuva ja lasketaan kaarta vastaava keskuskulman suuruus.



Kulman α suuruus on $\alpha = 59,9^\circ - 36,8^\circ = 23,1^\circ$.

Lasketaan keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus

$$\begin{aligned} b &= \frac{23{,}1^\circ}{360^\circ}\cdot 2\cdot \pi \cdot 6380\text{ km} \\ &= 2572{,}231\ldots\text{ km} \\ &\approx 2572\text{ km} \end{aligned}$$

312.

a) Muutetaan kummankin leveyspiirit asteiksi.

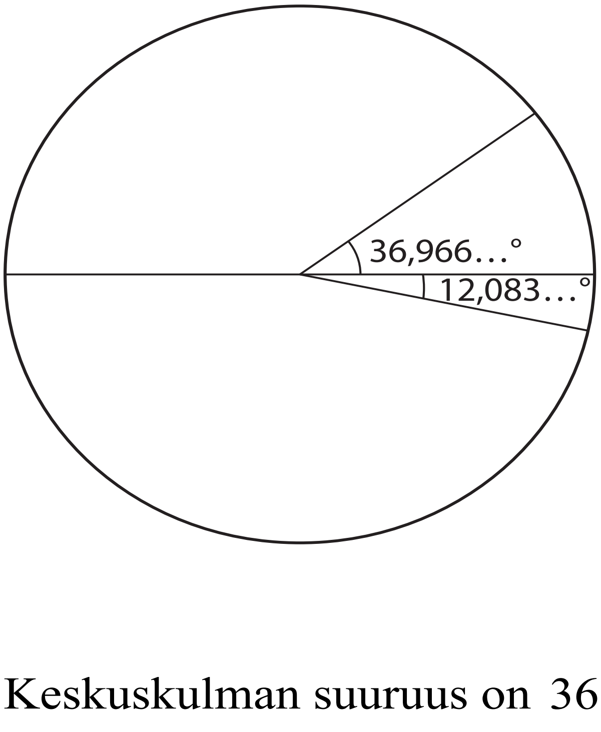
Philadelphian leveyspiiri on

$$39° + \left(58' \cdot \frac{1°}{60'} \right) = 36{,}966...° \text{ N}$$

Huancayon leveyspiiri on

$$12° + \left(5' \cdot \frac{1°}{60'} \right) = 12{,}083...° \text{ N}$$

Etäisyys Maan pintaan pitkin saadaan laskemalla kaaren pituus, joka rajoittuu kaupunkien väliin. Piirretään tilanteesta mallikuva ja lasketaan kaarta vastaava keskuskulman suuruus.



Keskuskulman suuruus on $36{,}966...° + 12{,}083...° = 52{,}05°$

Lasketaan keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus

$$\begin{aligned}b &= \frac{52{,}05°}{360°}\cdot 2\cdot \pi \cdot 6380\ \text{km}\\ &= 5795{,}871...\ \text{km}\\ &\approx 5796\ \text{km}\end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin sen keskuskulman suuruus, joka vastaa Maan pinnalla 2000 kilometrin mittaista kaarta.

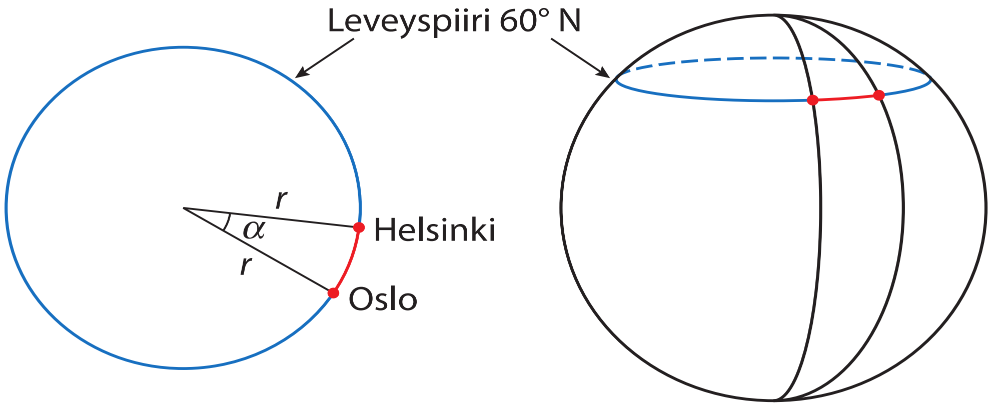
$$\begin{aligned}2\,000 &= \frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi \cdot 6\,380\\ \alpha &= 17{,}961...°\end{aligned}$$

Koska matka kuljetaan suoraan pohjoiseen, kysytyn leveyspiirin asteluku saadaan, kun Huancayon asteluvusta vähennetään laskettu asteluku.

$$\begin{aligned}12{,}083...°\ \text{S} - 17{,}961...°\ \text{N} &= 5{,}877...°\ \text{N}\\ &= 5°\left(0{,}877°...\cdot\frac{60'}{1°}\right)\\ &= 5°\ 52{,}663...' \approx 5°\ 53'\ \text{N}\end{aligned}$$

313.

a) Kysytty etäisyys on leveyspiiriä pitkin kulkevan ympyrän kaaren pituus. Kaaren pituuden laskemiseksi tarvitaan keskuskulma ja leveyspiiriä kuvaavan ympyrän säde. Keskuskulma saadaan pituuspiirien avulla.



Muunnetaan ensin pituuspiirejä kuvaavat kulmat asteiksi.

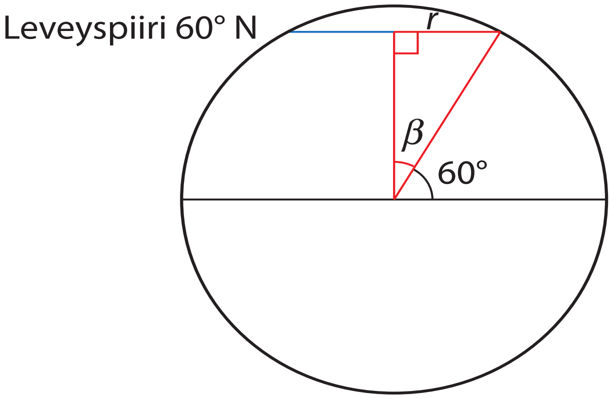
$$10^\circ\,44' = 10^\circ + \left(44' \cdot \frac{1^\circ}{60'}\right) = 10{,}733...^\circ$$

$$24^\circ\,56' = 24^\circ + \left(56' \cdot \frac{1^\circ}{60'}\right) = 24{,}933...^\circ$$

Kaarta vastaava keskuskulma

$$\alpha = 24{,}933...^\circ - 10{,}733...^\circ = 14{,}2^\circ$$

Piirretään Maapallosta uusi poikkileikkauskuva.



$$\beta = 90° - 60° = 30°$$

Leveyspiirin säde *r* saadaan ratkaistua poikkileikkausympyrän sisäpuolelle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 30° = \frac{r}{6\,370}$$

$$r = 3\,185 \text{ km}$$

Lasketaan Helsingin ja Oslon välistä matkaa kuvaavan kaaren pituus.

$$b = \frac{14,2°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 3\,185 \text{ km} = 789,360... \text{ km} \approx 789 \text{ km}$$

b) Matka kuljetaan pitkin samaa leveyspiiriä. Lasketaan kuljettua matkaa vastaavan keskuskulman suuruus.

$$5\,300 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 3\,185$$
$$\alpha = 95,343...°$$

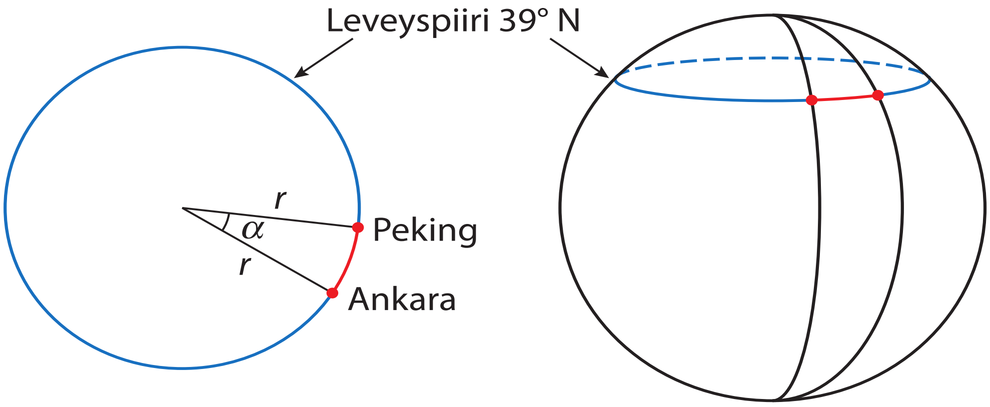
Helsinki sijaitsee nollameridiaanista 24,933…° itään. Koska kuljettua matkaa vastaavan kaaren keskuskulma on suurempi kuin 24,933…°, matkan varrella siirrytään nollameridiaanin länsipuolelle.

Lasketaan pituuspiiriä vastaava keskuskulma ja muunnetaan se asteiksi ja kulmaminuuteiksi.

$$\begin{aligned} 95,343...° - 24,933...° &= 70,409...° \\ &= 70° + 0,409... \cdot 60' \\ &= 70°\ 24,583...' \\ &= 70°\ 25'\ \text{W} \end{aligned}$$

314.

Kysytty etäisyys on leveyspiiriä pitkin kulkevan ympyrän kaaren pituus. Kaaren pituuden laskemiseksi tarvitaan keskuskulma ja leveyspiiriä kuvaavan ympyrän säde. Keskuskulma saadaan pituuspiirien avulla.



Muunnetaan ensin pituuspiirejä kuvaavat kulmat asteiksi.

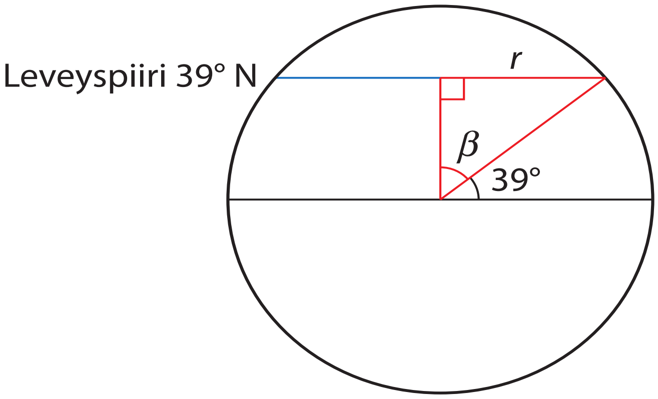
$$116^\circ\,24' = 116^\circ + \left(24' \cdot \frac{1^\circ}{60'}\right) = 116{,}4^\circ$$

$$32^\circ\,44' = 32^\circ + \left(44' \cdot \frac{1^\circ}{60'}\right) = 32{,}733...^\circ$$

Kaarta vastaava keskuskulma

$$\alpha = 116{,}4^\circ - 32{,}733...^\circ = 83{,}666...^\circ$$

Piirretään Maapallosta uusi poikkileikkauskuva.



$$\beta = 90° - 39° = 51°$$

Leveyspiirin säde r saadaan ratkaistua poikkileikkausympyrän sisäpuolelle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 51° = \frac{r}{6\,380}$$

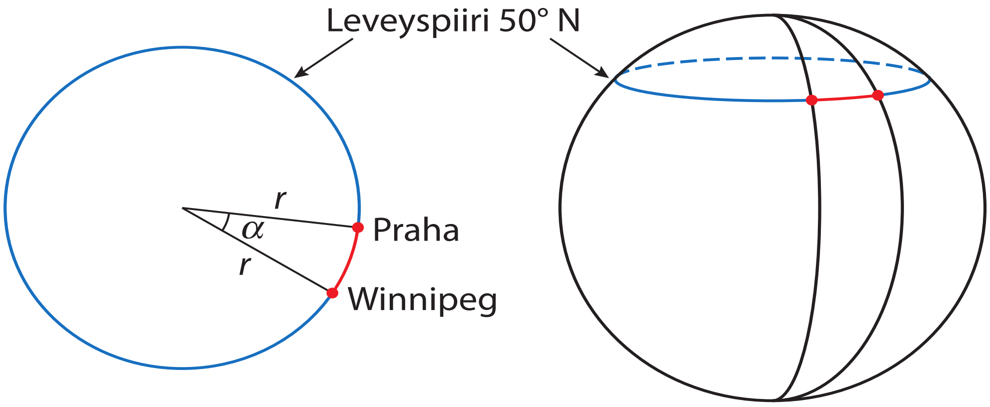
$$r = 4\,958{,}191...\text{ km}$$

Lasketaan Pekingin ja Ankaran välistä matkaa kuvaavan kaaren pituus.

$$b = \frac{83{,}666...°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4\,958{,}191...\text{ km} = 7\,240{,}242...\text{ km} \approx 7\,240\text{ km}$$

315.

a) Kysytty etäisyys on leveyspiiriä pitkin kulkevan ympyrän kaaren pituus. Kaaren pituuden laskemiseksi tarvitaan keskuskulma ja leveyspiiriä kuvaavan ympyrän säde. Keskuskulma saadaan pituuspiirien avulla.



Muunnetaan ensin pituuspiirejä kuvaavat kulmat asteiksi.

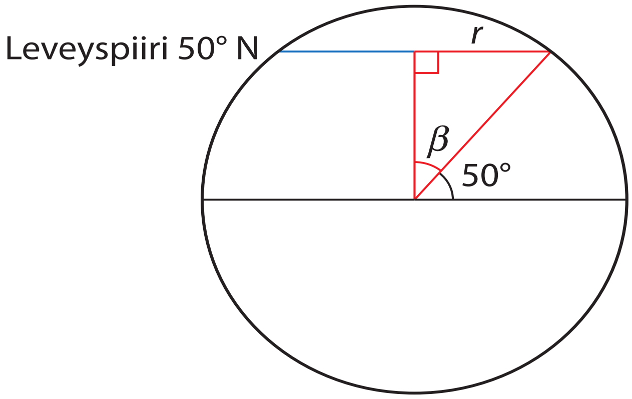
$$14°\,26' = 14° + \left(26' \cdot \frac{1°}{60'}\right) = 14{,}433...°$$

$$97°\,8' = 97° + \left(8' \cdot \frac{1°}{60'}\right) = 97{,}133...°$$

Kaarta vastaava keskuskulma

$$\alpha = 97{,}133° + 14{,}433...° = 111{,}566...°$$

Piirretään Maapallosta uusi poikkileikkauskuva.



$$\beta = 90° - 50° = 40°$$

Leveyspiirin säde r saadaan ratkaistua poikkileikkausympyrän sisäpuolelle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 40° = \frac{r}{6\,380}$$

$$r = 4\,100{,}984... \text{ km}$$

Lasketaan Prahan ja Winnipegin välistä matkaa kuvaavan kaaren pituus.

$$b = \frac{111{,}566...°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4\,100{,}984... \text{ km} = 7\,985{,}461... \text{ km} \approx 7\,985 \text{ km}$$

b) Matka kuljetaan pitkin samaa leveyspiiriä. Lasketaan kuljettua matkaa vastaavan keskuskulman suuruus.

$$\begin{aligned} 12\,000 &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4\,100,984... \\ \alpha &= 167,654...° \end{aligned}$$

Praha sijaitsee nollameridiaanista 14,433…° itään.

$$167,654...° + 14,433...° = 182,088...°$$

Koska keskuskulma on suurempi kuin 180°, on kuljettu 180° meridiaanin länsipuolelle.

Lasketaan pituuspiiriä vastaava keskuskulma ja muunnetaan se asteiksi ja kulmaminuuteiksi.

$$\begin{aligned} 180° - 2,088...° &= 177,911...° \\ &= 177° + 0,911... \cdot 60' \\ &= 177°\ 54,718...' \\ &= 177°\ 55'\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

4.5 Yhdenmuotoiset kappaleet

316.

a) Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{27\ \text{l}}{64\ \text{l}} = k^3$$

$$k = \frac{3}{4} = 3 : 4$$

b) Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{51{,}2\ \text{l}}{100\ \text{l}} = k^3$$

$$k = \frac{4}{5} = 4 : 5$$

c) 125 dm = 12,5 l.

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{34{,}3\ \text{l}}{12{,}5\ \text{l}} = k^3$$

$$k = \frac{7}{5} = 7 : 5$$

317.

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{1{,}0\ \text{l}}{2{,}5\ \text{l}} = k^3$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{2{,}5}}$$

Korkeuksien suhde on mittakaava.

$$\frac{19}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{2{,}5}}$$

$$x = 25{,}786...\ \text{cm} \approx 26\ \text{cm}$$

318.

a) Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_{\text{iso}}}{180} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$V_{\text{iso}} = 426,666\ldots\,\text{l} \approx 427\,\text{l}$$

b) Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{40\,\text{l}}{320\,\text{l}} = k^3$$

$$k = \frac{1}{2} = 1:2$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{320\,\text{l}}}{A_{40\,\text{l}}} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 = 4$$

319.

420 g = 0,42 kg.

Tiheys ρ on massan *m* ja tilavuuden *V* osamäärä eli $\rho = \frac{m}{V}$.

Tilavuus on tällöin $V = \frac{m}{\rho}$

Määritetään karhujen tilavuuksien suhde, kun tiheys on ρ.

$$\frac{V_{\text{poikanen}}}{V_{\text{aikuinen}}} = \frac{\frac{m_{\text{poikanen}}}{\rho}}{\frac{m_{\text{aikuinen}}}{\rho}}$$

$$= \frac{m_{\text{poikanen}}}{m_{\text{aikuinen}}}$$

$$= \frac{0{,}42\text{ kg}}{200\text{ kg}} = \frac{0{,}42}{200}$$

Mittakaava on sama kuin karhujen pituuksien suhde. Merkitään poikasen pituutta kirjaimella *x*. Massojen suhde on mittakaavan kuutio.

$$\left(\frac{x}{250}\right)^3 = \frac{0{,}42}{200}$$

$$x = 32{,}014...\text{ cm} \approx 32\text{ cm}$$

320.

Alkuperäisen veistoksen tilavuus on

$$V_{\text{alkuperäinen}} = 2{,}00\text{ m} \cdot 1{,}00\text{ m} \cdot 3{,}00\text{ m} = 6{,}00\text{ m}^3$$

Pienoismallin tilavuus on

$$V_{\text{pienoismalli}} = \frac{V_{\text{alkuperäinen}}}{100} = \frac{6,00\text{ m}^3}{100} = 0,06\text{ m}^3$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_{\text{pienoismalli}}}{V_{\text{alkuperäinen}}} = k^3$$

$$\frac{0,06\text{ m}^3}{6,00\text{ m}^3} = k^3$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

Merkitään pienoismallin leveyttä kirjaimella x, pituutta kirjaimella y ja korkeutta kirjaimella z.

$$\frac{x}{2,00} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

$$x = 0,430...\text{ m} \approx 0{,}431\text{ m} = 43{,}1\text{ cm}$$

$$\frac{y}{1,00} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

$$y = 0,215\ldots \text{ m} \approx 0{,}215 \text{ m} = 21,5 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{3,00} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

$$z = 0,646\ldots \text{ m} \approx 0{,}646 \text{ m} = 64,6 \text{ cm}$$

321.

Mittakaava on $1:2=\frac{1}{2}$.

Merkitään uutta tilavuutta kirjaimella x. Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{x}{1,75}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x=0,2187\text{ dl}\approx 0,219\text{ dl}$$

322.

Olkoon ilmapallon alkuperäinen halkaisija mitaltaan x, tällöin kutistuneen ilmapallon halkaisija 0,909x.

Mittakaava on $\frac{0,909x}{x}=\frac{0,909}{1}$.

Merkitään ilmapallon alkuperäistä tilavuutta kirjaimella z ja kutistuneen ilmapallon tilavuutta kirjaimella y. Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{y}{z}=\left(\frac{0,909}{1}\right)^3$$

$$y=0,751...z$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia ilmapallon tilavuus supistui.

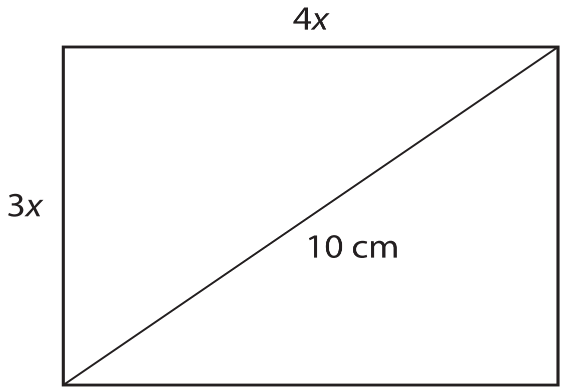
$$\frac{V_{\text{alkuperäinen}}-V_{\text{kutistunut}}}{V_{\text{alkuperäinen}}}=\frac{z-0,751...z}{z}=0,248...\approx 0,25=25\ \%$$

5 Kertaus: Geometria

5.1 Kurssin keskeiset asiat

1.

a) Merkitään suorakulmion sivuja $3x$ ja $4x$. Piirretään mallikuva.



Muodostetaan Pythagoraan lause ja ratkaistaan sen avulla x.

$$\begin{aligned}(3x)^2+(4x)^2&=10^2\\ 9x^2+16x^2&=100\\ 25x^2&=100 \quad &|:25\\ x^2&=4\\ x&=\pm\sqrt{4}\\ x&=\pm 2\text{ cm}\end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 2$ cm.

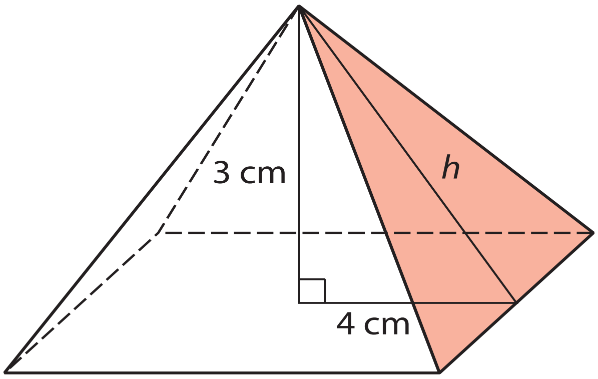
Suorakulmion sivujen pituudet ovat

- $3x = 3 \cdot 2\ \text{cm} = 6\ \text{cm}$
- $4x = 4 \cdot 2\ \text{cm} = 8\ \text{cm}$

b) $V = \dfrac{6\ \text{cm} \cdot 8\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm}}{3} = 64\ \text{cm}^3$

2.

a) Piirretään mallikuva.



Pyramidin pohjasivun pituus on 8 cm, joten muodostuneen suorakulmaisen kolmion kanta on 4 cm pitkä.

Lasketaan sivutahkon korkeus Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 = 4^2 + 3^2$$
$$h^2 = 16 + 9$$
$$h^2 = 25$$
$$h = \pm\sqrt{25}$$
$$h = \pm 5 \text{ cm}$$

Koska $h > 0$, niin $h = 5$ cm.

b) $A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot \dfrac{8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}}{2} = 80 \text{ cm}^2$

3.

a) Kolmioilla *ABC* ja *ADC* on yhteinen kulma C. Kolmiolla on suora kulma vastinkulmana. Kk-lauseen nojalla kolmiot *ABC* ja *ADC* ovat yhdenmuotoiset.

b) Merkitään janan CD pituutta kirjaimella x. Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama.

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{x} = \frac{4+x}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = x\cdot(4+x)$$

$$5 = 4x + x^2$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

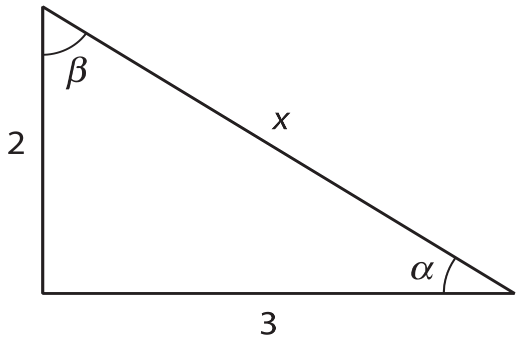
$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-4-6}{2} = -5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4+6}{2} = 1$$

Koska $x > 0$, niin $x = 1$.

4.

a) Piirretään mallikuva.



Lasketaan hypotenuusan arvo Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 2^2 + 3^2$$
$$x^2 = 4 + 9$$
$$x^2 = 13$$
$$x = \pm\sqrt{13}$$

Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{13}$.

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ ja } \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

b) $$\begin{aligned}(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2\\ &= \frac{4}{13}+\frac{9}{13}\\ &= \frac{13}{13}\\ &= 1\end{aligned}$$

c) $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\tan\beta = \frac{3}{2}$

d) Merkitään kolmion kateetteja $2x$ ja $3x$. $2x$ on lyhyempi kateetti, koska $x > 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned}2x &= 4\text{ cm} \qquad \mid :2\\ x &= 2\text{ cm}\end{aligned}$$

Lasketaan pidemmän kateetin pituus.

$3x = 3\cdot 2\text{ cm} = 6\text{ cm}$

e) $A = \frac{4\text{ cm}\cdot 6\text{ cm}}{2} = \frac{24\text{ cm}^2}{2} = 12\text{ cm}^2$

5.

Koska suora *AC* on ympyrän tangentti, kolmio *OAC* on suorakulmainen kolmio. Lasketaan kulman α suuruus.

$$\begin{aligned} 33° + 90° + \alpha &= 180° \\ \alpha &= 57° \end{aligned}$$

Kaari *AB* on puolet kaaresta *AD*, joten kaaren *AB* keskuskulma on puolet kaaren *AB* keskuskulmasta. Merkitään kaaren *AB* keskuskulmaa kirjaimella γ ja lasketaan se.

$$\gamma = 2\alpha = 2 \cdot 57° = 114°$$

Kulma γ muodostaa kulman β kanssa täyden kulman, joten

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= 360° \\ \beta &= 360° - 114° \\ \beta &= 246° \end{aligned}$$

6.

a) Kolmioitten mittakaava on $k = 1:2 = \frac{1}{2}$.

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{EFC}}{A_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

b) Pituuksien suhde on mittakaava. Merkitään janan *EF* pituutta kirjaimella x.

$$\frac{|EF|}{|AB|} = \frac{x}{8} = \frac{1}{2}$$

$$2x = 8 \qquad |:2$$

$$x = 4 \text{ cm}$$

7.

a) $\sin\alpha = \dfrac{h}{b} \qquad \Big|\cdot b$

$$h = b\cdot\sin\alpha$$

b) $A = \dfrac{a\cdot h}{2} = \dfrac{a\cdot(b\cdot\sin\alpha)}{2} = \dfrac{ab\sin\alpha}{2}$

8.

Merkitään lyhyempää kateettia kirjaimella x. Tällöin hypotenuusa on $3x$. Lasketaan Pythagoraan lauseen avulla x.

$$\begin{aligned}
(3x)^2 &= x^2 + (4\sqrt{2})^2 \\
9x^2 &= x^2 + 16 \cdot 2 \\
8x^2 &= 32 && \big| :8 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm\sqrt{4} \\
x &= \pm 2
\end{aligned}$$

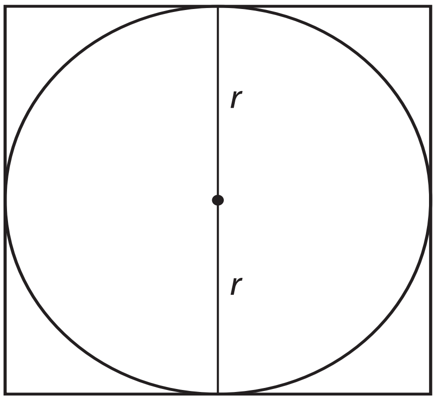
Koska $x > 0$, niin $x = 2$.

Lasketaan kysytyt sivujen pituudet.

- lyhyempi kateetti $x = 2$
- hypotenuusa $3x = 3 \cdot 2 = 6$

9.

a) Piirretään mallikuva.



Lasketaan ympyrän kehän pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$16\pi = 2\pi r \quad \Big| : 2\pi$$

$$r = \frac{16\pi}{2\pi}$$

$$r = 8$$

Neliön sivun pituus on $2r = 2 \cdot 8 = 16$

Neliön piiri on $4 \cdot 16 = 64$.

Määritetään ympyrän kehän pituuden ja neliön piirin suhde.

$$\frac{16\pi}{64} = \frac{\pi}{4}$$

b) Ympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot 8^2 = 64\pi$$

Neliön pinta-ala on

$$A_{\text{neliö}} = 16 \cdot 16 = 256$$

Määritetään ympyrän ja neliön pinta-alojen suhde.

$$\frac{64\pi}{256} = \frac{\pi}{4}$$

c) Ympyrän halkaisija on

$$2r = 2 \cdot 8 = 16$$

Neliön halkaisija voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla. Merkitään neliön halkaisijaa kirjaimella x.

$$x^2 = 16^2 + 16^2$$

$$x^2 = 512$$

$$x = \pm\sqrt{512} = \pm\sqrt{256 \cdot 2} = \pm 16\sqrt{2}$$

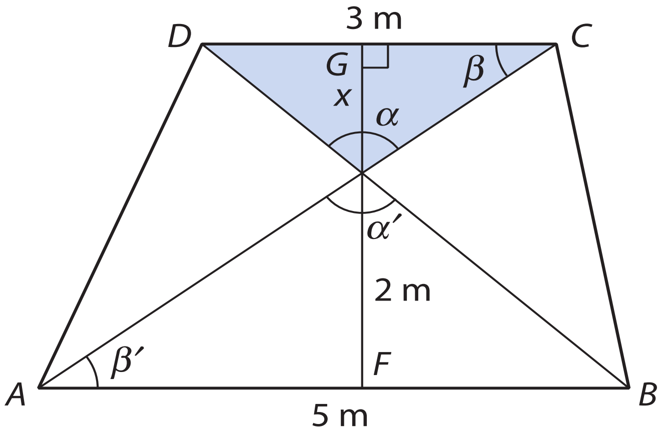
Koska $x > 0$, niin $x = 16\sqrt{2}$.

Määritetään ympyrän halkaisijan ja neliön lävistäjä suhde.

$$\frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

10.

a)



Merkitään sinisen kolmion korkeutta kirjaimella x.

Kulmat α ja α' ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret.

Kulmilla β ja β' on jana AC vasempana kylkenä, joten kulmat ovat samankohtaisia kulmia. Koska janat CD ja AB ovat yhdensuuntaisia, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\beta = \beta'$. Kolmioilla ABE ja CDE on siis kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten ne ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhteet ovat samat.

$$\frac{|AB|}{|DC|}=\frac{|FE|}{|GE|}$$

$$\frac{5}{3}=\frac{2}{x}$$

$$5x=6 \qquad \Big| :5$$

$$x=\frac{6}{5}=1,2\text{ m}$$

b) $$A=\frac{5\text{ m}+3\text{ m}}{2}\cdot\left(2\text{ m}+\frac{6}{5}\text{ m}\right)$$

$$=\frac{8\text{ m}}{2}\cdot\frac{16\text{ m}}{5}$$

$$=\frac{128\text{ m}^2}{10}$$

$$=12\frac{4}{5}\text{m}^2=12,8\text{ m}^2$$

c) Sinisen kolmion pinta-ala on

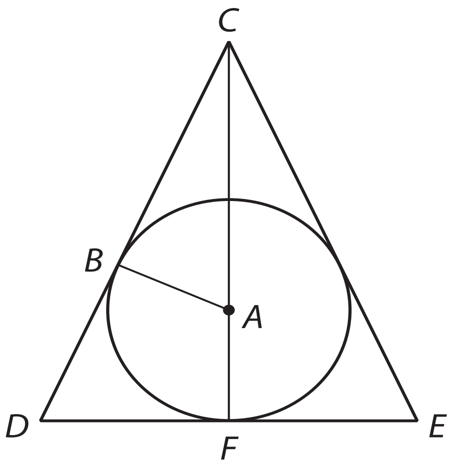
$$A_{\text{kolmio}}=\frac{3\text{ m}\cdot\frac{6\text{ m}}{5}}{2}=\frac{\frac{18\text{ m}^2}{5}}{2}=\frac{18\text{ m}^2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{18}{10}\text{ m}^2=1\frac{4}{5}\text{m}^2$$

Sinisen kolmion ja sinisen kolmion suhde on

$$\frac{\frac{18}{10}}{\frac{128}{10}}=\frac{18}{10}\cdot\frac{10}{128}=\frac{{}^{(2}18}{128}=\frac{9}{64}$$

11.

a)



Merkitään pallon sädettä kirjaimella r ja keskipistettä kirjaimella D.

Koska kolmion CDE sivujana DC on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot DFC ja ABC ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma C on kolmioille yhteinen.

Jana DF on puolet janan DE pituudesta. $|DF| = \frac{|DE|}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Lasketaan janan FC pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}|FC|^2+|DF|^2&=|DC|^2\\|FC|^2&=5^2-4^2\\|FC|^2&=25-16\\|FC|^2&=9\\|FC|&=\pm 3\end{aligned}$$

Koska $|FC|>0$, niin $|FC|=3$.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhteet ovat samat.

$$\frac{|DC|}{|AC|}=\frac{|DF|}{|AB|}$$

$$\frac{5}{3-r}=\frac{4}{r}$$

$$\begin{aligned}5r&=12-4r\\9r&=12 \qquad |:9\\r&=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

b) Lasketaan sivun *BC* pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
|BC|^2+|AB|^2&=|AC|^2\\
|BC|^2&=\left(3-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\\
|BC|^2&=\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\\
|BC|^2&=\frac{25}{9}-\frac{16}{9}\\
|BC|^2&=1\\
|BC|&=\pm 1
\end{aligned}
$$

Koska $|BC|>0$, niin $|BC|=1$.

$$A_{BAC}=\frac{1\cdot\frac{4}{3}}{2}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

12.

a) Kuution särmä puolittuu, joten uuden kuution särmän pituus on $\frac{a}{2}$.

Pituuksien suhde on mittakaava.

$$k=\frac{\frac{a}{2}}{a}$$

$$k=\frac{1}{2}$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Alkuperäinen tilavuus on a^3 ja merkitään uutta tilavuutta kirjaimella x.

$$\frac{x}{a^3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{x}{a^3}=\frac{1}{8}$$

$$8x=a^3 \qquad |:8$$

$$x=\frac{a^3}{8}$$

Tilavuus pienenee

$$a^3-\frac{a^3}{8}=\frac{7}{8}a^3$$

b) Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Alkuperäinen pinta-ala on $6a^2$ ja merkitään uutta pinta-alaa kirjaimella x.

$$\frac{x}{6a^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{x}{6a^2}=\frac{1}{4}$$

$$4x=6a^2 \qquad |:4$$

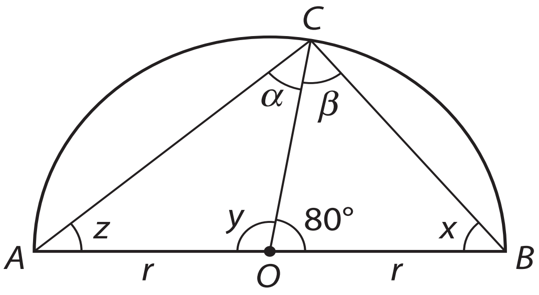
$$x=\frac{6}{4}a^2$$

$$x=\frac{3}{2}a^2$$

Pinta-ala pienenee

$$6a^2-\frac{3}{2}a^2=\frac{9}{2}a^2$$

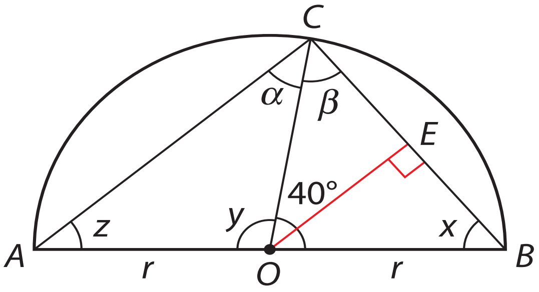
13.


C
α
β
y
80°
z
x
A
r
O
r
B

Kulma y ja 80° muodostavat oikokulman, joten

$$y + 80° = 180°$$

$$y = 100°$$

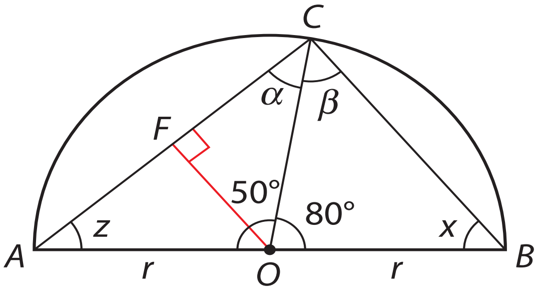

C
α
β
E
40°
y
z
x
A
r
O
r
B

Tasakylkisen kolmion *OBC* kulmanpuolittaja puolittaa kärkikulman 80° sekä kolmion kantasivun *CB*.

Kulmat 40°, 90° ja β muodostavat kolmion. Kolmion kulmien summa on 180°.

$$40° + 90° + \beta = 180°$$

$$\beta = 50°$$



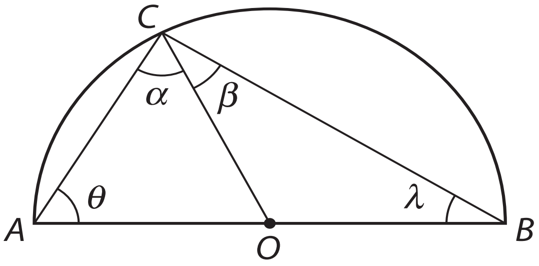
Tasakylkisen kolmion *OAC* kulmanpuolittaja puolittaa kärkikulman 100° sekä kolmion kantasivun *CA*.

Kulmat 50°, 90° ja α muodostavat kolmion. Kolmion kulmien summa on 180°.

$$50^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = 40^\circ$$

$$\alpha + \beta = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$$

b)



Kolmiot *AOC* ja *COB* ovat molemmat tasakylkisiä kolmioita, koska

- Kyljet *CO* ja *BO* ovat yhtä pitkät, ympyrän säteen pituisia.
- Kyljet *AO* ja *CO* ovat yhtä pitkät, ympyrän säteen pituisia.

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten

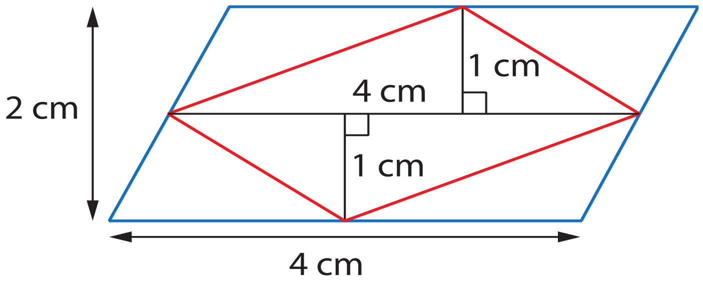
- $\alpha = \theta$ ja $\beta = \lambda$.

Kolmion *ABC* kulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned}
\theta + \alpha + \beta + \lambda &= 180^\circ && \big|\, \alpha = \theta,\ \beta = \lambda \\
\alpha + \alpha + \beta + \beta &= 180^\circ \\
2\alpha + 2\beta &= 180^\circ && \big|\, :2 \\
\alpha + \beta &= 90^\circ
\end{aligned}$$

14.

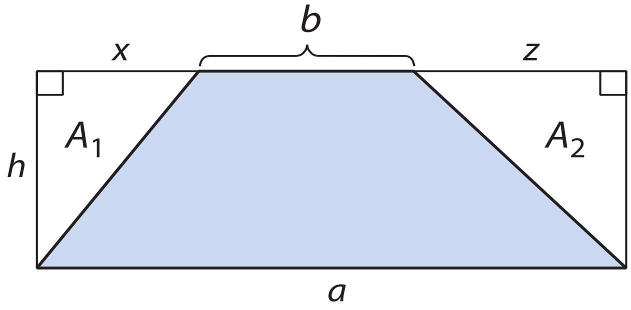
Jaetaan suuremman suunnikkaan sisään piirretty suunnikas kahteen kolmioon.



Kummankin kolmion kanta on 4 cm ja korkeus on 1 cm. Pienemmän suunnikkaan pinta-ala on

$$A = 2 \cdot \frac{4\text{ cm} \cdot 1\text{ cm}}{2} = 4\text{ cm}^2$$

15.



Suunnikkaan pinta-ala saadaan vähentämällä nelikulmion pinta-alasta kaksi kolmion pinta-alaa.

Nelikulmion pinta-ala on $A_{\text{nelikulmio}} = a \cdot h$

Kolmioitten pinta-alat ovat

- $A_1 = \dfrac{h \cdot x}{2}$
- $A_2 = \dfrac{z \cdot h}{2}$

Pituuden z voidaan myös ilmaista $z = a - x - b$. Joten $A_2 = \dfrac{(a-x-b) \cdot h}{2} = \dfrac{a \cdot h - x \cdot h - b \cdot h}{2}$.

Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.

$$\begin{aligned}
A_{\text{suunnikas}} &= A_{\text{nelikulmio}} - \left(A_1 + A_2\right) \\
&= ah - \left(\left(\frac{xh}{2}\right) + \left(\frac{ah - xh - bh}{2}\right)\right) \\
&= ah - \left(\frac{xh + ah - xh - bh}{2}\right) \\
&= ah - \left(\frac{ah - bh}{2}\right) \\
&= \frac{2ah}{2} - \frac{ah - bh}{2} \\
&= \frac{2ah - ah + bh}{2} \\
&= \frac{ah + bh}{2} \\
&= \frac{(a + b)}{2} h
\end{aligned}$$

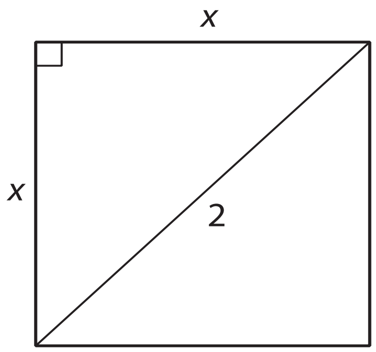
16.

a) Pyramidin pohjan lävistäjän pituus on 2, joten puolet siitä on 1. Lasketaan pyramidin sisälle muodostuneen suorakulmaisen kolmion sivu h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 1^2 + h^2 &= \sqrt{5}^2 \\ 1 + h^2 &= 5 \\ h^2 &= 4 \\ h &= \pm\sqrt{4} \\ h &= \pm 2 \end{aligned}$$

Koska $h > 0$, niin $h = 2$.

b) Piirretään mallikuva pyramidin pohjasta.



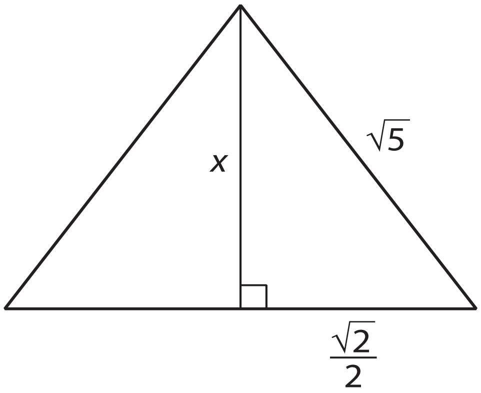
Lasketaan pohjaan muodostuneen suorakulmaisesta kolmiosta sivun x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 2^2 \\ 2x^2 &= 4 \qquad \Big| :2 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{2}$.

c) $V=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2}{3}=\dfrac{2\cdot 2}{3}=\dfrac{4}{3}$

d) Piirretään mallikuva sivutahkosta.



Lasketaan syntyneen suorakulmaisen kolmion sivun x pituus Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} x^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= \sqrt{5}^2 \\ x^2+\frac{2}{4} &= 5 \\ x^2 &= \frac{9}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{9}{2}} \\ x &= \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

e) Vaipassa on neljä edellistä kolmiota, joten

$$A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{2} = 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

17.

a) Merkitään pohjaympyrän säteen pituutta kirjaimella r. Muodostetaan tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä r.

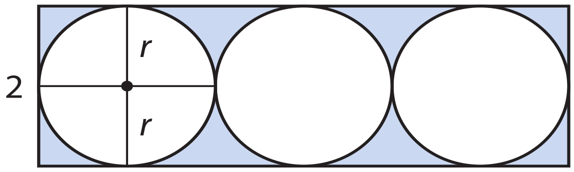
$$
\begin{aligned}
48\pi &= \pi r^2 \cdot 12 \qquad\qquad \left|:12\pi\right. \\
r^2 &= \frac{48\pi}{12\pi} \\
r^2 &= 4 \\
r &= \pm\sqrt{4} \\
r &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Koska $r > 0$, niin $r = 2$.

b) $A_{\text{vaippa}} = 2\pi \cdot 2 \cdot 12 = 48\pi$

18.

a)



Suorakulmion korkeus on yhtä suuri kuin ympyrän korkeus, joten

$$2 = 2r \quad \big| :2$$
$$r = 1$$

Kolmen peräkkäisen ympyrän leveys on $6r$, joten suorakulmion leveys on $6r = 6 \cdot 1 = 6$.

Suorakulmion pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio}} = 2 \cdot 6 = 12$$

Kolmen ympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{ympyrät}} = 3 \cdot \pi \cdot 1^2 = 3\pi$$

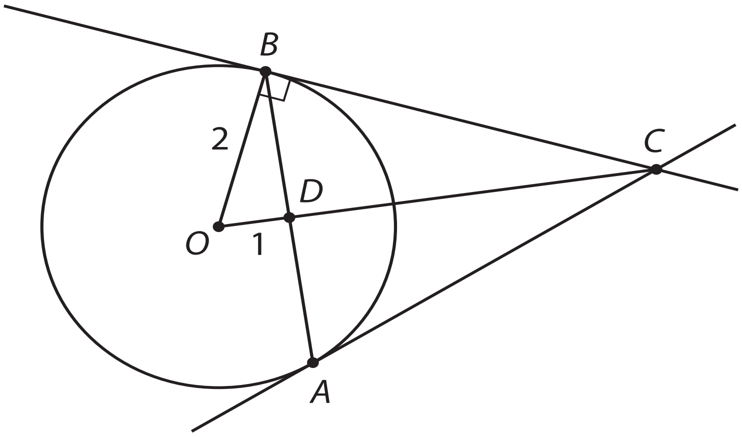
Väritetyn alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{suorakulmio}} - A_{\text{ympyrät}} \\ &= 12 - 3\pi \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
1-\frac{A_{\text{suorakulmio}}-A}{A_{\text{suorakulmio}}} &= 1-\frac{12-(12-3\pi)}{12} \\
&= 1-\frac{12-12+3\pi}{12} \\
&= \frac{12}{12}-\frac{3\pi}{12} \\
&= \frac{12-3\pi}{12} \\
&= \frac{4-\pi}{4}
\end{aligned}
$$

19.



Kolmio *OBC* on suorakulmainen kolmio, koska suoran *CB* on ympyrän tangentti. Lasketaan sivun *OC* pituus Pythagoraan lauseella.

$$2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = |OC|^2$$

$$|OC|^2 = 4 + (4 \cdot 3)$$

$$|OC|^2 = 4 + 12$$

$$|OC|^2 = 16$$

$$|OC| = \pm\sqrt{16}$$

$$|OC| = \pm 4$$

Koska $|OC| > 0$, niin $|OC| = 4$.

Janan *CD* pituus on $|DC| = |OC| - |OD| = 4 - 1 = 3$

Kolmio *ODB* on suorakulmainen kolmio. Janan *DB* pituus on.

$$
\begin{aligned}
1^2 + |DB|^2 &= 2^2 \\
|DB|^2 &= 4 - 1 \\
|DB|^2 &= 3 \\
|DB| &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Koska $|DB| > 0$, niin $|DB| = \sqrt{3}$.

Jana *AB* on kaksi kertaa janan *DB* pituus, joten $|AB| = 2 \cdot |DB| = 2\sqrt{3}$.

Kolmion *BAC* pinta-ala on

$$A_{BAC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}$$

20.

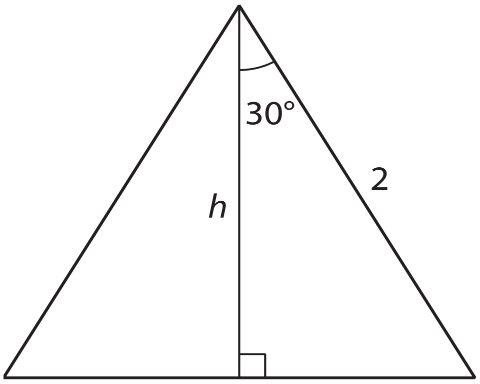
a) Merkitään kaarta vastaavaa keskuskulmaa kirjaimella α.

$$\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi\cdot 2=\frac{2\pi}{3} \quad \Big|:\frac{4\pi}{360°}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{360°}{4\pi}$$

$$\alpha=\frac{360°}{6}=60°$$

b) Piirretään mallikuva.



Lasketaan kosinin avulla sivun *h* pituus.

$$\cos 30°=\frac{h}{2}$$

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2$$

$$h=\sqrt{3}$$

c) Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{2}{3}\pi$$

Janan *AB* pituus on

$$\begin{aligned} \sin 30° &= \frac{\frac{|AB|}{2}}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{|AB|}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{|AB|}{4} \qquad\qquad |\cdot 4 \\ |AB| &= 2 \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

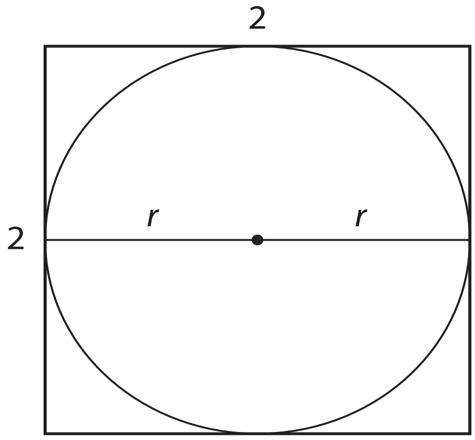
$$A_{AOB} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Segmentin pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{sektori}} - A_{AOB} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

21.

a) Piirretään mallikuva poikkileikkauksesta.



Pallon halkaisija on yhtä pitkä kuin kuution särmän pituus, joten

$$\begin{aligned} 2r &= 2 \quad \left| :2 \right. \\ r &= 1 \end{aligned}$$

Kuutiossa on kuusi neliön muotoista tahkoa. Kuution pinta-ala on

$$A_{\text{kuutio}} = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

Pallon pinta-ala on

$$A_{\text{pallo}} = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi$$

Pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_{\text{pallo}}}{A_{\text{kuutio}}} = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$

b) Kuution tilavuus on

$$V_{\text{kuutio}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Pallon tilavuus on

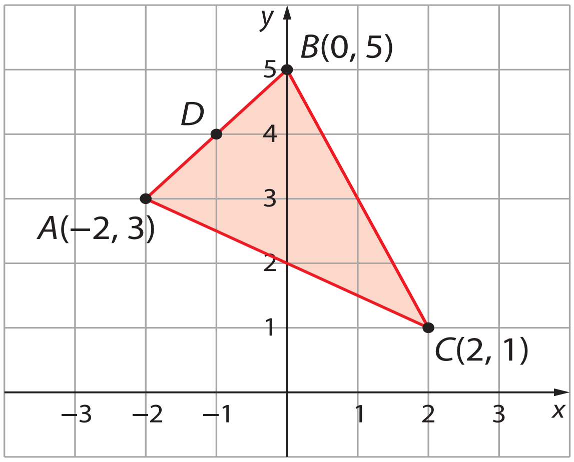
$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4\pi}{3}$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{pallo}}}{V_{\text{kuutio}}} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{8} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$$

22.

a)



Kannan *AB* keskipiste on

$$D=\left(\left(\frac{0+(-2)}{2}\right),\left(\frac{5+3}{2}\right)\right)=\left(\left(\frac{-2}{2}\right),\left(\frac{8}{2}\right)\right)=(-1,\,4)$$

b)

$$|CD|=\sqrt{(-1-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

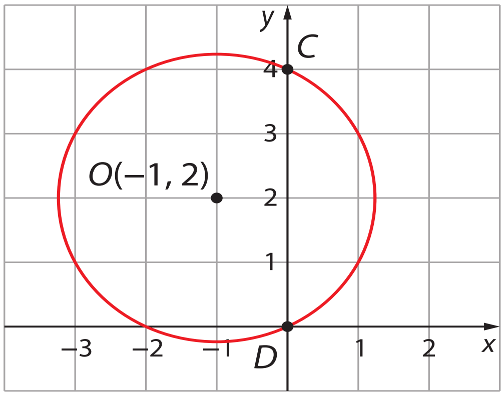
c)

$$|AB|=\sqrt{(0-(-2))^2+(5-3)^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

d) $A_{ABC}=\dfrac{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{6\cdot 2}{2}=6$

23.

a)



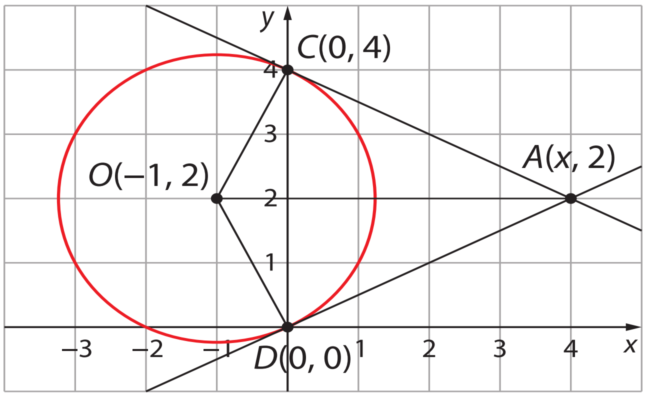
Pisteitten O ja C etäisyys pitää olla $\sqrt{5}$ ja pisteen C x-koordinaatti on 0.

Merkitään pisteen C y-koordinaattia kirjaimella y.

$$
\begin{aligned}
|OC| &= \sqrt{5} \\
\sqrt{(0-(-1))^2+(y-2)^2} &= \sqrt{5} \\
\sqrt{1^2+y^2-4y+2^2} &= \sqrt{5} \\
\sqrt{y^2-4y+5} &= \sqrt{5} \\
y^2-4y+5 &= 5 \\
y^2-4y &= 0 \\
y(y-4) &= 0 \\
y &= 0 \qquad \text{tai} \qquad y-4=0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad y=4
\end{aligned}
$$

Pisteen C koordinaatit ovat (0, 4) ja pisteen D koordinaatit ovat (0, 0).

b)


y
C(0, 4)
4
3
O(−1, 2)
2
A(x, 2)
1
−3
−2
−1
D(0, 0)
1
2
3
4
x

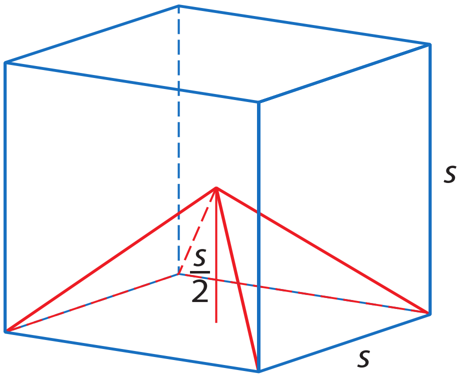
Pisteiden D ja A etäisyys on $2\sqrt{5}$. Lasketaan pisteen A x-koordinaatti.

$$
\begin{aligned}
|DA| &= 2\sqrt{5} \\
\sqrt{(0-x)^2+(0-2)^2} &= \sqrt{5\cdot 4} \\
\sqrt{x^2+2^2} &= \sqrt{20} \\
x^2+4 &= 20 \\
x^2 &= 16 \\
x &= \pm\sqrt{16} \\
x &= \pm 4
\end{aligned}
$$

Koska $x > 0$, niin $x = 4$.

Pisteen A koordinaatit ovat (2, 4)

24.



Kuution tilavuus on

$$V_{\text{kuutio}} = s \cdot s \cdot s = s^3$$

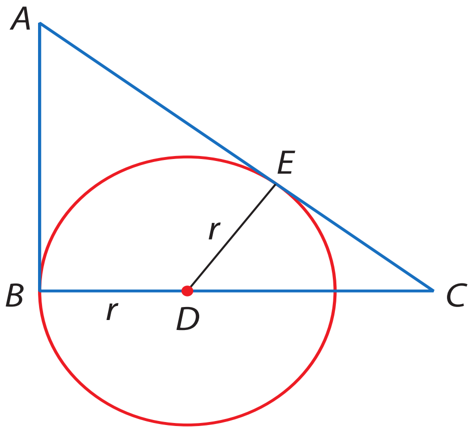
Pyramidin tilavuus on

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{s \cdot s \cdot \frac{s}{2}}{3} = \frac{s^3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{s^3}{6}$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{pyramidi}}}{V_{\text{kuutio}}} = \frac{\frac{s^3}{6}}{s^3} = \frac{s^3}{6} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{6} = 1:6$$

25.



Merkitään pallon keskipistettä kirjaimella D ja sädettä kirjaimella r.

Koska kolmion ABC sivujana AC on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma C on kolmioille yhteinen.

Lasketaan sivu BC Pythagoraan lauseella.

$$|BC|^2 + 6^2 = 10^2$$

$$|BC|^2 + 36 = 100$$

$$|BC|^2 = 64$$

$$|BC| = \pm\sqrt{64}$$

$$|BC| = \pm 8$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $|BC| = 8$

Muodostetaan kolmioiden *ABC* ja *DEC* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$
\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|DE|} &= \frac{|AC|}{|DC|} \\
\frac{6}{r} &= \frac{10}{8-r} \\
6\cdot(8-r) &= 10r \\
48-6r &= 10r \\
16r &= 48 && \big| :16 \\
r &= \frac{16}{48} \\
r &= 3
\end{aligned}
$$

26.

24 pienen munkin ja 3 ison munkin tilavuudet ovat samat. Merkitään pienen munkin sädettä kirjaimella r_1 ja ison munkin sädettä kirjaimella r_2. Merkitään tilavuudet samoiksi.

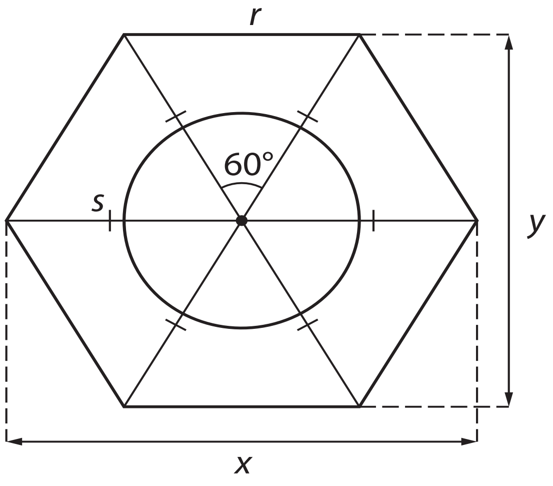
$$\begin{aligned}
V_{\text{pienet}} &= V_{\text{isot}} \\
24 \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^{\,3} &= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^{\,3} \\
32\pi r_1^{\,3} &= 4\pi r_2^{\,3} && \Big| : 4\pi \\
8r_1^{\,3} &= r_2^{\,3} && \Big| \sqrt[3]{} \\
2r_1 &= r_2
\end{aligned}$$

Pallojen alojen suhde on

$$\frac{A_{\text{pienet}}}{A_{\text{isot}}} = \frac{24 \cdot 4\pi r_1^{\,2}}{3 \cdot 4\pi r_2^{\,2}} = \frac{8r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}} = \frac{8r_1^{\,2}}{(2r_1)^2} = \frac{8r_1^{\,2}}{4r_1^{\,2}} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = 2:1$$

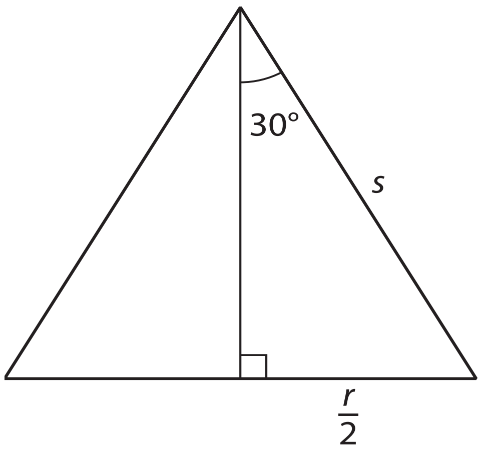
27.

a)



Säännöllisen kuusikulmion lävistäjät jakavat monikulmion kuudeksi samanlaiseksi, tasakylkiseksi kolmioksi, joiden huippukulma on $\frac{360°}{6} = 60°$.

Lasketaan yhden tasakylkisen kolmion kyljen pituus. Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman 60°.



Lasketaan sivun *s* pituus kosinin avulla.

$$\sin 30° = \frac{\frac{r}{2}}{s}$$

$$s = \frac{\frac{r}{2}}{\sin 30°}$$

$$s = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{1}{2}}$$

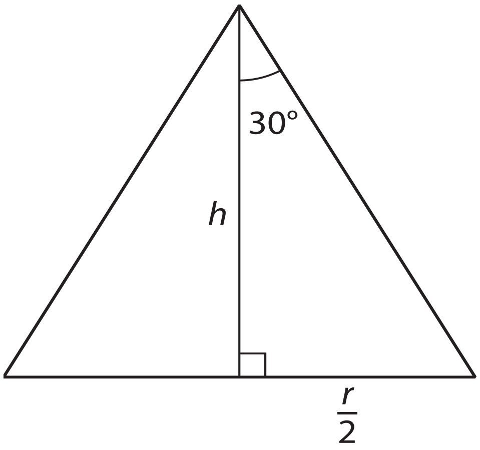
$$s = \frac{r}{2} \cdot \frac{2}{1}$$

$$s = r$$

Kuusikulmion leveys *x* on

$$x = 2s = 2r$$

b) Lasketaan yhden tasakylkisen kolmion korkeus. Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman 60°.



Lasketaan sivun *h* pituus tangentin avulla.

$$\tan 30° = \frac{\frac{r}{2}}{h}$$

$$h = \frac{\frac{r}{2}}{\tan 30°}$$

$$h = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$h = \frac{r}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Kuusikulmion korkeus y on

$$y = 2h = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

c) Kuusikulmion pinta-ala on

$$A_{\text{kuusikulmio}} = 6 \cdot \frac{r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}}{2} = 3 \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$$

Ympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} r^2$$

Kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala.

$$A = A_{\text{kuusikulmio}} - A_{\text{ympyrä}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 - \frac{\pi}{4} r^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) r^2$$

5.2 Matemaattisia malleja

28.

a) Merkitään kateetteja kirjaimilla x ja y. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan x ja y.

$$\begin{cases} x+y=18,25 \\ x^2+y^2=13,25^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=18,25-x \\ x^2+y^2=13,25^2 \end{cases}$$

$$x^2+(18,25-x)^2=13,25^2$$

$$x=11,25 \text{ tai } x=7$$

Jos $x = 11,25$, niin $y = 18,25 - 11,25 = 7$.

Joten luvut $x = 11,25$ ja $y = 7$.

b) Lasketaan kartassa kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kartassa}} = \frac{11{,}25\ \text{cm} \cdot 7\ \text{cm}}{2} = 39{,}375\ \text{cm}^2$$

Muutetaan 437,5 a neliösenttimetreiksi.

437,5 a = 43 750 m^2 = 4 375 000 dm^2 = 437 500 000 cm^2

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{39{,}375\ \text{cm}^2}{437\ 500\ 000\ \text{cm}^2} = k^2$$

$$k = -0{,}0003 \quad \text{tai} \quad k = 0{,}0003$$

Mittakaava on aina positiivinen luku, joten

$$k = 0{,}0003 = \frac{3}{10\ 000} = 3 : 10\ 000$$

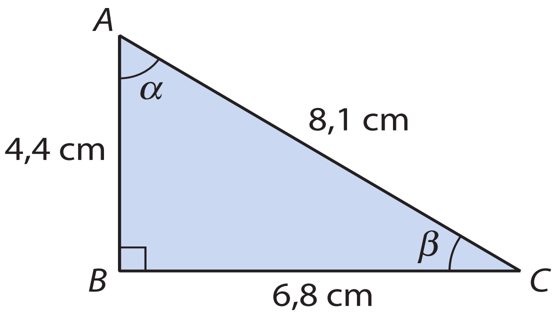
29.

a) Lasketaan sivun *BC* pituus Pythagoraan lauseella.

$$|BC|^2 + 4{,}4^2 = 8{,}1^2$$
$$|BC| = \pm 6{,}800\ldots \text{ cm} \approx \pm 6{,}8 \text{ cm}$$

Koska sivun pituus on positiivinen, $|BC| = 6{,}8$ cm

b)



Lasketaan kulman β suuruus sinin avulla.

$$\sin\beta = \frac{4{,}4}{8{,}1}$$
$$\beta = 32{,}902\ldots^\circ$$
$$\beta \approx 32{,}9^\circ$$

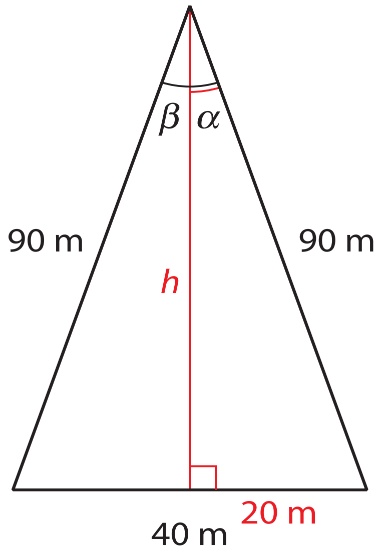
Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\alpha + 90^\circ + 32{,}9^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 57{,}1^\circ$$

c) $A = \dfrac{6,800...\ \text{cm} \cdot 4,4\ \text{cm}}{2} = 14,961...\ \text{cm}^2 \approx 15,0\ \text{cm}^2$

30.

a) Piirretään mallikuva.



Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kolmion kärkikulman ja kannan. Lasketaan muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta kulman α arvo.

$$\sin\alpha = \frac{20}{90}$$

$$\alpha = 12{,}839...^\circ$$

Kulma β on

$$\beta = 2\alpha = 2\cdot 12{,}839...^\circ = 25{,}679...^\circ \approx 26^\circ$$

b) Lasketaan kolmion korkeus h.

$$\tan 12,839...^\circ = \frac{20}{h}$$
$$h = 87,753... \text{ m}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{40 \text{ m} \cdot 87,753 \text{ m}}{2} = 1\,755,076... \text{ m}^2 \approx 1\,755 \text{ m}^2$$

31.

a) Lasketaan kolmion kannan pituus.

$$\sqrt{(-6-8)^2+(0-0)^2}=14$$

Muodostetaan kolmion pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä kolmion korkeus h.

$$\begin{aligned} A &= 35 \\ \frac{14\cdot h}{2} &= 35 \\ h &= 5 \end{aligned}$$

b) Tasakylkisen kolmion kärjen x-koordinaatti on kannan päätepisteiden puolessa välissä. Lasketaan kärkipisteen x-koordinaatti.

$$x=\frac{-6+8}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Nyt tiedetään kolmion kärkipisteen x-koordinaatti. Merkitään sen y-koordinaattia kirjaimella y. Kolmion kärkipisteen etäisyys pisteestä (1, 0) on 5. Lasketaan kolmion y-koordinaatti.

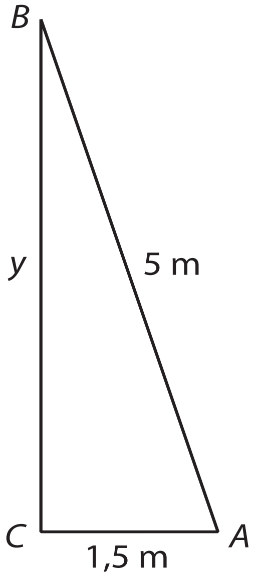
$$\begin{aligned} \sqrt{(1-1)^2+(0+y)^2} &= 5 \\ \sqrt{y^2} &= 5 \\ y &= \pm 5 \end{aligned}$$

Kolmion kärkipisteen koordinaatit ovat (1, 5) tai (1, −5).

32.

Piirretään mallikuva.

150 cm = 1,5 m

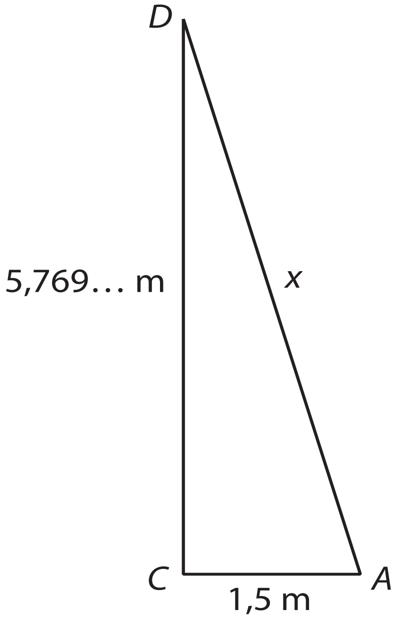


Tikkaiden alapää on kohdassa *A*, yläpää seinällä kohdassa *B* ja *C* on seinän kohta, joka on samalla tasolla kuin *A*.

Suorakulmaisessa kolmiossa *ABC* sivun *AB* pituus on 5 m ja sivun *AC* pituus on 1,5 m. Lasketaan Pythagoraan lauseella sivun $BC = y$ pituus.

$$y^2 + 1{,}5^2 = 5^2$$
$$y = 4{,}769\ldots\ \mathrm{m}$$

Tikapuilla halutaan päästä 1 m + 4,769… m = 5,769… m korkeuteen.



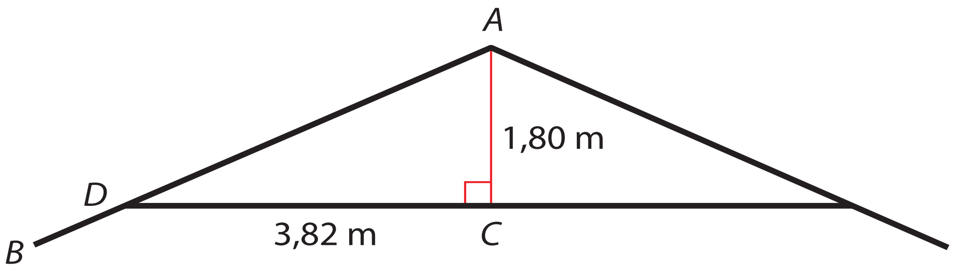
Lasketaan uudesta suorakulmaisesta kolmiosta *BDC* sivun *x* pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 5,769...^2 + 1,5^2$$
$$x = \pm 5,961... \text{ m}$$

Tikkaita tuli pidentää

$$5,961... \text{ m} - 5 \text{ m} = 0,961... \text{ m} = 96,149 \text{ cm} \approx 96 \text{ cm}.$$

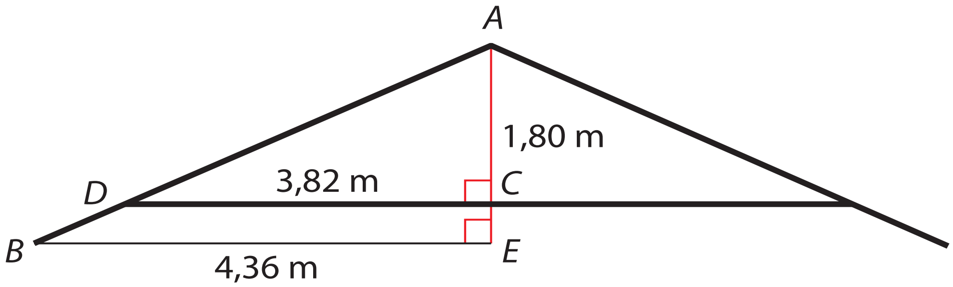
33.



Talon harja on keskellä kattoa, joten talon katto on tasakylkisen kolmion muotoinen. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan. Lasketaan muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta janan *DA* pituus.

$$|DA|^2 = 3,82^2 + 1,8^2$$
$$|DA| = \pm 4,222\ldots \text{ m}$$

Koska sivun pituus on positiivinen, niin $|DA| = 4,222\ldots \text{ m}$.



Kolmio *ADC* on yhdenmuotoinen kolmion *ABE*, koska

- kolmioilla on yhteinen kulma *A*
- kolmioilla vastinkulmana on suorakulma.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama.

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BE|}$$

$$\frac{4,222...}{|AB|} = \frac{3,82}{4,36}$$

$$|AB| = 4,819...\ \text{m} \approx 4,82\ \text{m}$$

34.

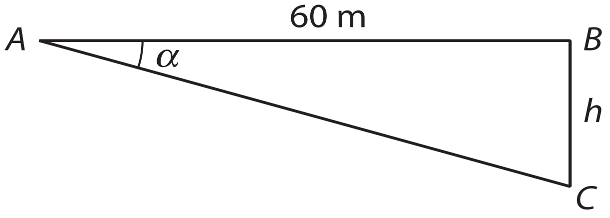
a) Liito-oravan vaakasuora siirtymä suoraviivaisessa liidossa on 3,3-kertainen korkeuden vähenemiseen verrattuna.

Merkitään korkeuden vähenemistä kirjaimella *h*, joten

$$\begin{aligned} \frac{60\ \text{m}}{h} &= 3,3 \\ h &= 18,181...\ \text{m} \end{aligned}$$

Koska liito-orava laskeutuu 1 m korkeuteen, sen täytyy hypätä $h + 1\ \text{m} = 18,181...\ \text{m} + 1\ \text{m} = 19,181\ \text{m} \approx 19\ \text{m}$ korkeudelta.

b)



Piste *A* on liito-oravan hyppykohta, piste *C* on liito-oravan laskeutumiskohta.

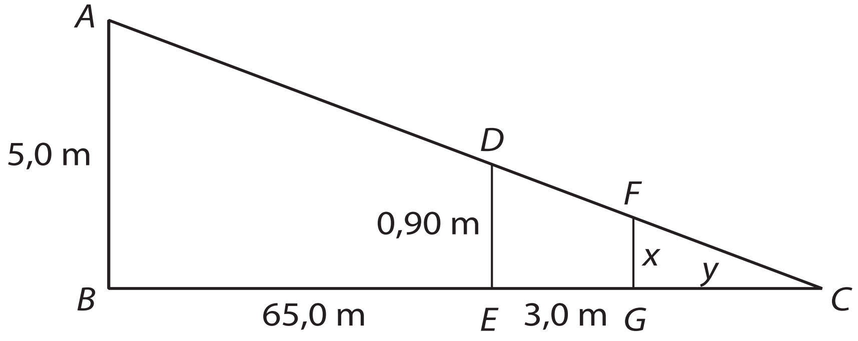
Laskettaan kulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{18,181}{60}$$

$$\alpha = 16,858...^\circ \approx 17^\circ$$

35.

Piirretään mallikuva. Tutkitaan kuinka korkealla linnunpesän pitää vähintään olla, jotta lintubongari sen juuri ja juuri näkee. Merkitään linnunpesän korkeutta kirjaimella x.



Kolmiot ABC, DEC ja FGC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla:

- kaikilla kolmioilla on suora kulma vastinkulmana
- kulma C on yhteinen.

Linnunpesän korkeus x voidaan ratkaista, jos kolmiosta FGC tunnetaan jonkin toisen sivun pituus. Merkitään sivun GC pituutta kirjaimella y.

Tällöin

- sivun EC pituus on $y + 3{,}0$
- sivun BC pituus on $65{,}0 + 3{,}0 + y = 68{,}0 + y$.

Muodostetaan kolmioiden ABC ja DEC vastinsivujen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä y.

$$\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\frac{5{,}0}{0{,}90}=\frac{68{,}0+y}{3{,}0+y}$$

$$y=11{,}268...\ \text{m}$$

Muodostetaan sitten kolmioiden ABC ja FGC vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{|AB|}{|FG|}=\frac{|BC|}{|GC|}$$

$$\frac{5{,}0}{x}=\frac{68{,}0+11{,}268...}{11{,}268...}$$

$$x=0{,}710...\ \text{m}$$

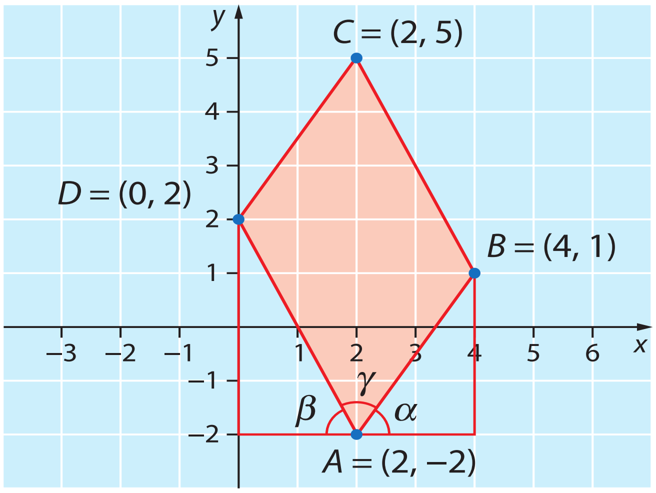
Linnunpesän tulisi olla vähintään 0,710 m = 71 cm korkeudella maasta, jotta lintubongari näkisi sen. Koska 50 cm < 71 cm, niin lintubongari ei näe linnunpönttöä.

36.

a) $|AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{13}$

$|BC| = \sqrt{(2-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) Täydennetään suunnikkaan alapuolelle kaksi suorakulmaista kolmiota ja merkitään kolmioitten toista terävää kulmaa kirjaimella α ja β. Ratkaistaan kulmat α ja β sinin avulla.



y
C = (2, 5)
D = (0, 2)
B = (4, 1)
A = (2, −2)
x
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
5
4
3
2
1
−1
−2
β
γ
α

$$\sin \beta = \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

$$\beta = 63{,}434...^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\alpha = 56{,}309...^\circ$$

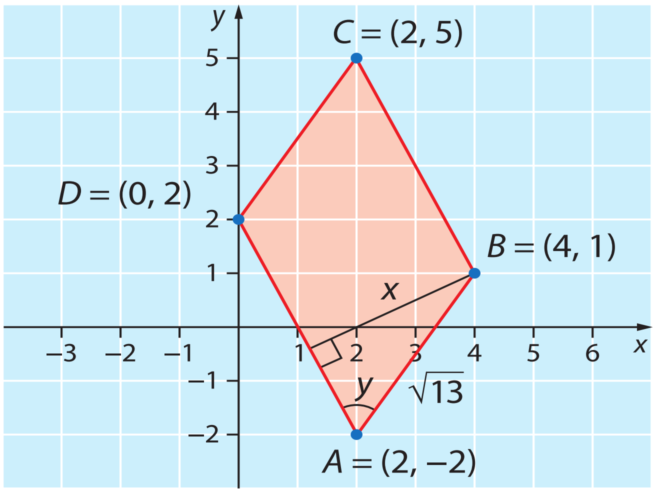
Kulmat β, α ja γ muodostavat oikokulman, joten

$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$
$$\gamma=60,256°\approx 60°$$

Merkitän suunnikkaan toisen suuruista kulmaa kirjaimella θ. Suunnikkaan kulmien summa on 360°, joten

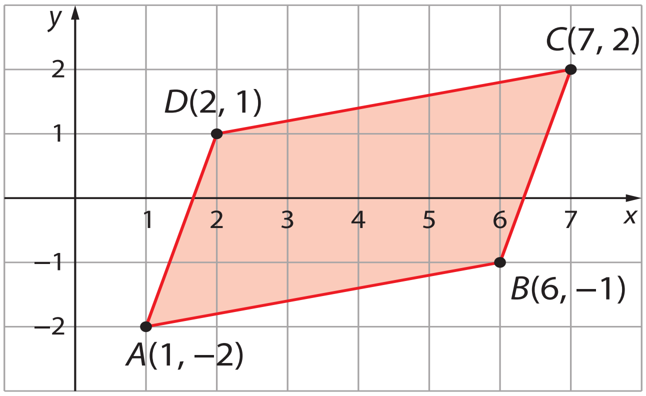
$$\gamma+\gamma+\theta+\theta=360°$$
$$\theta=120°$$

c) Piirretään kuvaan suunnikkaan korkeusjanan avulla suorakulmainen kolmio. Merkitään suunnikkaan korkeutta kirjaimella x. Ratkaistaan korkeus sinin avulla.



$$\sin\gamma=\frac{x}{\sqrt{13}}$$
$$x=3{,}130...\approx 3{,}1$$

37.



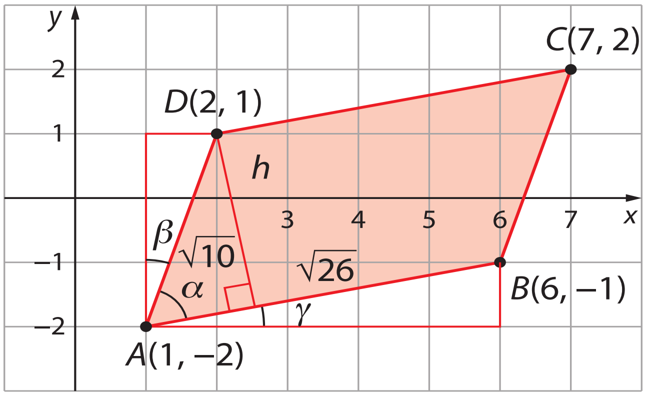
y
x
1
2
3
4
5
6
7
2
1
−1
−2
C(7, 2)
D(2, 1)
B(6, −1)
A(1, −2)

Sivun *AB* pituus on

$$|AB| = \sqrt{(6-1)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{26}$$

Sivun *AD* pituus on

$$|AD| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{10}$$



y
x
3
4
5
6
7
2
1
−1
−2
C(7, 2)
D(2, 1)
B(6, −1)
A(1, −2)
h
β
√10
α
√26
γ

Täydennetään suunnikkaan alapuolelle ja oikealle puolelle suorakulmaiset kolmiot ja merkitään kolmioitten toista terävää kulmaa kirjaimella γ ja β. Ratkaistaan kulmat γ ja β sinin avulla.

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}}$$
$$\gamma = 11{,}309...^\circ$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\beta = 18{,}434...^\circ$$

Kulmat γ, β ja α muodostavat suoran kulman, joten

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\alpha = 60{,}256...^\circ \approx 60{,}3^\circ$$

Lasketaan sivu h sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{10}}$$
$$h = 2{,}745...$$

Suunnikkaan pinta-ala on $A = \sqrt{26} \cdot 2{,}745... = 14{,}000... \approx 14$

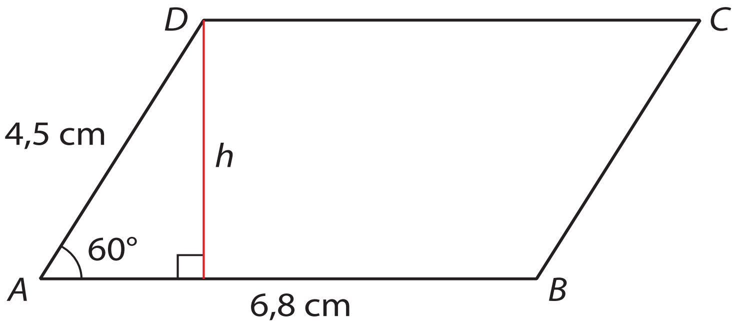
Merkitään suunnikkaan toisen suuruista kulmaa kirjaimella θ. Suunnikkaan kulmien summa on 360°, joten

$$\alpha + \alpha + \theta + \theta = 360^\circ$$
$$\theta = 119{,}7^\circ$$

Suunnikkaan kulmat ovat 60,3° ja 119,7°.

38.

a)



Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta sivun *h* pituus sinin avulla.

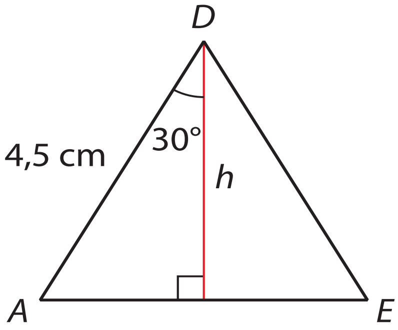
$$\sin 60° = \frac{h}{4,5}$$

$$h = 3,897\ldots \text{ cm}$$

Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.

$$A_{\text{suunnikas}} = 6,8 \text{ cm} \cdot 3,897\ldots \text{ cm} = 26,500\ldots \text{ cm}^2 \approx 27 \text{ cm}^2$$

b)



Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kärkikulman. Suorakulmaisen kolmion kärkikulman suuruus on 30°. Lasketaan kolmion sivun *h* pituus.

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{4,5}$$

$$h = 3,897...\ \text{cm}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{4,5\ \text{cm} \cdot 3,897...\ \text{cm}}{2} = 8,768...\ \text{cm}^2$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kolmion pinta-ala on suunnikkaan pinta-alasta.

$$1 - \frac{A_{\text{suunnikas}} - A_{\text{kolmio}}}{A_{\text{suunnikas}}} = 1 - \frac{26,500...\ \text{cm}^2 - 8,768...\ \text{cm}^2}{26,500...\ \text{cm}^2} = 0,330... \approx 0,33 = 33\ \%$$

39.

Merkitään tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisia sivuja kirjaimilla *a* ja *b*.

Tiedetään, että

- $a-b=5$
- $\frac{a+b}{2}\cdot 4=60{,}0$
  $a=30-b$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a-b=5 \\ a=30-b \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari.

$$(30-b)-b=5$$
$$b=12{,}5$$

$$a-12{,}5=5$$
$$a=17{,}5$$

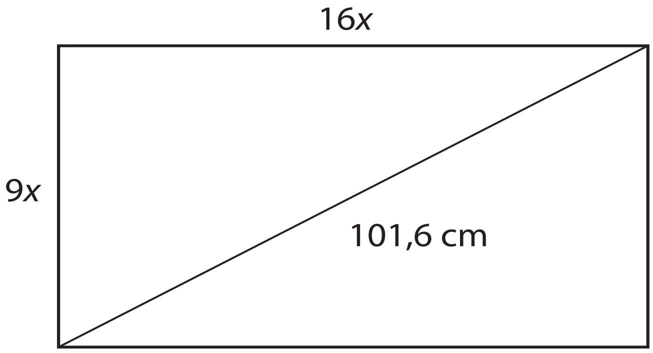
Yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 12,5 cm ja 17,5 cm.

40.

a) Merkitään kuvaruudun leveyttä $16x$ ja korkeutta $9x$.

Kuvaruudun lävistäjä on

$40 \text{ tuuma} = 40 \cdot 2,54 \text{ cm} = 101,6 \text{ cm}$



Lasketaan Pythagoraan lauseella muuttuja x.

$$(16x)^2 + (9x)^2 = 101,6^2$$
$$x = 5,534... \text{ cm}$$

Kuvaruudun mitat ovat

- Leveys $16x = 16 \cdot 5,534... \text{ cm} = 88,552... \text{ cm} \approx 88,6 \text{ cm}$
- Korkeus $9x = 9 \cdot 5,534... \text{ cm} = 49,810... \text{ cm} \approx 49,8 \text{ cm}$

b) $A = 88,552... \text{ cm} \cdot 49,810... \text{ cm} = 4\,410,775... \text{ cm}^2 \approx 4\,411 \text{ cm}^2$

41.

a) Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on mittakaava. Merkitään pienoismallin pituutta kirjaimella x.

$$\frac{84}{x} = \frac{70}{3}$$

$$x = 3{,}6\text{ m} = 360\text{ cm}$$

b) Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on mittakaava. Merkitään oikean lentokoneen siipien kärkiväliä kirjaimella x.

$$\frac{x}{3{,}79} = \frac{70}{3}$$

$$x = 88{,}433...\text{ m} \approx 88{,}4\text{ m}$$

42.

a) Lasketaan Merkuriuksen säde ympärysmitan avulla.

$$15\,300 = 2\pi r_{\text{Merkurius}}$$
$$r_{\text{Merkurius}} = 2\,435{,}070\ldots\ \text{km}$$

Merkuriuksen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{Merkuruis}} &= 4\pi \cdot r_{\text{merkurius}}{}^{2} \\ &= 74\,513\,161{,}256\ldots\ \text{km}^2 \end{aligned}$$

Maan pinta-ala on

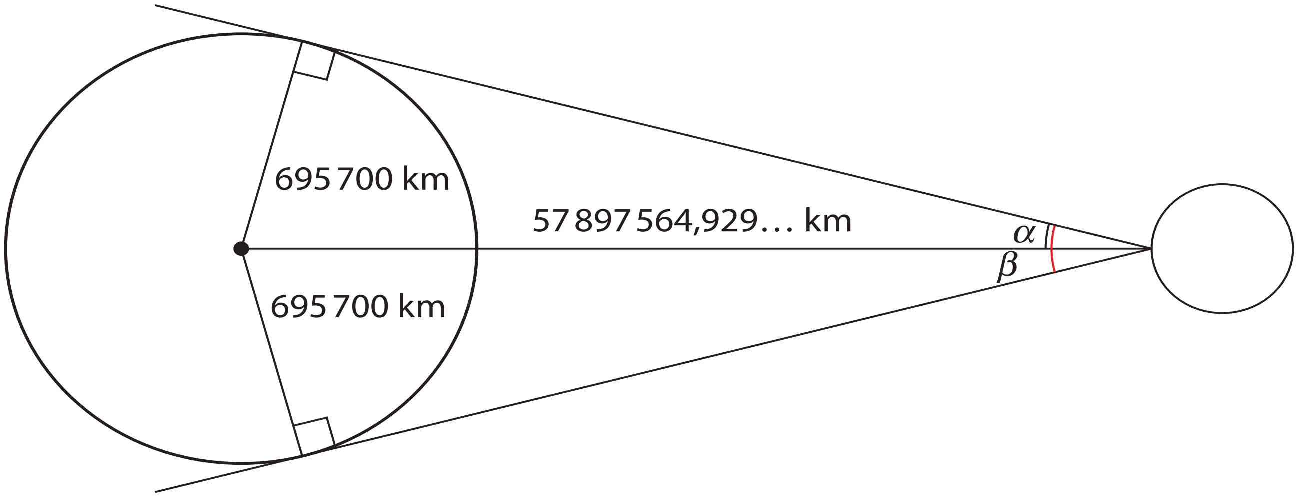
$$\begin{aligned} A_{\text{Maa}} &= \pi r^2 \\ &= 511\,506\,576{,}035\ldots\ \text{km}^2 \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia Merkuriuksen pinta-ala on Maan pinta-alasta.

$$\begin{aligned} 1-\frac{A_{\text{Maa}}-A_{\text{Merkuruis}}}{A_{\text{Maa}}} &= 1-\frac{511\,506\,576{,}035\ldots\ \text{km}^2-74\,513\,161{,}256\ldots\ \text{km}^2}{511\,506\,576{,}035\ldots\ \text{km}^2} \\ &= 0{,}145\ldots \approx 0{,}146 = 14{,}6\ \% \end{aligned}$$

b) Piirretään mallikuva.

- Kysytty kulma on tangenttien väliin muodostuva tangenttikulma *β*.
- Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.



Muodostetaan kuvioon suorakulmainen kolmio.

- Kolmion hypotenuusan pituus:
  57 900 000 km – 2 435,070… km = 57 897 564,929… km.
- Kolmion toinen kateetti on sama kuin Auringon säde.
- Kolmion terävä kulma *α* on puolet tangenttikulmasta: *β* = 2*α*.

Ratkaistaan kulma *α* sinin avulla.

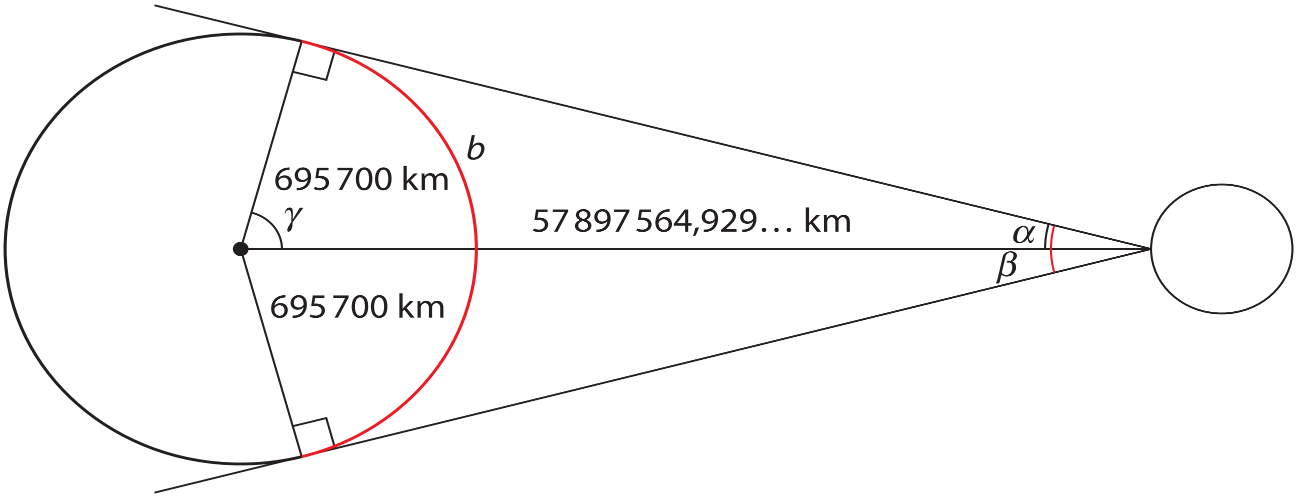
$$\sin\alpha = \frac{695\ 700}{57\ 897\ 564{,}929...}$$

$$\alpha = 0{,}688...^\circ$$

Tangenttikulma *β* on

$$\beta = 2\alpha = 2\cdot 0{,}688...^\circ = 1{,}376...^\circ \approx 1{,}38^\circ$$

c) Merkuriuksesta nähdään se osa ympyrän kaarta *b*, joka jää tangenttisuorien väliin.



b
695 700 km
γ
57 897 564,929… km
α
β
695 700 km

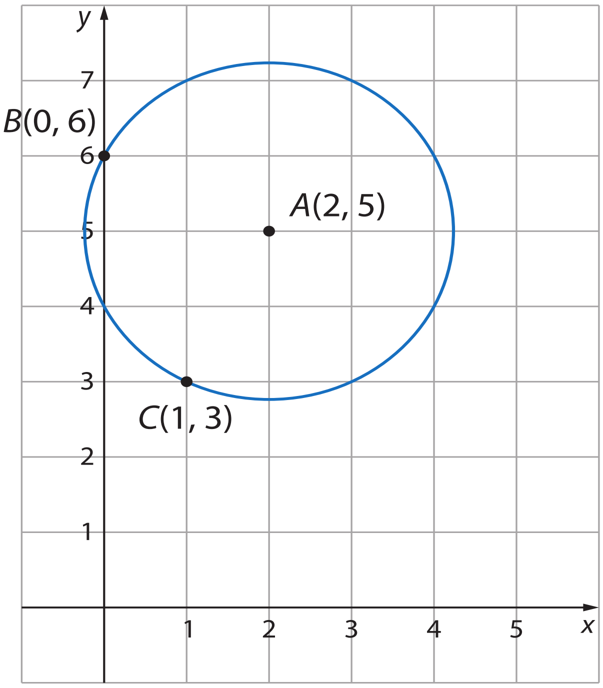
- Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma:
  $\gamma = 180° - 90° - 0{,}688...° = 89{,}311...°$
- Kaarta vastaavan keskuskulman suuruus:
  $2 \cdot 89{,}311...° = 178{,}623...°$

Lasketaan keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus.

$$b = \frac{178{,}623...°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 695\,700 \text{ km} = 2\,168\,886{,}475... \text{ km} \approx 2\,170\,000 \text{ km}$$

43.

a)



Lasketaan ympyrän säde, joka on janan *AB* pituus.

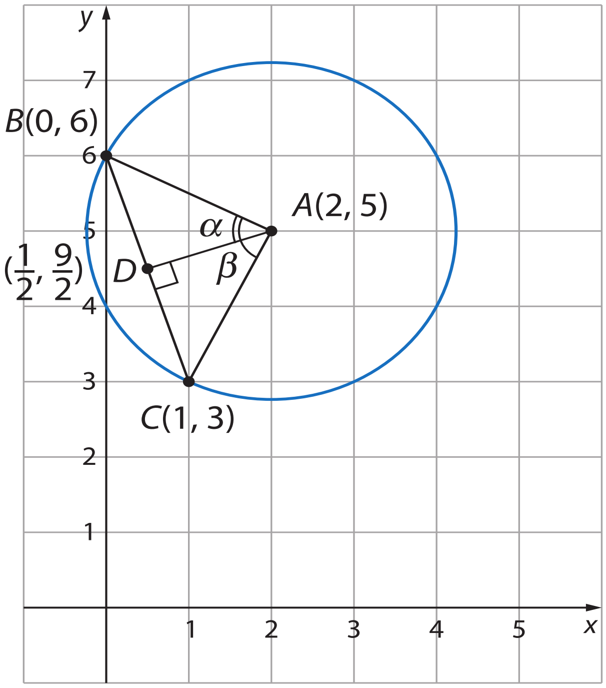
$$|AB| = \sqrt{(0-2)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{5}$$

Ympyrän pinta-ala on

$$A = \pi \cdot \sqrt{5}^2 = 5\pi$$

b) Lasketaan janan BC keskipiste ja merkitään sitä kirjaimella D.

$$D=\left(\frac{1+0}{2},\frac{3+6}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$$


y
7
B(0, 6)
6
5
A(2, 5)
α
β
$(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$
D
4
3
C(1, 3)
2
1
1
2
3
4
5
x

Lasketaan sivun BD pituus.

$$|BD|=\sqrt{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(6-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Kolmio ABC on tasakylkinen kolmio, koska janat BA ja CA ovat yhtä pitkiä. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kolmion kärkikulman. Merkitään kulmaa $A=\beta$ ja $\beta=2\alpha$. Lasketaan kulma α sinin avulla.

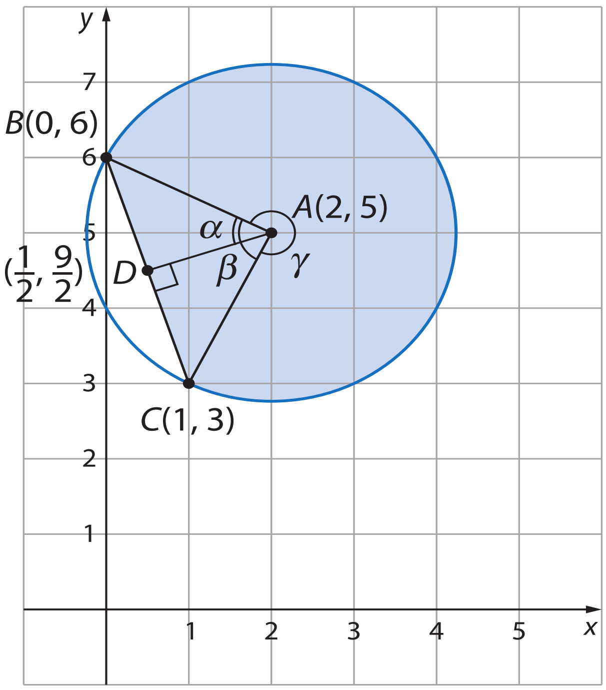
$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha=45^\circ$$

Kaarta BC vastaava keskuskulma on

$$\beta=2\alpha=2\cdot 45^\circ=90^\circ$$

c) Lasketaan väritetyn alueen pinta-ala.



y
7
B(0, 6)
6
5
A(2, 5)
α
β
γ
$(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$
D
4
3
C(1, 3)
2
1
1
2
3
4
5
x

Kolmion *ABC* pinta-alan ratkaisemiseksi tarvitaan janan *AD* pituus ja janan *CB* pituus.

$$|AD| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{9}{2} - 5\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$|CB| = 2 \cdot |DB| = 2\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Kolmion *ABC* pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}}{2} = \frac{5}{2}$$

Kulmat γ ja β muodostavat täyden kulman, joten

$$\begin{aligned} \gamma+\beta &= 360° \\ \gamma &= 270° \end{aligned}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala

$$A_{\text{sektori}} = \frac{270°}{360°} \cdot \pi \cdot \sqrt{5}^2 = \frac{15}{4}\pi$$

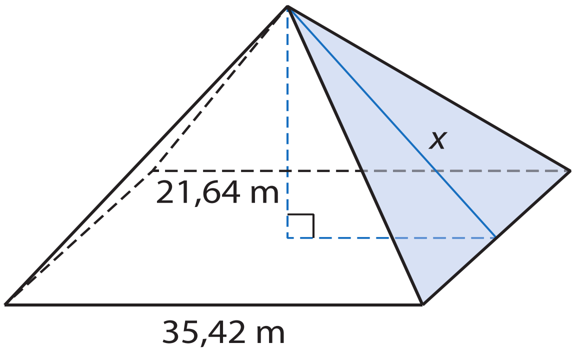
Väritetyn alueen pinta-ala on

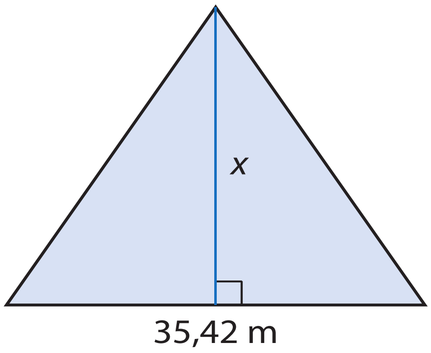
$$A_{\text{sektori}} + A_{\text{kolmio}} = \frac{15}{4}\pi + \frac{5}{2}.$$

Tämän likiarvo on $\frac{15}{4}\pi + \frac{5}{2} = 14,280... \approx 14,3$.

44.

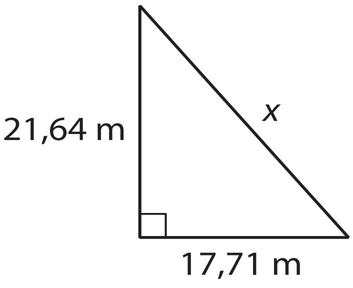
Lasketaan pyramidin vaipan ala. Piirretään mallikuva pyramidista.





Vaippa koostuu neljästä tasasivuisesta kolmiosta, jonka kanta on 35,42 m ja korkeutta merkitään kirjaimella *x*.

Pyramidin sisälle muodostui suorakulmainen kolmio. Suorakulmaisen kolmion kanta on puolet pohjasärmän pituudesta.



Ratkaistaan sivun *x* pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 21,64^2 + 17,71^2$$

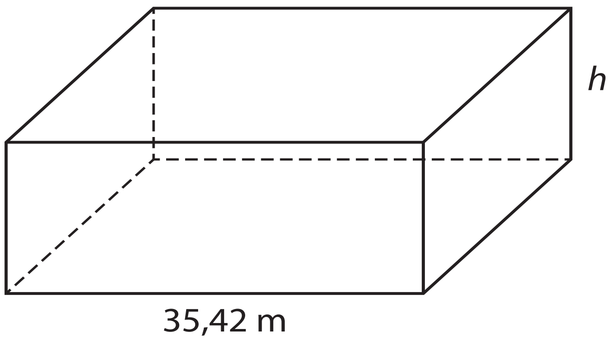
$$x = \pm 27,963... \text{ m}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 27,963...$ cm.

Vaipan pinta-ala on

$$A = 4 \cdot \frac{35,42\ \mathrm{m} \cdot 27,963...\ \mathrm{m}}{2} = 1\,980,904...\ \mathrm{m}^2$$

Samasta lasimäärästä valmistetaan suorakulmaisen särmiön muotoinen rakennus. Lasketaan, kuinka korkea särmiöstä saadaan.



Särmiön pinta-ala koostuu 4 samanlaisesta tahkosta sekä neliönmuotoisesta katosta. Lasketaan rakennuksen korkeus.

$$1980,904... = (4 \cdot 35,42 \cdot h) + (35,42 \cdot 35,42)$$
$$h = 5,126...\ \mathrm{m}$$

Pyramidin tilavuus on

$$V_{\mathrm{pyramidi}} = \frac{35,42\ \mathrm{m} \cdot 35,42\ \mathrm{m} \cdot 21,64\ \mathrm{m}}{3} = 9\ 049,677...\ \mathrm{m}^3$$

Särmiön tilavuus on

$$V_{\mathrm{särmiö}} = 35,42\ \mathrm{m} \cdot 35,42\ \mathrm{m} \cdot 5,126...\ \mathrm{m} = 6431,634...\ \mathrm{m}^3$$

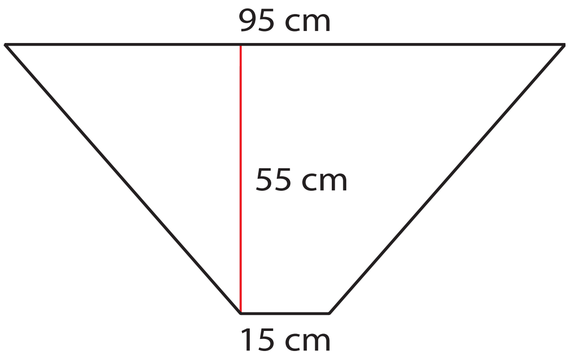
Lasketaan, kuinka monta prosenttia särmiön tilavuus on pyramidin tilavuudesta.

$$1-\frac{V_{\text{pyramidi}}-V_{\text{särmiö}}}{V_{\text{pyramidi}}}=1-\frac{9049{,}677...\text{ m}^3-6431{,}634...\text{ m}^3}{9049{,}677...\text{ m}^3}$$

$$=0{,}710...\approx 0{,}71=71\text{ \%}$$

45.

a) Hahmotellaan mallikuva ojan poikkileikkauksesta.

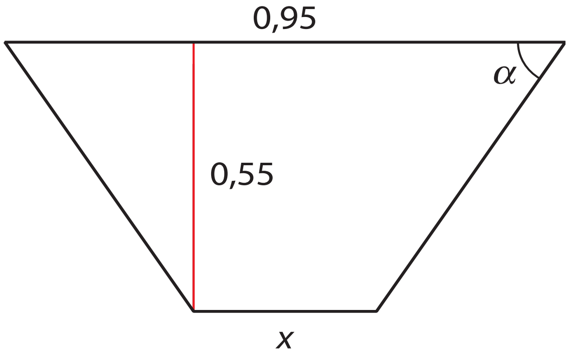


104 m pitkän ojan tilavuus *V* saadaan lieriön tilavuutena. Muutetaan kaikki arvot metreiksi:

- 95 cm = 0,95 m
- 55 cm = 0,55 m
- 15 cm = 0,15 m

$$V = \frac{0,95+0,15}{2} \cdot 0,55 \cdot 104 = 31,46\ \text{m}^3 \approx 31\ \text{m}^3$$

b) Hahmotellaan uusi mallikuva ojan poikkileikkauksesta. Merkitään kirjaimella x ojan uutta leveyttä.



Ojan uusi tilavuus on $V_2 = V + 5 \text{ m}^3 = 36,46 \text{ m}^3$

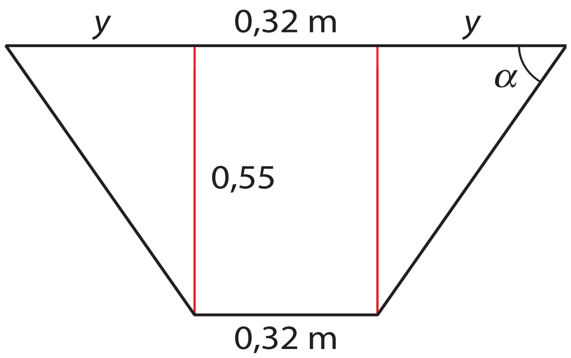
Muodostetaan tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{0,95 + x}{2} \cdot 0,55 \cdot 104 = 36,46$$

$$x = 0,324... \text{ m}$$

$$x \approx 0,32 \text{ m}$$

$$x = 32 \text{ cm}$$



Lasketaan janan y pituus.

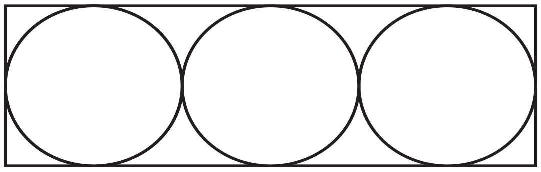
$$\begin{aligned} 0,32\text{ m} + y + y &= 0,95\text{ m} \\ y &= 0,315\text{ m} \end{aligned}$$

Lasketaan tangentin avulla kulman α suuruus.

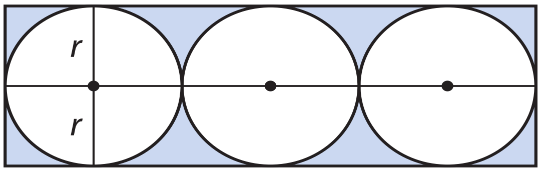
$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{0,55}{0,315} \\ \alpha &= 60,199...^\circ \approx 60^\circ \end{aligned}$$

46.

a)



b)



Ympyrälieriön pohjan säde on *r* ja korkeus on 6*r*. Lasketaan ympyrälieriön tilavuus.

$$V_{\text{lieriö}} = \pi \cdot (3{,}80 \text{ cm})^2 \cdot (6 \cdot 3{,}80 \text{ cm}) = 1\,034{,}312... \text{ cm}^3$$

Lasketaan kolmen pallon tilavuus.

$$V_{\text{pallot}} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (3{,}80 \text{ cm})^3 = 689{,}541... \text{ cm}^3$$

Tyhjää tilaa jää

$$V_{\text{lieriö}} - V_{\text{pallot}} = 1\,034{,}312... \text{ cm}^3 - 689{,}541... \text{ cm}^3 = 344{,}770... \text{ cm}^3 \approx 345 \text{ cm}^3$$

c) Lieriön pinta-ala on

$$\begin{aligned}A_{\text{lieriö}} &= 2\cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}}\\ &= 2\cdot\pi\cdot(3{,}80\ \text{cm})^2 + 2\cdot\pi\cdot 3{,}80\ \text{cm}\cdot(6\cdot 3{,}80\ \text{cm})\\ &= 635{,}104...\ \text{cm}^2\\ &\approx 635\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

47.

Merkitään ympyräkartion pohjan sädettä kirjaimella r, tällöin pohjan halkaisija ja kuution särmän pituus on $2r$.

Merkitään kuution korkeutta kirjaimella x, tällöin ympyräkartion sivujanan pituus on $x-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$.

Kuution korkeus on $2r$, tällöin ympyräkartion sivujanan pituus on $\frac{2\cdot 2r}{3}=\frac{4}{3}r$.

Kuution pinta-ala on

$$A_{\text{kuutio}}=6\cdot 2r\cdot 2r=24r^2$$

Kartion pinta-ala on

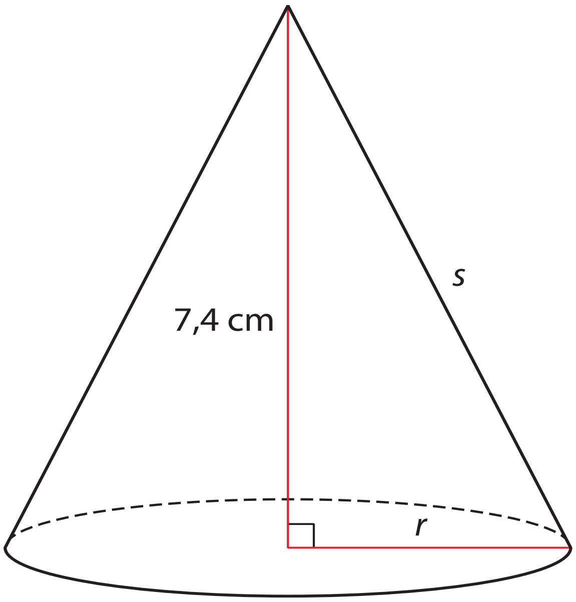
$$\begin{aligned}A_{\text{kartio}}&=A_{\text{pohja}}+A_{\text{vaippa}}\\&=\pi r^2+\pi r\cdot\frac{4}{3}r\\&=\frac{7}{3}\pi r^2\end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kartion pinta-ala on pienempi kuin kuution pinta-ala.

$$\frac{A_{\text{kuutio}}-A_{\text{kartio}}}{A_{\text{kuutio}}}=\frac{24r^2-\frac{7}{3}\pi r^2}{24r^2}=0,694...\approx 0,695=69,5\ \%$$

48.

a)



Lasketaan ympyräkartion pohjan säde *r* kartion tilavuuden avulla.

$$234 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 7,4}{3}$$
$$r = \pm 5,495\ldots \text{ cm}$$

Koska $r > 0$, niin $r = 5{,}495\ldots$ cm.

Lasketaan kartion sivujanan *s* pituus Pythagoraan lauseella.

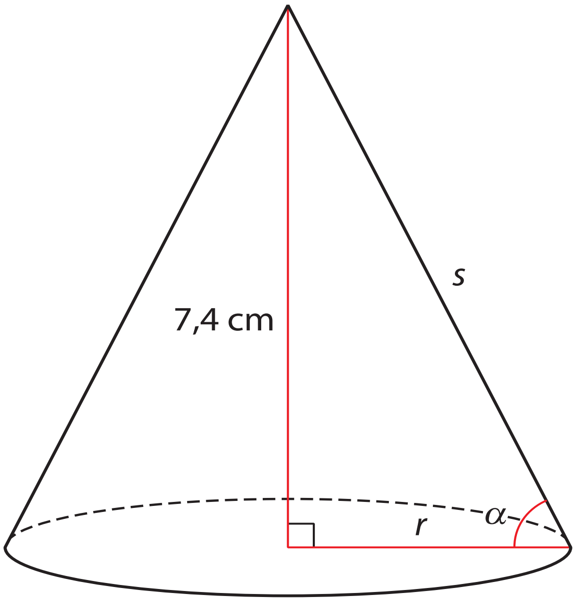
$$7,4^2 + 5,495\ldots^2 = s^2$$
$$s = \pm 9,217\ldots \text{ cm}$$

Koska $s > 0$, niin $s = 9{,}217\ldots$ cm.

Kartion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= \pi \cdot (5{,}495\ldots\ \text{cm})^2 + \pi \cdot 5{,}495\ldots\ \text{cm} \cdot 9{,}217\ldots\ \text{cm} \\ &= 253{,}977\ldots\ \text{cm}^2 \\ &\approx 250\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

b)

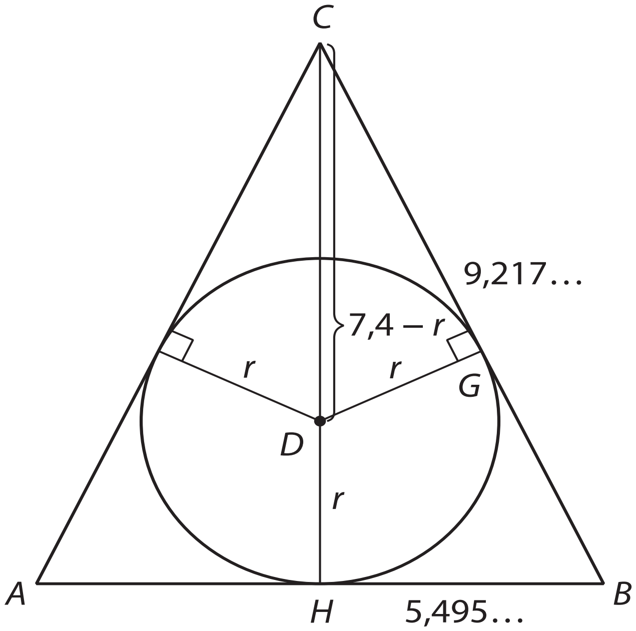


Lasketaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{7{,}4}{5{,}495\ldots} \\ \alpha &= 53{,}403\ldots^\circ \\ \alpha &\approx 53^\circ \end{aligned}$$

c) Piirretään poikkileikkauskuva. Kartion poikkileikkaus on tasakylkinen kolmio ABC. Pallon poikkileikkaus on ympyrä, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja. Kolmion sivut ovat ympyrän tangentteja.

Merkitään pallon sädettä kirjaimella r ja keskipistettä kirjaimella D. Pallon keskipisteen ja kartion huipun välisen janan pituus $|CD| = 7,4 - r$ (cm)



Koska kolmion ABC sivujana BC on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot BCH ja CDG ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma C on kolmioille yhteinen.

Muodostetaan kolmioiden BCH ja CDG vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä r.

$$\frac{|BC|}{|DC|}=\frac{|HB|}{|DG|}$$

$$\frac{9,217...}{7,4-r}=\frac{5,495...}{r}$$

$$r=2,763...\text{ cm}$$

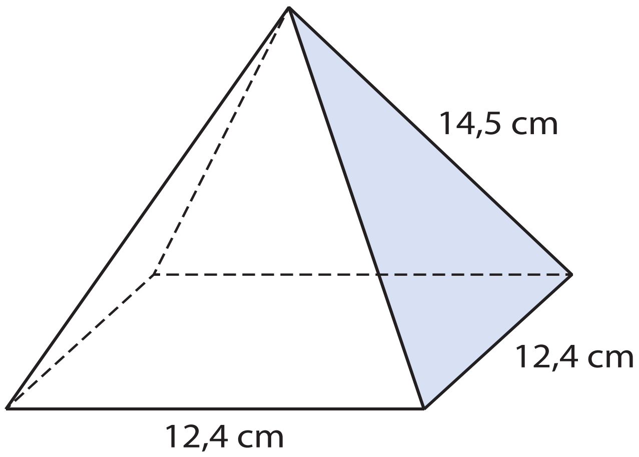
Pallon tilavuus on

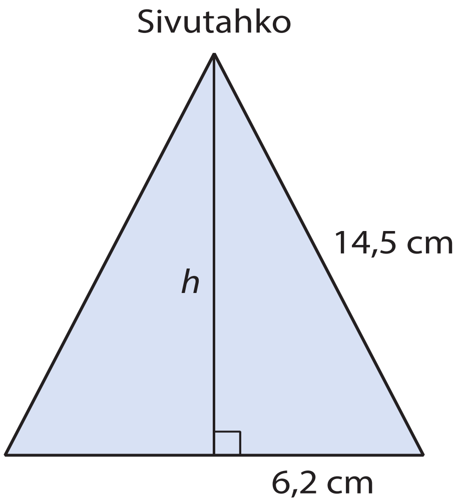
$$V_{\text{pallo}}=\frac{4}{3}\pi\cdot(2,763...\text{ cm})^3$$

$$=88,444...\text{ cm}^3=0,884...\text{ dm}^3=0,884...\text{ l}=8,844...\text{ dl}=88,444...\text{ cl}\approx 88\text{ cl}$$

49.

a) Piirretään mallikuva.


14,5 cm
12,4 cm
12,4 cm


Sivutahko
h
14,5 cm
6,2 cm

Lasketaan sivutahkon korkeus *h* Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 6,2^2 = 14,5^2$$
$$h = \pm 13,107...\text{ cm}$$

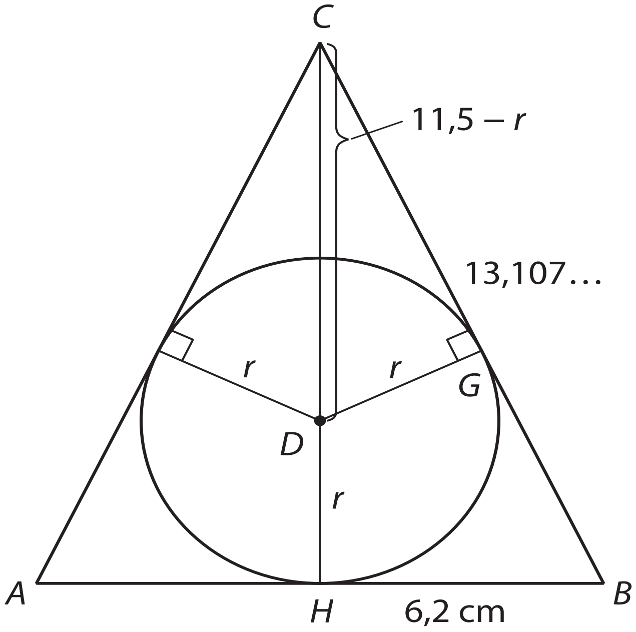
Koska $h > 0$, niin $h = 13,107\ldots$ cm.

Pyramidin vaipan pinta-ala muodostuu neljästä samanlaisesta sivutahkosta. Vaipan ala on

$$A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot \frac{12,4\text{ cm} \cdot 13,107...\text{ cm}}{2} = 325,053...\text{ cm}^2 \approx 325\text{ cm}^2$$

b) Piirretään poikkileikkauskuva. Pyramidin poikkileikkaus on tasakylkinen kolmio *ABC*. Pallon poikkileikkaus on ympyrä, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja. Kolmion sivut ovat ympyrän tangentteja.

Merkitään pallon sädettä kirjaimella r ja keskipistettä kirjaimella *D*. Pallon keskipisteen ja kartion huipun välisen janan pituus $|CD| = 11,5 - r \text{ (cm)}$.



Koska kolmion *ABC* sivujana *BC* on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot *BCH* ja *CDG* ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma *C* on kolmioille yhteinen.

Muodostetaan kolmioiden BCH ja CDG vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä r.

$$\frac{|BC|}{|DC|}=\frac{|HB|}{|DG|}$$

$$\frac{13{,}107...}{11{,}5-r}=\frac{6{,}2}{r}$$

$$r=3{,}692...\ \text{cm}$$

Pallon pinta-ala on

$$A=4\pi\cdot(3{,}692...\ \text{cm})^2=171{,}379...\ \text{cm}^2\approx 171\ \text{cm}^2$$

5.3 Monivalintatehtävät

1.

Merkitään kolmion kantakulmia kirjaimella α. Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha+42^\circ &= 180^\circ \\ 2\alpha &= 138^\circ \qquad \Big| :2 \\ \alpha &= 69^\circ\end{aligned}$$

Oikea vastaus on b.

2.

Merkitään suorakulmaisen kolmion pienempää terävää kulmaa kirjaimella x, tällöin toisen terävän kulman suuruus on x + 25°. Kolmion kulmien suuruus on 180°, joten

$$\begin{aligned} x+(x+25°)+90° &= 180° \\ 2x &= 65 \qquad\qquad \Big|:2 \\ x &= 32,5° \end{aligned}$$

Suurempi terävä kulma on tällöin 32,5° + 25° = 57,5°.

Oikea vastaus on a.

3.

Suunnikkaassa on kaksi yhtä suurta terävää kulmaa ja kaksi yhtä suurta tylppää kulmaa. Merkitään tylppää kulmaa kirjaimella α. Suunnikkaan kulmien summa on 360°, joten

$$\begin{aligned} 38^\circ + 38^\circ + \alpha + \alpha &= 360^\circ \\ 2\alpha &= 284^\circ \qquad \Big|:2 \\ \alpha &= 142^\circ \end{aligned}$$

Oikea vastaus on b.

4.

Merkitään suorakulmion kantaa kirjaimella x, tällöin korkeus on $4x$. Muodostetaan suorakulmion piirin yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} p &= 90\text{ cm} \\ x+x+4x+4x &= 90\text{ cm} \\ 10x &= 90\text{ cm} && \Big|:10 \\ x &= 9\text{ cm} \end{aligned}$$

Suorakulmion leveys on $x = 9$ cm ja korkeus on $4x = 4\cdot 9\text{ cm} = 36\text{ cm}$.

Oikea vastaus on a.

5.

Muodostetaan ympyrän pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä ympyrän säde r.

$$\pi \cdot r^2 = 36 \qquad \Big| : \pi$$

$$r^2 = \frac{36}{\pi}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{36}{\pi}}$$

$$r = \pm\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{\pi}}$$

$$r = \pm\frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

Koska $r > 0$, niin $r = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$.

Oikea vastaus on c.

6.

Ympyrän halkaisija on 20, joten sen säde on 10.

Lasketaan sektorin kaaren pituus.

$$\begin{aligned} b &= \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 \\ &= \frac{20\pi}{12} \\ &= \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

Oikea vastaus on b.

7.

Kolmio on suorakulmainen, jos Pythagoraan lause toimii siinä.

Jos sivujen pituudet ovat $\sqrt{3}$, 2 ja $\sqrt{7}$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}^2 + 2^2 &= \sqrt{7}^2 \\ 3 + 4 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Oikea vastaus on c.

8.

Merkitään kartion sivujanan pituutta kirjaimella s. Muodostetaan vaipan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä s.

$$\begin{aligned} \pi \cdot 9 \cdot s &= 27\pi && \Big| : 9\pi \\ s &= \frac{27\pi}{9\pi} \\ s &= 3 \end{aligned}$$

Oikea vastaus on c.

9.

Merkitään pallon sädettä kirjaimella *r*. Muodostetaan pallon pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä *r*.

$$A_{\text{pallo}} = 64\pi$$

$$4\pi r^2 = 64\pi \qquad \Big| : 4\pi$$

$$r^2 = \frac{64\pi}{4\pi}$$

$$r^2 = 16$$

$$r = \pm\sqrt{16}$$

$$r = \pm 4$$

Koska $r > 0$, niin $r = 4$.

Oikea vastaus on a.

10.

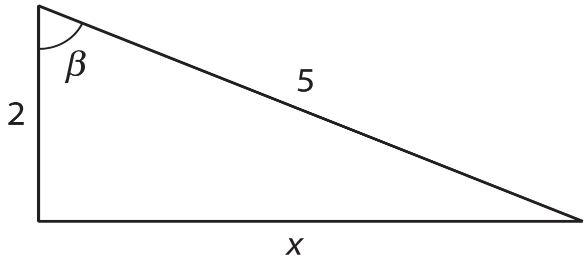
Merkitään pidemmän kateetin pituutta kirjaimella x ja lasketaan Pythagoraan lauseen avulla se.

$$\begin{aligned} 3^2 + x^2 &= 8^2 \\ 9 + x^2 &= 64 \\ x^2 &= 55 \\ x &= \pm\sqrt{55} \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{55}$.

Oikea vastaus on a.

11.



Merkitään kulman β vastaista sivua kirjaimella x. Lasketaan Pythagoraan lauseella sivu x.

$$\begin{aligned} 2^2 + x^2 &= 5^2 \\ 4 + x^2 &= 25 \\ x^2 &= 21 \\ x &= \pm\sqrt{21} \end{aligned}$$

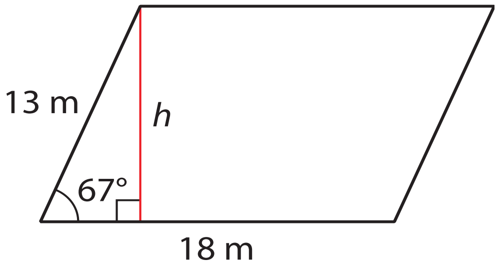
Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{21}$.

Nyt

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Oikea vastaus on c.

12.



Sivun *h* pituus saadaan laskettua sinin avulla.

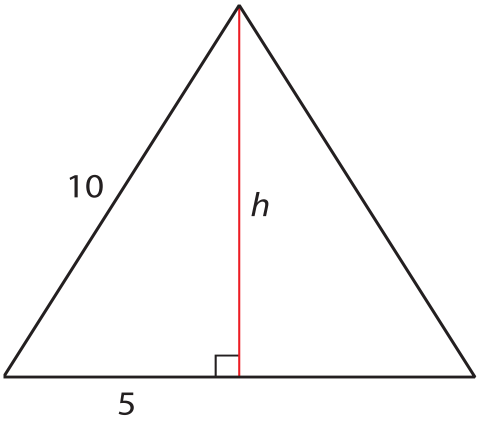
$$\sin 67^\circ = \frac{h}{13\text{ m}}$$

$$h = 13\text{ m} \cdot \sin 67^\circ$$

Oikea vastaus on b.

13.

Piirretään mallikuva kolmiosta.



Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan. Lasketaan muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta sivun *h* pituus Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
5^2 + h^2 &= 10^2 \\
25 + h^2 &= 100 \\
h^2 &= 75 \\
h &= \pm\sqrt{75} \\
h &= \pm\sqrt{25 \cdot 3} = \pm 5\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Koska $h > 0$, niin $h = 5\sqrt{3}$.

Oikea vastaus on a.

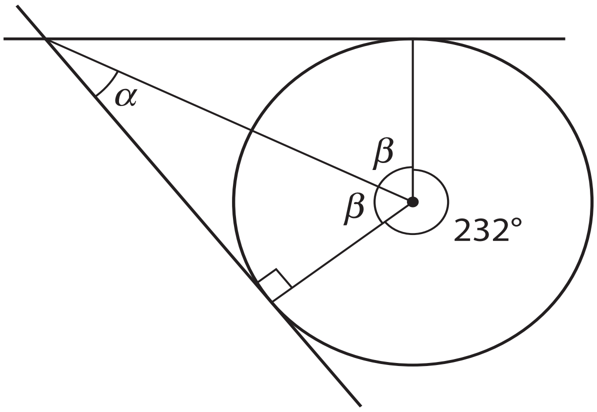
14.

Merkitään pidempää sivua kirjaimella a. Muodostetaan puolisuunnikkaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä a.

$$\begin{aligned} \frac{5+a}{2}\cdot 4 &= 28 \\ (5+a)\cdot 2 &= 28 && \big|:2 \\ 5+a &= 14 \\ a &= 9\text{ cm} \end{aligned}$$

Oikea vastaus on b.

15.



Kulmat β, β ja 232° muodostavat täyden kulman, joten

$$\begin{aligned} \beta+\beta+232^\circ &= 360^\circ \\ 2\beta &= 128^\circ \qquad \Big| :2 \\ \beta &= 64^\circ \end{aligned}$$

Kulmat α, β ja suorakulma muodostavat suorakulmaisen kolmion. kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+90^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 180^\circ-90^\circ-64^\circ \\ \alpha &= 26^\circ \end{aligned}$$

Oikea vastaus on a.

16.

Kolmiot *ABC* ja *CBE* ovat yhdenmuotoisia, koska

- kolmioilla on yhteinen kulma *B*
- janat *AC* ja *DE* ovat samansuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat *A* ja *D* ovat yhtä suuret.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama. Merkitään janan *DE* pituutta kirjaimella *x*.

$$\frac{|AC|}{|DE|}=\frac{|AB|}{|DB|}$$

$$\frac{12,0}{x}=\frac{4,0+6,0}{6,0}$$

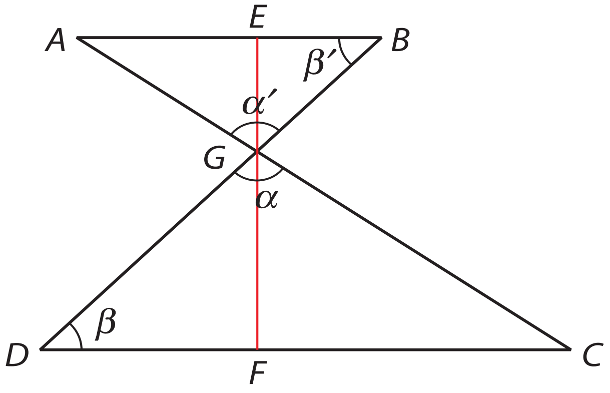
$$x\cdot(4,0+6,0)=12,0\cdot 6,0$$

$$10x=72 \qquad |:10$$

$$x=7,2\text{ cm}$$

Oikea vastaus on c.

17.



Kulmat α ja α' ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret.

Kulmilla β ja β' on jana BD vasempana kylkenä, joten kulmat ovat samankohtaisia kulmia. Koska janat AB ja AC ovat yhdensuuntaisia, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\beta = \beta'$.

Kolmiot ABG ja CDG ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama.

$$\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|EG|}{|FG|}$$

$$\frac{2,0}{3,0} = \frac{1,0}{|FG|}$$

$$2 \cdot |FG| = 3 \qquad \qquad |:2$$

$$|FG| = \frac{3}{2}\text{ m}$$

Kolmion *DCG* pinta-ala on

$$A_{DCG}=\frac{3,0\ \mathrm{m}\cdot\frac{3}{2}\ \mathrm{m}}{2}=\frac{\frac{9\ \mathrm{m}^2}{2}}{2}=\frac{9\ \mathrm{m}^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\,m^2=2,25\ \mathrm{m}^2$$

Oikea vastaus on a.

18.

Kolmiot *BCD*, *ADB* ja *ABC* ovat yhdenmuotoisia, koska

- Kaikilla kolmioilla on suora kulma vastinkulmana.
- Kolmioilla *ABC* ja *ADB* on yhteinen kulma *A*.
- Kolmioilla *ABC* ja *BCD* on yhteinen kulma *C*.

Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta *ABD* janan *BD* pituus Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
2^2 + |BD|^2 &= 3^2 \\
4 + |BD|^2 &= 9 \\
|BD|^2 &= 5 \\
|BD| &= \pm\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

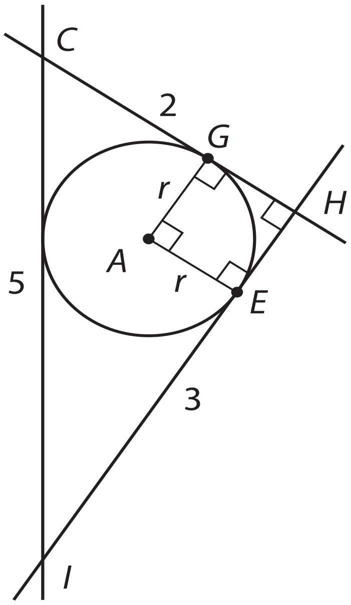
Koska sivun pituus on positiivinen, niin $|BD| = \sqrt{5}$

Yhdenmuotoisilla kolmioilla vastinsivujen suhde on sama.

$$
\begin{aligned}
\frac{|AD|}{|BD|} &= \frac{|BD|}{|CD|} \\
\frac{2}{\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{5}}{|CD|} \\
|CD| \cdot 2 &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \qquad |:2 \\
|CD| &= \frac{5}{2} = 2{,}5
\end{aligned}
$$

Oikea vastaus on c.

19.



Koska kulma *H* on suorakulmainen kulma ja kulmat *E* ja *G* ovat ympyrän tangentteja eli suorakulmaisia, niin kulma *A* on suorakulmainen. Koska janat *GA* ja *AE* ovat pituudeltaan *r*, ovat myös *GH* ja *EH* pituudeltaan *r*.

Sivu *HI* on pituudeltaan *r* + 3 ja sivu *HC* on pituudeltaan *r* + 2. Lasketaan Pythagoraan lauseen avulla ympyrän säde *r*.

$$(r+3)^2+(r+2)^2=5^2$$

$$r^2+6r+9+r^2+4r+4=25$$

$$2r^2+10r-12=0 \qquad |:2$$

$$r^2+5r-6=0$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x=\frac{-(5)\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm7}{2}$$

$$x=\frac{-5-7}{2}=-6 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-5+7}{2}=1$$

Koska $x > 0$, niin $x = 1$.

Oikea vastaus on a.

20.

Merkitään kateetteja $3x$ ja $4x$. Lasketaan Pythagoraan lauseella x:n arvo.

$$\begin{aligned}(3x)^2+(4x)^2&=10^2\\ 9x^2+16x^2&=100\\ 25x^2&=100 \qquad \big|:25\\ x^2&=4\\ x&=\pm\sqrt{4}\\ x&=\pm 2\text{ cm}\end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 2$ cm.

Kateettien pituudet ovat

- $3x = 3\cdot 2\text{ cm} = 6\text{ cm}$
- $4x = 4\cdot 2\text{ cm} = 8\text{ cm}$

Oikea vastaus on c.

21.

Lasketaan kulma kosinin avulla.

$$\cos\beta = \frac{13{,}1}{17{,}2}$$

$$\beta = 40{,}392...^\circ \approx 40{,}4^\circ$$

Oikea vastaus on b.

22.

Merkitään hypotenuusaa kirjaimella x. Lasketaan hypotenuusan pituus sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 27{,}48^\circ &= \frac{9{,}16}{x} \\ x &= 19{,}850\ldots \text{ cm} \\ x &\approx 19{,}9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Oikea vastaus on a.

23.

Merkitään keskuskulmaa kirjaimella α. Muodostetaan kaaren pituuden yhtälö ja ratkaistaan α.

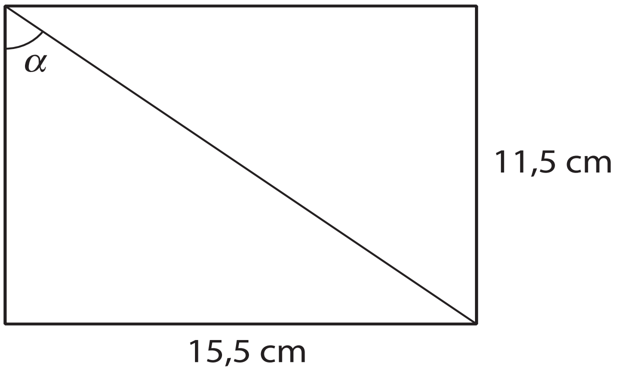
$$\frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 15,0 = 75,2$$

$$\alpha = 287,242...°$$

$$\alpha \approx 287°$$

Oikea vastaus on c.

24.



Lasketaan tangentin avulla kulma α.

$$\tan\alpha = \frac{15,5}{11,5}$$
$$\alpha = 53,426...^\circ$$
$$\alpha \approx 53,4^\circ$$

Oikea vastaus on c.

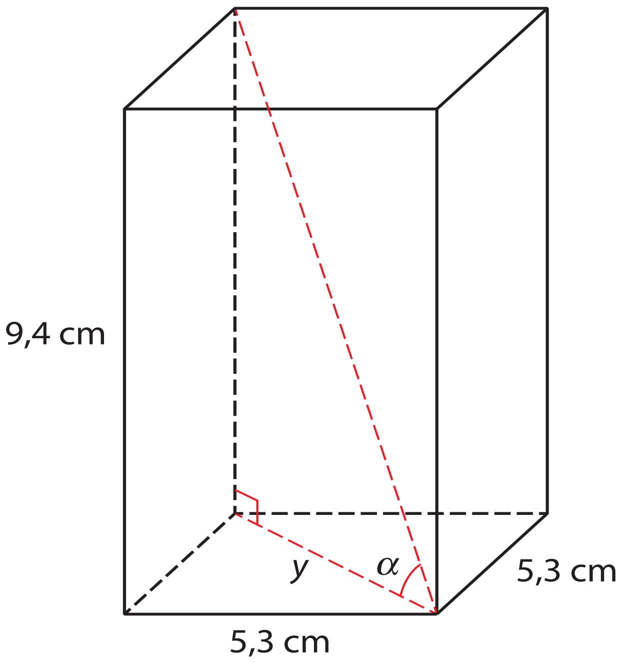
25.

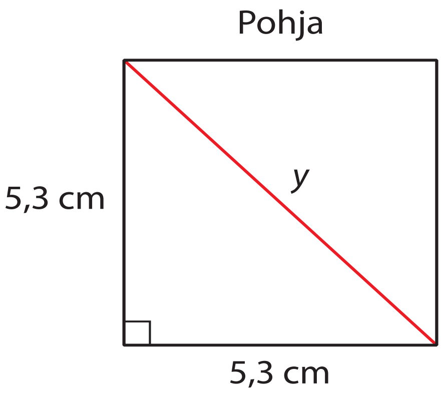
Merkitään pohjaympyrän säteen pituutta kirjaimella r, tällöin ympyräkartion sivujanan pituus on $2r$. Muodostetaan kartion vaipan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan r.

$$\begin{aligned}\pi \cdot r \cdot 2r &= 319 \\ r &= 7{,}125\ldots\ \text{cm} \\ r &\approx 7{,}13\ \text{cm}\end{aligned}$$

Oikea vastaus on a.

26.


9,4 cm
y
α
5,3 cm
5,3 cm


Pohja
5,3 cm
y
5,3 cm

Lasketaan ensin pohjan lävistäjän pituus y Pythagoraan lauseella.

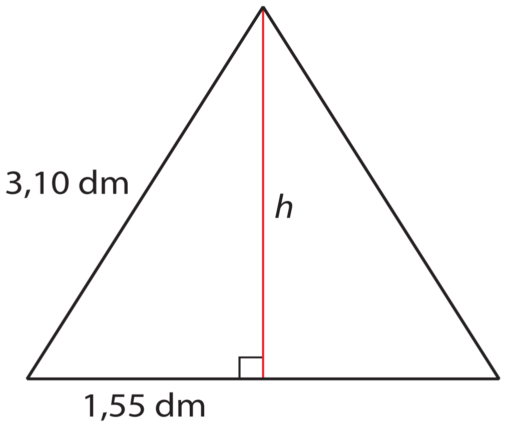
$$y^2 = 5,3^2 + 5,3^2$$
$$y = \pm 7,495...$$

Lasketaan tangentin avulla kulma α.

$$\tan \alpha = \frac{9,4}{7,495...}$$
$$\alpha = 51,431...^\circ$$
$$\alpha = 51^\circ$$

Oikea vastaus on b.

27.



Pyramidin pohjan korkeusjana *h* voidaan laskea Pythagoraan lauseella.

$$1{,}55^2 + h^2 = 3{,}10^2$$
$$h = 2{,}684\ldots\ \text{dm}$$

Pyramidin tilavuus on

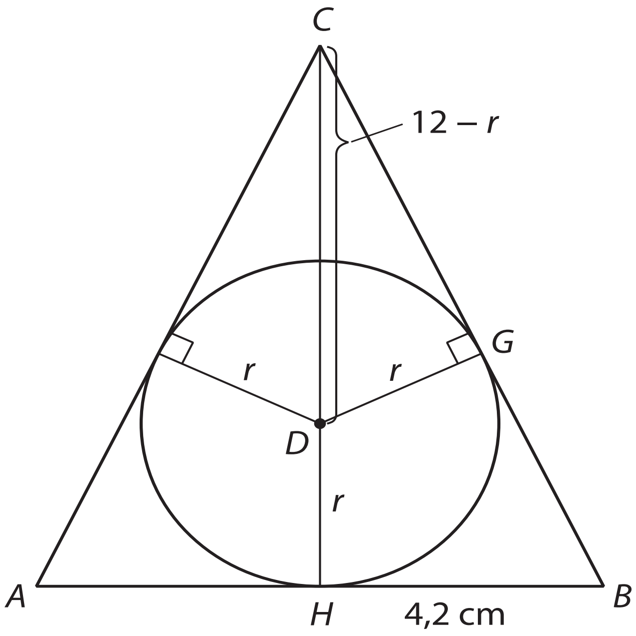
$$V = \frac{3{,}10\ \text{dm} \cdot 2{,}684\ldots\ \text{dm}}{2} \cdot \frac{4{,}9\ \text{dm}}{3} = 6{,}796\ldots\ \text{dm}^3 \approx 6{,}8\ \text{dm}^3$$

Oikea vastaus on a.

28.

Piirretään poikkileikkauskuva. kartion poikkileikkaus on tasakylkinen kolmio *ABC*. Pallon poikkileikkaus on ympyrä, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja. Kolmion sivut ovat ympyrän tangentteja.

Merkitään pallon sädettä kirjaimella r ja keskipistettä kirjaimella *D*. Pallon keskipisteen ja kartion huipun välisen janan pituus $|CD| = 12 - r$ (cm).



Koska kolmion *ABC* sivujana *BC* on ympyrän tangentti, pallon säde on kohtisuorassa kartion sivujanaa vastaan. Poikkileikkauskuvaan kolmiot *BCH* ja *CDG* ovat yhdenmuotoiset, koska

- molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana
- kulma *C* on kolmioille yhteinen.

Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta *BCH* sivun *BC* pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
|BC|^2 &= 4{,}2^2 + 12^2 \\
|BC| &= \pm 12{,}713\ldots\ \text{cm}
\end{aligned}
$$

Koska sivun pituus on positiivinen, niin $|BC| = 12{,}713\ldots\ \text{cm}$

Muodostetaan kolmioiden *BCH* ja *CDG* vastinsivujen suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä *r*.

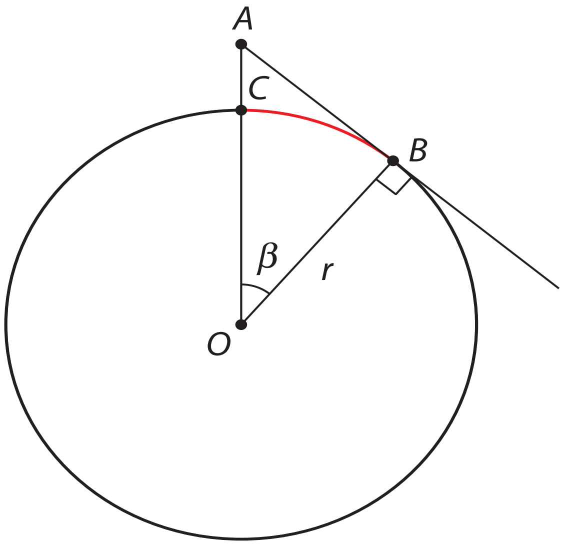
$$
\begin{aligned}
\frac{|BC|}{|DC|} &= \frac{|HB|}{|DG|} \\
\frac{12{,}713\ldots}{12-r} &= \frac{4{,}2}{r} \\
r &= 2{,}979\ldots\ \text{cm} \\
r &\approx 3{,}0\ \text{cm}
\end{aligned}
$$

Oikea vastaus on c.

29.

Piirretään mallikuva.

- Merkitään pisteellä *A* kuumailmapallon paikka.
- Merkitään pisteellä *B* paikka mihin asti kuumailmapallosta näkee.
- Merkitään Maan keskipistettä kirjaimella *O*.



Kuumailmapallo on 2755 m:n korkeudessa, joten janan *AC* pituus on 2,755 km. Janan *OA* pituus on

$$|OA| = |OC| + |AC| = 6\,370 \text{ km} + 2{,}755 \text{ km} = 6\,372{,}755 \text{ km}$$

Lasketaan kulman β suuruus.

$$\cos\beta = \frac{6\,370}{6\,372{,}755}$$

$$\beta = 1{,}684...^\circ$$

Lasketaan kaaren pituus *b*.

$$b = \frac{1,684...^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6\,370 = 187,312...\text{ km} \approx 187,3\text{ km}$$

Oikea vastaus on a.

30.

Lasketaan kuinka pitkän matkan Mars matkaa 686,96 päivässä. Muutetaan päivät sekunneiksi.

686,96 d = 16 487,04 h = 989 222,4 min = 59 353 344 s

Marsin kiertonopeus on 24,077 km/h, joten sen kiertorata on

$$59\ 353\ 344\ \text{s} \cdot 24,077\,\text{km}/\text{s} = 1\ 429\ 050\ 463,488\,\text{km}$$

Marsin kiertorata on ympyrän muotoinen, joten muodostetaan kehän pituuden yhtälö ja ratkaistaan säde *r*.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \pi \cdot r &= 1\ 429\ 050\ 463,488 \\ r &= 227\ 440\ 445{,}191...\ \text{km} \end{aligned}$$

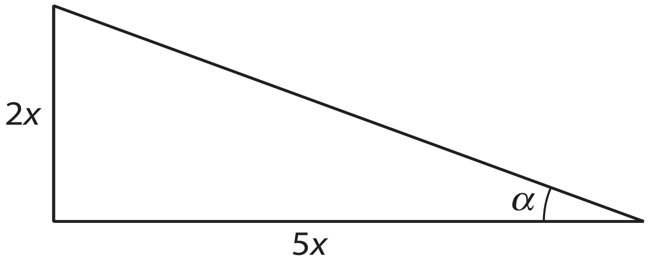
Planeetan etäisyys Auringon pinnasta on kiertoradan säde vähennettynä auringon säde. Planeetan etäisyys auringon pinnasta on

$$227\ 440\,445{,}191...\ \text{km} - 696\ 000\ \text{km} = 226\ 744\ 445{,}191...\ \text{km} \approx 227\ 000\ 000\ \text{km}$$

Oikea vastaus on c.

31.

Merkitään kateetteja $2x$ ja $5x$.

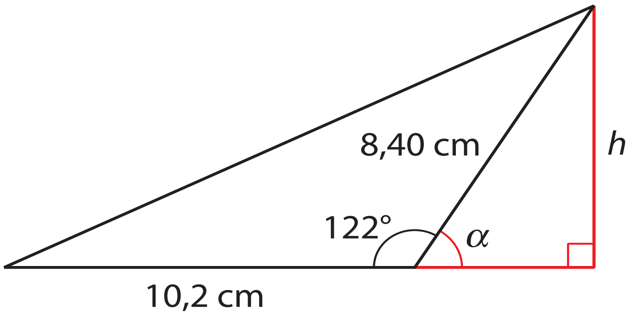


Lasketaan tangentin avulla kulman α suuruus.

$$\tan\alpha = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$
$$\alpha = 21{,}801...^\circ \approx 22^\circ$$

Oikea vastaus on a.

32.



Kulmat 122° ja α muodostavat oikokulman, joten

$$\begin{aligned}\alpha + 122^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 58^\circ\end{aligned}$$

Lasketaan sivun h pituus sinin avulla.

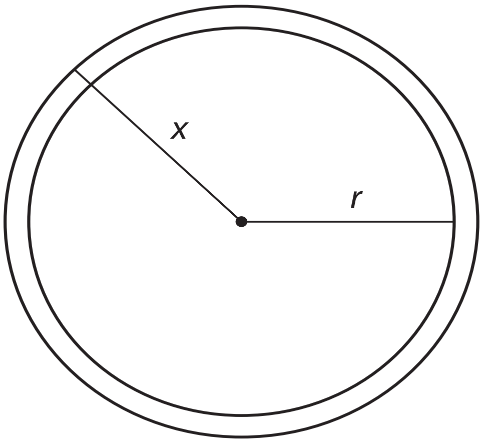
$$\begin{aligned}\sin 58^\circ &= \frac{h}{8,40} \\ h &= 7,123\ldots\ \text{cm}\end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{10,2\ \text{cm} \cdot 7,123\ldots\ \text{cm}}{2} = 36,330\ldots\ \text{cm}^2 \approx 36,3\ \text{cm}^2$$

Oikea vastaus on c.

33.



Merkitään kuoritun appelsiinin sädettä kirjaimella *r*. Merkitään kuorimattoman appelsiinin sädettä kirjaimella *x*. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$\begin{aligned} 4\pi \cdot x^2 &= 265{,}9 \qquad \Big|: 4\pi \\ x &= \pm 4{,}599...\text{ cm} \end{aligned}$$

Kuoritun appelsiinin säde on

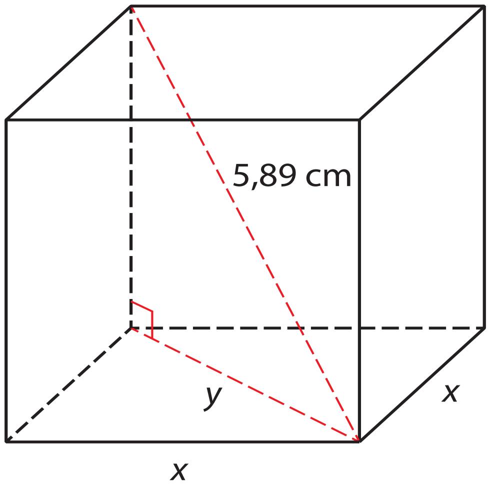
$$4{,}599...\text{ cm} - 0{,}21\text{ cm} = 4{,}389...\text{ cm}$$

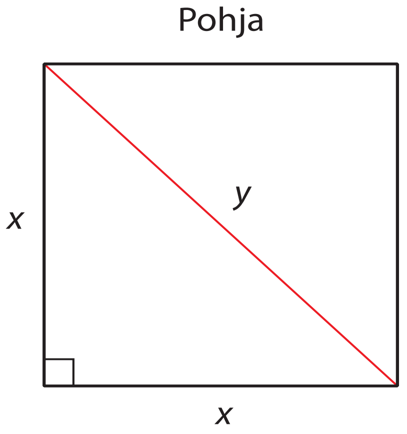
Kuoritun appelsiinin halkaisija on

$$2 \cdot 4{,}389...\text{ cm} = 8{,}778...\text{ cm} \approx 8{,}8\text{ cm} = 88\text{ mm}$$

Oikea vastaus on c.

34.





Lasketaan pohjan lävistäjän y pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + x^2 = y$$
$$y = \pm\sqrt{2}x$$

Koska $y > 0$, niin $y = \sqrt{2}x$.

Sivut x, y ja avaruuslävistäjä muodostavat suorakulmaisen kolmion.
Lasketaan Pythagoraan lauseella x.

$$x^2 + \left(\sqrt{2}x\right)^2 = 5{,}89^2$$
$$x = 3{,}400\ldots \text{ cm}$$

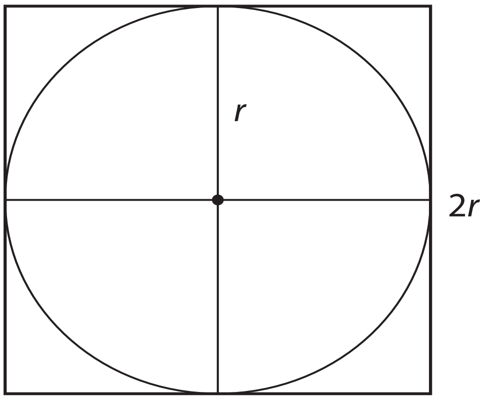
Kuution tilavuus on

$$V = 3{,}400\ldots \cdot 3{,}400\ldots \cdot 3{,}400\ldots = 39{,}324\ldots \text{ cm}^3 \approx 39{,}3 \text{ cm}^3$$

Oikea vastaus on c.

35.

Piirretään poikkileikkauskuva.



Merkitään kuution sivun pituutta $2r$, tällöin ympyrälieriön pohjan säde on r.

Kuution tilavuus on

$$V_{\text{kuutio}} = 2r \cdot 2r \cdot 2r = 8r^3$$

Lieriön tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kuution tilavuudesta.

$$\frac{V_{\text{lieriö}}}{V_{\text{kuutio}}} = \frac{2\pi r^3}{8r^3} = 0,785... \approx 0,79 = 79\ \%$$

Oikea vastaus on a.

36.

Pituuksien suhde on mittakaava. Merkitään juoksurataa kartalla kirjaimella x.

$$\frac{x}{4,2}=\frac{1}{400\,000}$$

$$x=0,0000105\text{ km}=0,0105\text{ m}=1,05\text{ cm}$$

Oikea vastaus on b.

37.

Lasketaan teltan säteen *r* pituus kehän pituuden avulla.

$$\frac{180°}{360°}\cdot 2\pi \cdot r = 3,8$$

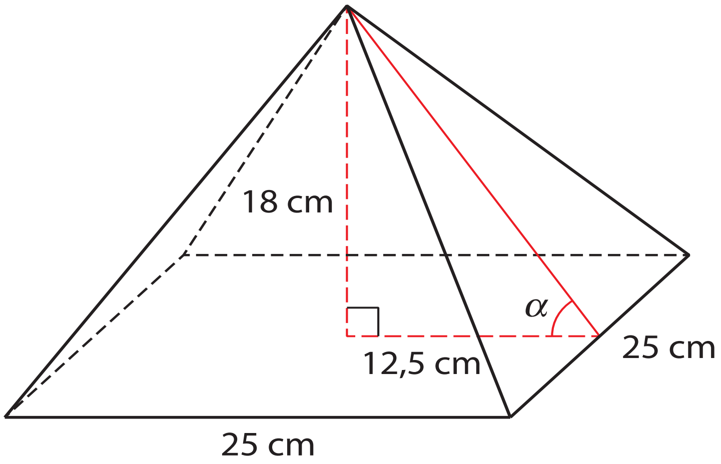
$$r = 1,209...\ \text{m}$$

Puolipallon tilavuus on puolet pallon tilavuudesta. Teltan tilavuus on

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(1,209...\ \text{m})^3 = 3,706...\ \text{m}^3 \approx 3,7\ \text{m}^3$$

Oikea vastaus on b.

38.



Pyramidin korkeusjana, sivutahkon korkeusjana ja puolet pohjasivun pituudesta muodostavat suorakulmaisen kolmion lasketaan tangentin avulla kulman α suuruus.

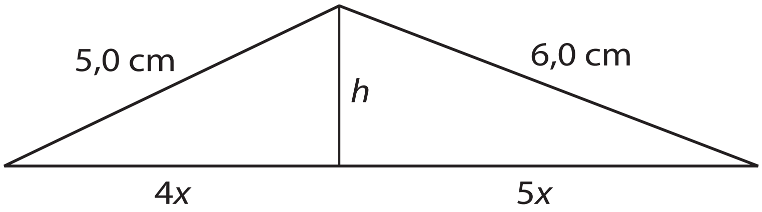
$$\tan\alpha = \frac{18}{12,5}$$

$$\alpha = 55,222...^\circ \approx 55^\circ$$

Oikea vastaus on a.

39.

Piirretään mallikuva.



Merkitään kolmion kannan pituuksia $4x$ ja $5x$. Kolmion korkeusjana leikkaa kolmiosta kaksi suorakulmaista kolmiota. Muodostetaan yhtälöpari Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{cases} 5^2-(4x)^2=h^2 \\ 6^2-(5x)^2=h^2 \end{cases}$$

$$5^2-(4x)^2=6^2-(5x)^2$$
$$x=\frac{\sqrt{11}}{3}\text{ cm}$$

Korkeusjanan pituus on

$$h^2=5^2-\left(4\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2$$
$$h=2,333...\text{ cm}\approx 2,3\text{ cm}$$

Oikea vastaus on b.